Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 3(248). С. 258–267

ДИАГРАММЫ ЗИГЗАГ-ТИПА И КОНФОРМНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

С. Э. Деркачев [a], *А. П. Исаев* [a,б], *Л. А. Шумилов* [a]

[a] Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

[б] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работе получено удобное представление для серии двухточечных и четырехточечных диаграмм, связанных с D-мерной квантовой теорией поля типа «fishnet». Данное представление позволяет получить точное выражение для диаграмм зигзаг-серии в теории поля ϕ^4, что приводит к сравнительно простому доказательству зигзаг-гипотезы, сформулированной Д. Бродхарстом и Д. Краймером.

We obtain a convenient representation for a series of two-point and four-point diagrams related to the D-dimensional fishnet field theory. This representation allows one to obtain an exact expression for the zig-zag series diagrams in the ϕ^4 field theory, which leads to a relatively simple proof of the zig-zag conjecture formulated by D. Broadhurst and D. Kreimer.

PACS: 02.90.+p

ВВЕДЕНИЕ

Четырехмерные теории поля с взаимодействием типа ϕ^4 представляют собой неотъемлемую часть Стандартной модели взаимодействия элементарных частиц. Важнейшей задачей является вычисление β-функции для таких теорий. Известно, что значительную (почти половину) часть вклада в β-функцию вносят диаграммы так называемой зигзаг-серии: M-петлевая диаграмма зигзаг-серии дает вклад в $(M+1)$-петлевой порядок β-функции. Ответ для двухточечной M-петлевой зигзаг-диаграммы имеет следующий вид:

$$G_2^{(M)}(x,y) = \frac{\pi^{2M}}{(x-y)^2}\, Z(M+1), \tag{1}$$

где x, $y \in \mathbb{R}^4$. Нормировочная константа π^{2M} выделена для удобства, а $Z(M+1)$ — константа, непосредственно входящая в выражение для β-функции. Константа $Z(M+1)$ дается формулой

$$Z(M+1) = 4C_M \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(p-1)(M+1)}}{p^{2(M+1)-3}} = \begin{cases} 4C_M \zeta_{2M-1} & \text{для } M = 2N+1, \\ 4C_M(1-2^{2(1-M)})\zeta_{2M-1} & \text{для } M = 2N, \end{cases} \tag{2}$$

где $C_M = (1/(M+1))\binom{2M}{M}$ — число Каталана. Это выражение было предложено Д. Бродхарстом и Д. Краймером в качестве гипотезы [1] (зигзаг-гипотезы), а затем доказано в работе [2]. Точной формулировке зигзаг-гипотезы предшествовала серия работ, посвященных вычислению отдельных членов данной серии [3–8].

В работе представлено относительно простое доказательство зигзаг-гипотезы, основанное на операторном формализме [9, 10], методах конформной теории поля [11] и методах вычисления диаграмм в теориях типа «fishnet» [12–15].

Диаграммы зигзаг-серии, как и диаграммы типа «fishnet», построены из повторяющихся блоков. Повторяющийся блок естественно интерпретировать как интегральное ядро оператора, получившего название «graph-building operator». Такая операторная интерпретация позволяет переформулировать задачу о вычислении диаграммы как задачу о диагонализации «graph-building» оператора: нахождение полной системы собственных функций и соответствующих собственных значений. В предлагаемой работе система собственных функций построена для диаграмм зигзаг-серии, что позволяет получить точные выражения для соответствующих четырехточечных и двухточечных функций. «Graph-building» оператор, связанный с диаграммами зигзаг-серии, обладает свойством конформной инвариантности, так что его собственные функции оказываются частным случаем трехточечной корреляционной функции конформной теории поля — конформными треугольниками.

1. ОПЕРАТОРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Рассмотрим D-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^D$ с координатами x^μ ($\mu = 1, \ldots, D$) и будем обозначать $(x)^{2\alpha} \equiv \left(x^2\right)^\alpha = \left(\sum\limits_\mu x^\mu\, x^\mu\right)^\alpha$. Пусть $\{\hat{q}^\mu_a,\ \hat{p}^\nu_b\}$ ($a, b = 1, \ldots, n$) — эрмитовы генераторы алгебры $\mathcal{H}^{(n)} = \sum\limits_{a=1}^{n} \mathcal{H}_a$, состоящей из n копий D-мерной алгебры Гейзенберга $\mathcal{H}_a$, такие что

$$[\hat{q}^\mu_a, \hat{p}^\nu_b] = i\, \delta^{\mu\nu}\, \delta_{ab}. \tag{3}$$

Введем состояния $|x_a\rangle$ и $|k_a\rangle$, являющиеся собственными для генераторов $\hat{q}^\mu_a$ и $\hat{p}^\nu_a$ подалгебры $\mathcal{H}_a \subset \mathcal{H}^{(n)}$:

$$\hat{q}^\mu_a|x_a\rangle = x^\mu_a|x_a\rangle, \qquad \hat{p}^\mu_a|k_a\rangle = k^\mu_a|k_a\rangle \tag{4}$$

