

# ЭФФЕКТ КАЗИМИРА ДЛЯ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК, НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДЫ

*В. Н. Марачевский*<sup>1</sup>

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

В работе рассмотрена теория эффекта Казимира для дифракционных решеток, обсуждается нарушение симметрии при геометрических переходах.

The theory of the Casimir effect for diffraction gratings is considered, and symmetry breaking in geometric transitions is discussed.

PACS: 34.35.+a; 77.22.Ch; 68.65.Pq; 12.20.Ds; 73.22.-f

## ВВЕДЕНИЕ

Эффект Казимира [1, 2] является квантово-полевым флуктуационным эффектом при наличии границ. Потенциал двух нейтральных поляризуемых атомов получен Казимиром и Полдером в рамках квантовой электродинамики [1]. Энергия основного состояния двух идеально проводящих пластин, разделенных вакуумной щелью, вычислена Казимиром [2]. Флуктуационное взаимодействие диэлектрических полупространств, разделенных вакуумной щелью, определяется формулой Лифшица [3, 4]. Новый калибровочно-инвариантный метод вычисления сил Казимира предложен в работе [5]. Исследуются системы с новыми геометриями и материалами [6, 7], включая слои с действием Черна–Саймонса [8, 9] и слои графена с предсказанным сильным температурным эффектом для силы взаимодействия [10].

Теоретические методы, применяемые для вычисления энергии Казимира, рассмотрены в монографиях [11, 12]. Для диэлектрических сред с границами, отличными от плоских, теория рассеяния с использованием матриц отражения впервые применена при вычислении энергии Казимира двух взаимодействующих дифракционных решеток, разделенных вакуумной щелью [13, 14].

Теория рассеяния используется для нахождения сил Казимира в различных системах [15–18].

---

<sup>1</sup>E-mail: maraval@mail.ru; v.marachevsky@spbu.ru

В работах [13, 14] энергия Казимира двух дифракционных решеток с совпадающими периодами, периодических в заданном пространственном направлении, выражена через коэффициенты отражения Рэлея [19]. Экспериментальные исследования эффекта Казимира в системах с дифракционными решетками показали хорошее согласование теории [13, 14] с экспериментальными данными в большинстве проведенных экспериментов. Теоретические расчеты, проведенные в работе [13], согласуются с экспериментальными результатами работы [20] по измерению нормальной силы Казимира в системе сфера – дифракционная решетка с прямоугольным профилем поперечного сечения. В работах [21, 22] проведено сравнение теории и экспериментов по измерению тангенциальной силы Казимира в системе двух дифракционных решеток из золота с совпадающими периодами и синусоидальными профилями. Одна из дифракционных решеток была напечатана на поверхности сферы оригинальным методом с использованием второй решетки, в результате периоды решеток в точности совпали. В работах [21, 22] подтверждена теория работ [13, 14], основанная на коэффициентах Рэлея, и экспериментально исключена теория, основанная на приближении близкой силы [23] и используемой в этом приближении формуле Лифшица для плоских геометрий. В работе [24] исследована нормальная сила Казимира в системе металлическая дифракционная решетка – металлическая сфера. Измерения нормальной силы Казимира между сферой из золота и кремниевой дифракционной решеткой, разделенными вакуумной щелью [25], а также эксперименты по измерению силы Казимира между двумя дифракционными решетками [26, 27] подтверждают теоретический подход, разработанный в [13, 14].

Теория потенциала Казимира–Полдера рассмотрена в работах [5, 28]. Потенциал Казимира–Полдера при наличии дифракционной решетки исследован в работе [29] при рассеянии конденсата атомов рубидия дифракционной решеткой, находящейся во внешнем лазерном поле; проведено сравнение теории и эксперимента. Потенциал отталкивания анизотропного атома дифракционной решеткой рассмотрен в работе [30].

В работе [31] проведены расчеты энергии Казимира в системе двух бесконечных дифракционных решеток при вращении одной из решеток на угол  $\theta$ , обнаружен разрыв энергии при угле  $\theta = 0$  — геометрический переход. Разрыв энергии основного состояния при вращении одной бесконечной решетки относительно другой приводит к гигантскому крутящему моменту в системе двух конечных дифракционных решеток, разделенных вакуумной щелью [31].