и составляющие базис пространства V_a, на котором действует алгебра $\mathcal{H}_a$. Алгебра $\mathcal{H}^{(n)}$ действует в пространстве $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, базисными элементами которого являются $|x_1, \ldots, x_n\rangle := |x_1\rangle \otimes \cdots \otimes |x_n\rangle$. Введем дуальные состояния $\langle x_a|$ и $\langle k_a|$ такие, что верны соотношения ортогональности и полноты

$$\begin{gathered} \langle x_a|x'_a\rangle = \delta^D(x_a - x'_a), \quad \langle k_a|k'_a\rangle = \delta^D(k_a - k'_a), \\ \int d^D x_a\ |x_a\rangle\langle x_a| = I_a = \int d^D k_a\ |k_a\rangle\langle k_a|, \end{gathered} \tag{5}$$

где I_a — единичный оператор на V_a. Соотношения (3), (4), (5) согласованы, если

$$k^\mu_a \langle x_a|k_a\rangle = \langle x_a|\hat{p}^\mu_a|k_a\rangle = -i\frac{\partial}{\partial x^\mu_a}\langle x_a|k_a\rangle \ \Rightarrow\ \langle x_a|k_a\rangle = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \mathrm{e}^{ik^\mu_a x^\mu_a},$$

где не подразумевается суммирование по повторяющимся индексам a, а нормировочная константа $(2\pi)^{-D/2}$ зафиксирована соотношением (5). Дальше нам понадобятся операторы $(\hat{q}_a)^{-2\alpha} = \left(\sum\limits_{\mu} \hat{q}^\mu_a\, \hat{q}^\mu_a\right)^{-\alpha}$ и $(\hat{p}_a)^{-2\beta} = \left(\sum\limits_{\mu} \hat{p}^\mu_a\, \hat{p}^\mu_a\right)^{-\beta}$ такие, что α и β не обязательно являются целыми числами. Эти операторы можно определить как интегральные операторы, задаваемые интегральными ядрами $\langle x|\,(\hat{q})^{-2\alpha}\,|y\rangle = (x)^{-2\alpha}\,\delta^D(x-y)$ и

$$\begin{gathered}
\langle x|\frac{1}{(\hat{p})^{2\beta}}|y\rangle = \int d^Dk \langle x|\frac{1}{(\hat{p})^{2\beta}}|k\rangle\langle k|y\rangle = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,\frac{\mathrm{e}^{ik(x-y)}}{(k)^{2\beta}} = \frac{a(\beta)}{(x-y)^{2\beta'}}, \\
a(\beta) := \frac{1}{2^{2\beta}\pi^{D/2}}\,\frac{\Gamma(\beta')}{\Gamma(\beta)}, \qquad \beta' := D/2-\beta.
\end{gathered} \tag{6}$$

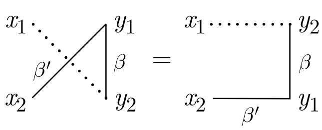
Рассмотрим алгебру $\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$ и введем оператор

$$\hat{Q}^{(\beta)}_{12} := \frac{1}{a(\beta)}\,\mathcal{P}_{12}\,(\hat{p}_1)^{-2\beta}\,(\hat{q}_{12})^{-2\beta}, \tag{7}$$

где $\hat{q}^\mu_{12} = \hat{q}^\mu_1 - \hat{q}^\mu_2$, а $\mathcal{P}_{12}$ — оператор перестановки, действующий по правилу

$$\mathcal{P}_{12}\,\hat{q}_1 = \hat{q}_2\,\mathcal{P}_{12}, \quad \mathcal{P}_{12}\,\hat{p}_1 = \hat{p}_2\,\mathcal{P}_{12}, \quad \mathcal{P}_{12}|x_1,x_2\rangle = |x_2,x_1\rangle, \quad (\mathcal{P}_{12})^2 = I. \tag{8}$$

Мы будем использовать следующее графическое представление для интегрального ядра оператора (7):



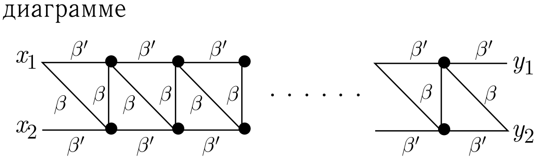
$$= \langle x_1,x_2|\hat{Q}^{(\beta)}_{12}|y_1,y_2\rangle =$$

$$= \frac{1}{a(\beta)}\,\langle x_1,x_2|\,\mathcal{P}_{12}\,(\hat{p}_1)^{-2\beta}\,(\hat{q}_{12})^{-2\beta}\,|y_1,y_2\rangle = \frac{1}{(x_2-y_1)^{2\beta'}\,(y_1-y_2)^{2\beta}}\,\delta^D(x_1-y_2),$$

где

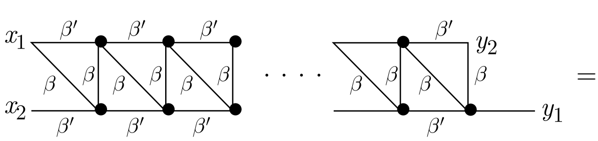
$$x_1 \cdots\cdots x_2 = \delta^D(x_1-x_2), \qquad x_1 \text{———} x_2 = (x_1-x_2)^{-2\beta}.$$

Заметим, что $Q^{(\beta)}_{12}$ является «graph-building» оператором для зигзаг-диаграмм: в случае четного числа петель многократное применение оператора $Q^{(\beta)}_{12}$ приводит к диаграмме



$$= \langle x_1,x_2|(\hat{Q}^{(\beta)}_{12})^{2N}|y_1,y_2\rangle(y_1-y_2)^{2\beta}, \tag{9}$$

в случае нечетного числа петель многократное применение оператора $Q^{(\beta)}_{12}$ приводит к диаграмме

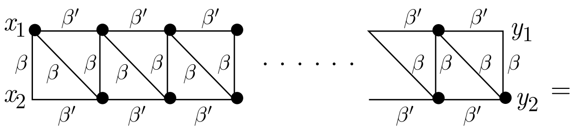


$$= \langle x_1,x_2|(\hat{Q}^{(\beta)}_{12})^{2N+1}|y_1,y_2\rangle(y_1-y_2)^{2\beta}. \tag{10}$$

С помощью жирной точки мы изображаем интегрирование по всему пространству $\mathbb{R}^D$. Отметим, что выражения (9), (10) могут быть интерпретированы как фейнмановские диаграммы для четырехточечной корреляционной функции D-мерной «fishnet» теории [11], а в случае $D = 4$ и $\beta = 1$ как фейнмановские диаграммы для функции Грина скалярной теории поля с взаимодействием ϕ^4.

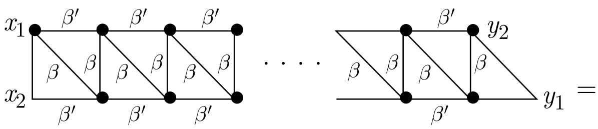
Таким же образом, добавив необходимые пропагаторы и проинтегрировав по двум вершинам, с помощью оператора $Q_{12}^{(\beta)}$ можно построить двухточечную зигзаг-диаграмму:

для четного числа петель



$$= \int d^D x_1 d^D y_2 \frac{\langle x_1, x_2 | (\hat{Q}_{12}^{(\beta)})^{2N} | y_1, y_2 \rangle}{(x_1 - x_2)^{2\beta}} \qquad (11)$$

и для нечетного



$$= \int d^D x_1 d^D y_2 \frac{\langle x_1, x_2 | (\hat{Q}_{12}^{(\beta)})^{2N+1} | y_1, y_2 \rangle}{(x_1 - x_2)^{2\beta}}. \qquad (12)$$

Теперь остается воспользоваться операторными представлениями (9)–(12) для точного вычисления упомянутых серий двухточечных и четырехточечных диаграмм.