В данной работе изложены основные результаты теории эффекта Казимира для двух дифракционных решеток с совпадающими периодами в системах, изображенных на рис. 1 и 2. Используются единицы  $\hbar = c = 1$ .

## ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК ПРИ $\theta = 0$

Рассмотрим две дифракционные решетки с совпадающими периодами в заданном пространственном направлении и трансляционно инвариантные в перпендикулярном направлении, разделенные вакуумной щелью (рис. 1). Предполагается однородная зависимость от диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_i(\omega)$ ,  $i = 1, 2$ , в объеме каждой из решеток, магнитная восприимчивость  $\mu = 1$ . Обозначим матрицу отражения от нижней дифракционной решетки —  $R_{1\text{down}}$ , от верхней дифракционной решетки —  $R_{2\text{up}}$ .

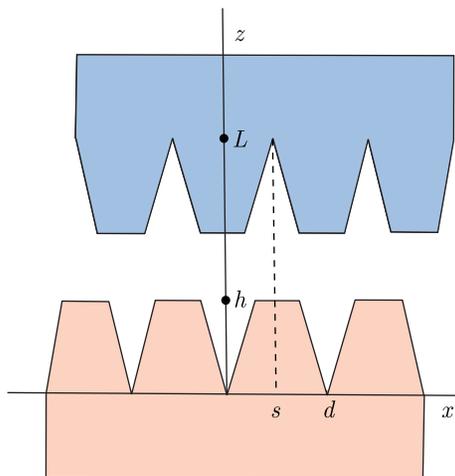


Рис. 1. Дифракционные решетки с совпадающими периодами

Энергия Казимира равняется [13]

$$E(z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\pi/d}^{\pi/d} dk_x \ln \det \left( I - R_{2\text{up}}(i\omega, k_x, k_y) R_{1\text{down}}(i\omega, k_x, k_y) \right). \quad (1)$$

Рассмотрим при  $z > h$  задачи дифракции электромагнитных волн, падающих на нижнюю дифракционную решетку при отсутствии верхней решетки (фактор  $\exp(-i\omega t + ik_y y)$  опущен):

$$E_y^{(p)}(x, z) = I_p^{(e)} \exp(i\alpha_p x - i\beta_p^{(1)} z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{np}^{(e)} \exp(i\alpha_n x + i\beta_n^{(1)} z), \quad (2)$$

$$H_y^{(p)}(x, z) = I_p^{(m)} \exp(i\alpha_p x - i\beta_p^{(1)} z) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_{np}^{(m)} \exp(i\alpha_n x + i\beta_n^{(1)} z). \quad (3)$$

Здесь  $R_{np}^{(e)}, R_{np}^{(m)}$  — коэффициенты Рэлея для двух различных поляризаций падающей электромагнитной волны,  $\alpha_p = k_x + 2\pi p/d$ ,  $\beta_p^{(1)2} = \omega^2 - k_y^2 - \alpha_p^2$ ,  $d$  — период дифракционной решетки,  $k_x \in [-\pi/d, \pi/d]$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Матрица отражения от нижней дифракционной решетки  $R_{1\text{down}}$  записывается в базисе решений (2), (3) в виде

$$R_{1\text{down}} = \begin{pmatrix} R_{n_1 l_1}^{(e)} (I_p^{(e)} = \delta_{pl_1}, I_p^{(m)} = 0) & R_{n_2 l_2}^{(e)} (I_p^{(e)} = 0, I_p^{(m)} = \delta_{pl_2}) \\ R_{n_3 l_3}^{(m)} (I_p^{(e)} = \delta_{pl_3}, I_p^{(m)} = 0) & R_{n_4 l_4}^{(m)} (I_p^{(e)} = 0, I_p^{(m)} = \delta_{pl_4}) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

При проведении расчетов необходимо учитывать конечное число членов разложений (2), (3), взятых симметрично относительно  $n = 0$ . Матрица (4) будет иметь порядок  $2(2N + 1)$ , где  $N$  — конечное число, ограничивающее число рассматриваемых членов разложений Рэлея (2), (3), обеспечивающее сходимость выражения для энергии Казимира (1) с нужной степенью точности.