2. СИСТЕМА СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА $\hat{Q}_{12}$. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ И ПОЛНОТА

Для нахождения собственных функций оператора (7) рассмотрим трехточечную корреляционную функцию полей $\mathcal{O}_{\Delta_1}$, $\mathcal{O}_{\Delta_2}$ и $\mathcal{O}_{\Delta}^{\mu_1\cdots\mu_n}$ в конформной теории поля. Скалярные поля $\mathcal{O}_{\Delta_1}$ и $\mathcal{O}_{\Delta_2}$ имеют конформные размерности Δ_1 и Δ_2, а тензорное поле $\mathcal{O}_{\Delta}^{\mu_1\cdots\mu_n}$ имеет конформную размерность Δ. Для коррелятора трех таких полей ответ известен с точностью до нормировки

$$u^{\mu_1}\cdots u^{\mu_n}\,\langle \mathcal{O}_{\Delta_1}(y_1)\,\mathcal{O}_{\Delta_2}(y_2)\,\mathcal{O}_{\Delta}^{\mu_1\cdots\mu_n}(y)\rangle = \frac{\left(\dfrac{(u, y-y_1)}{(y-y_1)^2} - \dfrac{(u, y-y_2)}{(y-y_2)^2}\right)^n}{(y_1-y_2)^{2A}(y-y_1)^{2A_1}(y-y_2)^{2A_2}}, \qquad (13)$$

где

$$A = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta + n), \quad A_1 = \frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta - \Delta_2 - n), \quad A_2 = \frac{1}{2}(\Delta_2 + \Delta - \Delta_1 - n).$$

Для того чтобы избежать громоздких формул с тензорными значками, мы используем свертку с вспомогательным комплексным вектором $u \in \mathbb{C}^D$, таким что $(u, u) =$

$u^\mu u^\mu = 0$. Нам нужен частный случай трехточечного коррелятора (13), когда параметры A, A_1, A_2 связаны следующим образом ($\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta \in \mathbb{R}$):

$$\begin{gathered} A = \alpha, \quad A_1 = \alpha' := \frac{D}{2} - \alpha, \quad A_2 = (\alpha+\beta)' = \frac{D}{2} - (\alpha+\beta) \Rightarrow \\ \Delta_1 = \frac{D}{2}, \quad \Delta_2 = \frac{D}{2} - \beta, \quad \Delta = D - 2\alpha - \beta + n. \end{gathered} \tag{14}$$

Выбрав данную параметризацию, мы определим функцию

$$\langle y_1, y_2 | \Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle \ := \ \frac{\left(\dfrac{(u, y-y_1)}{(y-y_1)^2} - \dfrac{(u, y-y_2)}{(y-y_2)^2} \right)^n}{(y_1-y_2)^{2\alpha} (y-y_1)^{2\alpha'} (y-y_2)^{2(\alpha+\beta)'}}, \tag{15}$$

которую, следуя статье [16], будем называть конформным треугольником. Вектор $|\Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle = u^{\mu_1} \cdots u^{\mu_n} |\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\alpha,\beta}(y)\rangle$, определенный в (15), является собственным для оператора (7):

$$\hat{Q}^{(\beta)}_{12} \ |\Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle = \tau(\alpha,\beta,n) \ |\Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle, \tag{16}$$

с собственным числом

$$\tau(\alpha,\beta,n) = (-1)^n \, \frac{\pi^{D/2}\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma((\alpha+\beta)'+n)}{\Gamma(\beta')\Gamma(\alpha'+n)\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{17}$$

Отметим, что по отношению к стандартному эрмитову скалярному произведению

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \int d^D x_1 \, d^D x_2 \, \langle\Psi|x_1,x_2\rangle\langle x_1,x_2|\Phi\rangle = \int d^D x_1 d^D x_2 \, \Psi^*(x_1,x_2) \, \Phi(x_1,x_2) \tag{18}$$

оператор (7) с $\beta \in \mathbb{R}$ является эрмитовым только с точностью до преобразования подобия:

$$\begin{gathered} (\hat{Q}^{(\beta)}_{12})^\dagger = \frac{1}{a(\beta)} \, (\hat{q}_{12})^{-2\beta} \, (\hat{p}_1)^{-2\beta} \, \mathcal{P}_{12} = U \, \hat{Q}^{(\beta)}_{12} \, U^{-1}, \\ U := \mathcal{P}_{12} \, (\hat{q}_{12})^{-2\beta} = (\hat{q}_{12})^{-2\beta} \, \mathcal{P}_{12}. \end{gathered} \tag{19}$$

Таким образом, вместо скалярного произведения (18) естественно использовать новое скалярное произведение

$$\begin{gathered} \langle\overline{\Psi}|\Phi\rangle := \langle\Psi| \, U \, |\Phi\rangle = \int d^D x_1 d^D x_2 \frac{\Psi^*(x_2\,, x_1) \, \Phi(x_1\,, x_2)}{(x_1-x_2)^{2\beta}} \\ (\beta \equiv D - \Delta_1 - \Delta_2), \end{gathered} \tag{20}$$

по отношению к которому оператор (7) будет эрмитовым. В формуле (20) мы определили сопряжение для вектора

$$\langle\overline{\Psi}| := \langle\Psi| \, U = \langle\Psi| \, (\hat{q}_{12})^{-2\beta} \, \mathcal{P}_{12}, \tag{21}$$

где оператор U в (19) играет роль метрики в пространстве $V_1 \otimes V_2$.

Нетрудно проверить, что «graph-building» оператор (7) коммутирует с оператором

$$\hat{\mathsf{D}} = \frac{i}{2}\sum_{a=1}^{2}(\hat{q}_a\hat{p}_a + \hat{p}_a\hat{q}_a) + \frac{1}{2}(y^\mu\,\partial_{y^\mu} + \partial_{y^\mu}\,y^\mu) - \beta, \tag{22}$$

который действует на собственные функции $|\Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle$ следующим образом:

$$\hat{\mathsf{D}}\,|\Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle = \left(2\alpha + \beta - \frac{1}{2}D - n\right)|\Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle. \tag{23}$$

Для вещественного параметра $\beta \in \mathbb{R}$ получаем, что $\hat{\mathsf{D}}^\dagger = -U\,\hat{\mathsf{D}}\,U^{-1}$. Таким образом, оператор $\hat{\mathsf{D}}$ антиэрмитов по отношению к скалярному произведению (20). Соответствующее условие на его собственные числа приводит к следующей общей параметризации параметра α:

$$2(\alpha^* + \alpha) = 2n + D - 2\beta \;\Rightarrow\; \alpha = \frac{1}{2}\,(n + D/2 - \beta) - i\nu, \quad \nu \in \mathbb{R}. \tag{24}$$

Используя введенную параметризацию, получаем следующее выражение для собственного числа (17):

$$\tau(\alpha,\beta,n) = (-1)^n\frac{\pi^{D/2}\Gamma(\beta)\Gamma\left(\frac{D}{4}+\frac{n}{2}-\frac{\beta}{2}+i\nu\right)}{\Gamma(\beta')\Gamma\left(\frac{D}{4}+\frac{n}{2}+\frac{\beta}{2}+i\nu\right)}\,\frac{\Gamma\left(\frac{D}{4}+\frac{n}{2}-\frac{\beta}{2}-i\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{D}{4}+\frac{n}{2}+\frac{\beta}{2}-i\nu\right)} \tag{25}$$

и параметра $\Delta = D/2 + 2i\nu$. В качестве параметра собственной функции удобнее использовать ν вместо α, так что мы введем следующее, альтернативное, обозначение для собственной функции (15)

$$\begin{gathered}|\Psi^{(n,u)}_{\nu,\beta,y}\rangle := |\Psi^{(n,u)}_{\alpha,\beta}(y)\rangle = u^{\mu_1}\cdots u^{\mu_n}|\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\alpha,\beta}(y)\rangle,\\ \Psi^{(n,u)}_{\nu,\beta,y}(x_1\,,x_2) := \langle x_1\,,x_2|\Psi^{(n,u)}_{\nu,\beta,y}\rangle.\end{gathered} \tag{26}$$

Так как собственное число (25) вещественно (инвариантно относительно замены $\nu \to -\nu$), две собственные функции $|\Psi^{(n,u)}_{\nu,\beta,x}\rangle$ и $|\Psi^{(m,v)}_{\lambda,\beta,y}\rangle$, отвечающие разным собственным числам (25) (т. е. $n \neq m$ и $\lambda \neq \pm\nu$), должны быть ортогональны друг другу относительно скалярного произведения (20).