При совпадающих материалах и профилях поперечного сечения верхней и нижней дифракционных решеток матрицу отражения  $R_{2up}$  для волн, отраженных от верхней дифракционной решетки, удобно получить заменой координат  $z = L - z'$ ,  $y = -y'$ ,  $x = x' - s$  (см. рис. 1) в решениях (2), (3) для волн, отраженных от нижней дифракционной решетки:

$$R_{2up}(i\omega, k_x, k_y) = Q^* K R_{1down}(i\omega, k_x, -k_y) K Q, \quad (5)$$

$$K = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

с матричными элементами  $\exp\left(-L\sqrt{\omega^2 + k_y^2 + (k_x + ((2\pi p)/d))^2}\right)$ ,  $p = -N \dots N$  на главной диагонали матрицы  $G_1$ ,

$$Q = \begin{pmatrix} G_2 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

с матричными элементами  $\exp(2\pi i q s/d)$ ,  $q = -N \dots N$  на главной диагонали матрицы  $G_2$ .

## ВРАЩЕНИЕ ДИФРАКЦИОННЫХ РЕШЕТОК И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДЫ

Рассмотрим поворот одной из дифракционных решеток вокруг оси  $z$  на угол  $\theta$  (рис. 2). Векторы обратной решетки полученной 2D-системы, связанные между собой при дифракции электромагнитных волн от нижней и верхней решеток, записываются в виде  $\mathbf{k}_{nm} = \mathbf{k} + ((2\pi)/d)(n\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_u)$ , где  $n, m \in Z$  [32].

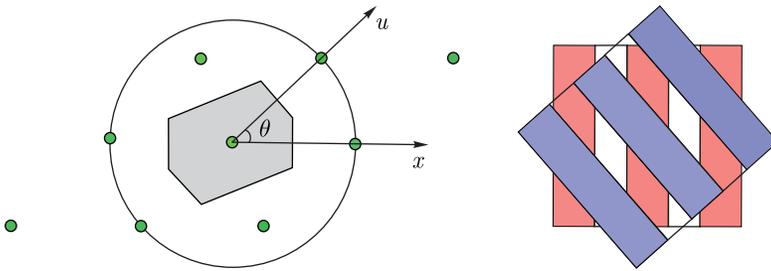


Рис. 2. Система из двух дифракционных решеток, разделенных вакуумом, одна из которых повернута на угол  $\theta$  относительно другой, изображена в правой части рисунка. В левой части рисунка изображено обратное векторное пространство для данной системы: первая зона Бриллюэна изображена серым цветом, показаны векторы обратной решетки  $((2\pi)/d)(n\mathbf{e}_x + m\mathbf{e}_u)$ ,  $n = [-1, 0, 1]$ ,  $m = [-1, 0, 1]$ , связанные при дифракции

Энергия Казимира двух бесконечных дифракционных решеток определяется коэффициентами отражения Рэлея для 1D-систем, содержащихся в матрицах отражения  $R_1, R_2$  порядка  $2(2N + 1)^2$ , интеграл в обратном векторном пространстве берется по первой зоне Бриллюэна:

$$E(z, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} d\omega \int_{BZ} dk_x dk_y \ln \det \left( I - R_2(i\omega, k_x, k_y) R_1(i\omega, k_x, k_y) \right). \quad (8)$$

Матрицы отражения от нижней и верхней дифракционных решеток  $R_1$  и  $R_2$  в рассматриваемом случае 2D-системы связывают между собой векторы обратного векторного пространства, отличающиеся друг от друга на векторы  $((2\pi)/d)n\mathbf{e}_x$  и  $((2\pi)/d)m\mathbf{e}_y$  соответственно, где  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

Сравним случай 2D-системы (8) с рассмотренным ранее случаем 1D-системы (1). Для этого рассмотрим волновые векторы обратного векторного пространства, связанные между собой дифракцией в 1D-системе (при этом  $\theta = 0$ ):  $\mathbf{k}_n = \mathbf{k} + ((2\pi n)/d)\mathbf{e}_x$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Векторы первой зоны Бриллюэна, по которой берется интеграл в (1), принадлежат полосе обратного векторного пространства  $k_x \in [-\pi/d, \pi/d]$ ,  $k_y \in (-\infty, +\infty)$ .