Справедливо следующее соотношение ортогональности для двух конформных треугольников (см. [11, 17–19]):

$$\begin{aligned}\langle\overline{\Psi^{(m,v)}_{\lambda,\beta,y}}|\Psi^{(n,u)}_{\nu,\beta,x}\rangle &= \int d^Dx_1\,d^Dx_2\,\langle\Psi^{(m,v)}_{\lambda,\beta,y}|U|x_1x_2\rangle\langle x_1x_2|\Psi^{(n,u)}_{\nu,\beta,x}\rangle = \\ &= \int d^Dx_1\,d^Dx_2\frac{(\Psi^{(m,v)}_{\lambda,\beta,y}(x_2,x_1))^*\,\Psi^{(n,u)}_{\nu,\beta,x}(x_1,x_2)}{(x_1-x_2)^{2(D-\Delta_1-\Delta_2)}} = \\ &= C_1(n\,,\nu)\,\delta_{nm}\,\delta(\nu-\lambda)\,\delta^D(x-y)\,(u,v)^n + C_2(n\,,\nu)\,\delta_{nm}\,\delta(\nu+\lambda)\times \\ &\times\frac{\left((u,v) - 2\frac{(u,x-y)(v,x-y)}{(x-y)^2}\right)^n}{(x-y)^{2(D/2+2i\nu)}},\end{aligned} \tag{27}$$

где $(u,v) = u^\mu v^\mu$, $\beta = D - \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta_1 - \Delta_2$, а

$$C_1(n,\nu) = \frac{(-1)^n\, 2^{1-n}\, \pi^{3D/2+1}\, n!}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+n\right)\left(\left(\frac{D}{2}+n-1\right)^2+4\nu^2\right)} \frac{\Gamma(2i\nu)\,\Gamma(-2i\nu)}{\Gamma\left(\frac{D}{2}+2i\nu-1\right)\Gamma\left(\frac{D}{2}-2i\nu-1\right)}. \tag{28}$$

Отметим, что коэффициент C_1 не зависит от β и играет роль обратной величины к мере Планшереля, используемой в соотношении полноты. В отличие от C_1, коэффициент C_2 в (27) зависит от β, но он не входит в соотношение полноты, так что явное выражение для него нам не понадобится. Соотношение полноты для набора собственных функций (26) имеет следующий вид (см. [11, 17–19]):

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{d\nu}{C_1(n\,,\nu)} \int d^D x |\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}\rangle\langle\overline{\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}}| =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{d\nu}{C_1(n\,,\nu)} \int d^D x |\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}\rangle\langle\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}|U. \tag{29}$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВУХТОЧЕЧНОЙ И ЧЕТЫРЕХТОЧЕЧНОЙ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ЗИГЗАГ-ДИАГРАММ

Используя ортогональность и полноту системы собственных функций, нетрудно вывести удобные представления для двухточечной и четырехточечной корреляционных функций. Используя разложение единицы (29) в выражениях (9), (10) для четырехточечной корреляционной функции, получаем

$$G_4^{(M)}(x_1,x_2;y_1,y_2) = \langle x_1,x_2|\left(\hat{Q}_{12}^{(\beta)}\right)^M|y_1,y_2\rangle(y_1-y_2)^{2\beta} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{d\nu}{C_1(n,\nu)} \int d^D x\,\langle x_1,x_2|\left(\hat{Q}_{12}^{(\beta)}\right)^M|\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}\rangle\langle\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}|\,U|y_1,y_2\rangle(y_1-y_2)^{2\beta} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty d\nu\, \frac{\left(\tau(\alpha,\beta,n)\right)^M}{C_1(n,\nu)} \int d^D x\,\langle x_1,x_2|\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}\rangle\langle\Psi^{\mu_1\cdots\mu_n}_{\nu,\beta,x}|y_2,y_1\rangle. \tag{30}$$

Интеграл по x в правой части уравнения (30) может быть вычислен в терминах конформных блоков [19–21] (в четырехмерном случае этот интеграл детально рассмотрен в [11]).

Используя выражение для четырехточечной функции $G_4^{(M)}(x_1,x_2;y_1,y_2)$, полученное в (30), можно вывести выражение для двухточечной функции $G_2^{(M)}(x_2,y_1)$

(диаграммы для этих функций представлены в (9)–(12)):

$$G_2^{(M)}(x_2, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\nu \frac{(\tau(\alpha, \beta, n))^M}{C_1(n, \nu)} \times$$
$$\times \int d^D x_1 d^D y_2 \, d^D x \, \frac{\langle x_1, x_2 | \Psi_{\nu,\beta,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n} \rangle \langle \Psi_{\nu,\beta,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n} | y_2, y_1 \rangle}{(x_1 - x_2)^{2\beta} (y_1 - y_2)^{2\beta}} =$$
$$= \frac{1}{(x_2 - y_1)^{2\beta}} \frac{\Gamma(D/2 - 1)}{\Gamma(D-2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n + D - 2)}{2^n \Gamma(n + D/2 - 1)} \int_0^{\infty} d\nu \, \frac{\tau^{M+3}(\alpha, \beta, n)}{C_1(n, \nu)} . \quad (31)$$

При выводе последнего выражения мы использовали следующий интеграл, который может быть вычислен в замкнутом виде:

$$\int d^D x_1 d^D y_2 \, d^D x \frac{\langle x_1, x_2 | \Psi_{\nu,\beta,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n} \rangle \langle \Psi_{\nu,\beta,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n} | y_2, y_1 \rangle}{(x_1 - x_2)^{2\beta} (y_1 - y_2)^{2\beta}} =$$
$$= \frac{(-1)^n \Gamma(n + D - 2) \Gamma(D/2 - 1)}{2^n \Gamma(n + D/2 - 1) \Gamma(D-2)} \frac{\tau^3(\alpha, \beta, n)}{(x_2 - y_1)^{2\beta}}. \quad (32)$$

Рассмотрим частный случай $\beta = 1$ и $D = 4$, так что $\alpha = (n+1)/2 - i\nu$ и ответ для интеграла (32) упрощается:

$$\int d^4 x_1 d^4 y_2 \, d^4 x \, \frac{\langle x_1, x_2 | \Psi_{\nu,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n} \rangle \langle \Psi_{\nu,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n} | y_2, y_1 \rangle}{(x_1 - x_2)^2 (y_1 - y_2)^2} = (-1)^n \frac{(n+1)}{2^n} \, \tau^3(\nu, n) \frac{1}{(x_2 - y_1)^2}, \quad (33)$$

где $\langle x_1, x_2 | \Psi_{\nu,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n} \rangle := \Psi_{\nu,\beta,x}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x_1, x_2)|_{D=4,\beta=1}$ и (см. (25))

$$\tau(\nu, n) := \tau(\alpha, \beta, n)|_{D=4,\beta=1} = \frac{(-1)^n (2\pi)^2}{(1+n)^2 + 4\nu^2}. \quad (34)$$

Коэффициент C_1 в выражении (28) для $D = 4$ также упрощается:

$$C_1(n, \nu) = \frac{\pi^5}{2^{n+3}(1+n)\,\nu^2} \, \tau(\nu, n), \quad (35)$$

так что, подставляя (33)–(35) в (31), получаем

$$G_2^{(M)}(x_2, y_1)|_{D=4,\beta=1} = \frac{(2\pi)^{2(M+2)}}{(x_2 - y_1)^2} \frac{2^3}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(M+1)} (n+1)^2 \int_0^{\infty} d\nu \frac{\nu^2}{((1+n)^2 + 4\nu^2)^{M+2}} =$$
$$= \frac{4\pi^{2M}}{(x_2 - y_1)^2} \, C_M \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n(M+1)} \frac{1}{(n+1)^{2M-1}}, \quad (36)$$

где $C_M = (1/(M+1))\binom{2M}{M}$ — число Каталана. В последнем равенстве (36) мы использовали интеграл

$$\int_0^{+\infty} d\nu \, \frac{\nu^2}{\left(4\nu^2+(1+n)^2\right)^{M+2}} = \frac{1}{2^5(n+1)^{2M+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(M+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(M+2\right)} \tag{37}$$

и тождество

$$\frac{\Gamma\left(M+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(M+2)} = \frac{(2M)!\,\pi}{2^{2M}M!(M+1)!}.$$

Выражение (36) эквивалентно (1), (2). Таким образом, мы воспроизвели результат, предсказанный Бродхарстом и Краймером [1].

В заключение отметим, что в статье [1] мера интегрирования в импульсном пространстве зафиксирована как $(d^4k)/\pi^2$. Таким образом, для расчета M-петлевой диаграммы нам необходимо разделить ответ на $(\pi^2)^M$, что оправдывает выбор нормировочной константы в выражении (2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе показано, что современные методы изучения конформных теорий поля в произвольной размерности могут быть использованы для аналитических вычислений безмассовых фейнмановских диаграмм. Мы считаем, что рассмотренный метод является универсальным для вычисления диаграмм, которые могут быть представлены в виде матричного элемента некоторой степени «graph-building» оператора. В частности, он может быть использован для вычисления корреляционных функций и критических показателей различных конформных теорий поля. Также интересным вопросом остается возможность применения D-мерных результатов для расчета четырехточечных функций (с фермионами), которые возникают в обобщенной «fishnet» модели при двойном скейлинговом пределе γ-деформированной $N=4$ суперсимметричной теории Янга–Миллса.

Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «Базис». Также работа Л. А. Шумилова поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (грант № 075-15-2022-289).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Broadhurst D. J., Kreimer D.* Knots and Numbers in φ^4 Theory to 7 Loops and Beyond // Intern. J. Mod. Phys. C. 1995. V. 6. P. 519–524.
2. *Brown F., Schnetz O.* Single-Valued Multiple Polylogarithms and a Proof of the Zig-Zag Conjecture // J. Number Theor. 2015 V. 148. P. 478–506.
3. *Chetyrkin K. G., Kataev A. L., Tkachov F. V.* New Approach to Evaluation of Multiloop Feynman Integrals: The Gegenbauer Polynomial x-Space Technique// Nucl. Phys. B. 1980. V. 174. P. 345–377.

4. *Chetyrkin K. G., Tkachov F. V.* Integration by Parts: The Algorithm to Calculate Beta Functions in 4 Loops // Nucl. Phys. B. 1981. V. 192. P. 159–204.
5. *Kazakov D. I.* The Method of Uniqueness, a New Powerful Technique for Multiloop Calculation // Phys. Lett. B. 1983. V. 133. P. 406–410.
6. *Kazakov D. I.* Multiloop Calculations: Method of Uniqueness and Functional Equations // Theor. Math. Phys. 1985. V. 62, No. 1. P. 84–89.
7. *Broadhurst D. J.* Massless Scalar Feynman Diagrams: Five Loops and Beyond. Report of the Open Univ. Milton Keynes, UK, 1985. OUT-4102-18.
8. *Ussyukina N. I.* Calculation of Multiloop Diagrams in High Orders of Perturbation Theory // Phys. Lett. B. 1991. V. 267, No. 3. P. 382–388.
9. *Isaev A. P.* Multiloop Feynman Integrals and Conformal Quantum Mechanics // Nucl. Phys. B. 2003. V. 662. P. 461–475.
10. *Isaev A. P.* Operator Approach to Analytical Evaluation of Feynman Diagrams // Phys. At. Nucl. 2008. V. 71. P. 914–924.
11. *Gromov N., Kazakov V., Korchemsky G.* Exact Correlation Functions in Conformal Fishnet Theory // JHEP. 2019. V. 08. P. 123.
12. *Derkachov S., Olivucci E.* Exactly Solvable Magnet of Conformal Spins in Four Dimensions // Phys. Rev. Lett. 2020. V. 125, No. 3. P. 031603.
13. *Derkachov S., Olivucci E.* Exactly Solvable Single-Trace Four Point Correlators in $\chi\mathrm{CFT}_4$ // JHEP. 2021. V. 02. P. 146.
14. *Derkachov S., Kazakov V., Olivucci E.* Basso–Dixon Correlators in Two-Dimensional Fishnet CFT // JHEP. 2019. V. 04. P. 032.
15. *Derkachov S., Ferrando G., Olivucci E.* Mirror Channel Eigenvectors of the d-Dimensional Fishnets // JHEP. 2021. V. 12. P. 174.
16. *Vasiliev A. N., Pismak Y. M., Khonkonen Y. R.* $1/N$ Expansion: Calculation of the Exponent Eta in the Order $1/N^3$ by the Conformal Bootstrap Method // Theor. Math. Phys. 1982. V. 50. P. 127–134.
17. *Dobrev V. K., Mack G., Petkova V. B., Petrova S. G., Todorov I. T.* Harmonic Analysis on the n-Dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Quantum Field Theory // Lect. Notes Phys. 1977. V. 63.
18. *Todorov I. T., Mintchev M. C., Petkova V. B.* Conformal Invariance in Quantum Field Theory. Pisa: Sc. Norm. Sup., 1978.
19. *Dobrev V. K., Petkova V. B., Petrova S. G., Todorov I. T.* Dynamical Derivation of Vacuum Operator Product Expansion in Euclidean Conformal Quantum Field Theory // Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 887.
20. *Dolan F. A., Osborn H.* Conformal Four Point Functions and the Operator Product Expansion // Nucl. Phys. B. 2001. V. 599. P. 459–496.
21. *Dolan F. A., Osborn H.* Conformal Partial Waves and the Operator Product Expansion // Nucl. Phys. B. 2004. V. 678. P. 491–507.

Получено 27 октября 2022 г.