Следствием нарушения трансляционной инвариантности вдоль оси  $y$  при вращении бесконечной дифракционной решетки на угол  $\theta$  является нарушение симметрии для векторов обратного векторного пространства. В то время как для 1D-системы ( $\theta = 0$ ) компонента  $k_y$  волнового вектора сохраняется в любом процессе рассеяния, данный закон сохранения перестает выполняться при любом конечном угле  $\theta$ , так как в 2D-системе ( $\theta > 0$ ) при изменении порядка дифракции  $m$  меняются компоненты  $k_x$  и  $k_y$  волнового вектора.

При переходе от 1D-системы ( $\theta = 0$ ) к 2D-системе ( $\theta > 0$ ) первая зона Бриллюэна переходит скачком из полосы в зону конечной площади (см. рис. 2), стремящейся к нулю при  $\theta \rightarrow 0$ . Таким образом, разрыв площади первой зоны Бриллюэна имеет место при  $\theta = 0$ .

Следствием нарушения сохранения компоненты волнового вектора  $k_y$  при повороте на конечный угол  $\theta$  и фундаментальной перестройки обратного векторного пространства при переходе от  $\theta = 0$  к конечным  $\theta$  является 1D–2D геометрический переход — разрыв энергии Казимира при угле вращения  $\theta = 0$  в системе двух бесконечных дифракционных решеток с совпадающими периодами [31]. В системе из двух конечных квадратных и круглых дифракционных 1D-решеток крутящий момент  $\tau = -\partial E(z, \theta)/\partial \theta$  принимает сколь угодно большие значения при одновременном увеличении размеров дифракционных решеток (размер характеризуется числом периодов конечной дифракционной решетки  $ld$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ) [31].

Предсказанный эффект может представлять значительный интерес в связи с новым механизмом нарушения симметрии и возможностью проявления данного механизма в различных физических системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантом Российского научного фонда (проект РНФ № 22-13-00151). Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Casimir H. B. G., Polder D.* The Influence of Retardation on the London–van der Waals Forces // *Phys. Rev.* 1948. V. 73. P. 360–372.
2. *Casimir H. B. G.* On the Attraction between Two Perfectly Conducting Plates // *Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. B.* 1948. V. 51. P. 793–795.
3. *Lifshitz E. M.* The Theory of Molecular Attractive Forces between Solids // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 1955. V. 29. P. 94–110.
4. *Nesterenko V. V., Pirozhenko I. G.* Lifshitz Formula by a Spectral Summation Method // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86. 052503.
5. *Marachevsky V. N., Sidelnikov A. A.* Green Functions Scattering in the Casimir Effect // *Universe.* 2021. V. 7. 195.
6. *Rodriguez A., Capasso F., Johnson S.* The Casimir Effect in Microstructured Geometries // *Nat. Photon.* 2011. V. 5. P. 211–221.
7. *Woods L. M., Krüger M., Dodonov V. V.* Perspective on Some Recent and Future Developments in Casimir Interactions // *Appl. Sci.* 2021. V. 11. 293.
8. *Marachevsky V. N., Pis'mak Y. M.* Casimir–Polder Effect for a Plane with Chern–Simons Interaction // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. 065005.
9. *Marachevsky V. N.* Casimir Effect for Chern–Simons Layers in the Vacuum // *Theor. Math. Phys.* 2017. V. 190. P. 315–320.
10. *Fialkovsky I. V., Marachevsky V. N., Vassilevich D. V.* Finite-Temperature Casimir Effect for Graphene // *Phys. Rev. B.* 2011. V. 84. 035446.
11. *Fursaev D., Vassilevich D.* Operators, Geometry and Quanta: Methods of Spectral Geometry in Quantum Field Theory. Dordrecht: Springer, 2011.
12. *Bordag M., Klimchitskaya G. L., Mohideen U., Mostepanenko V. M.* Advances in the Casimir Effect. Oxford Univ. Press, 2015.
13. *Lambrecht A., Marachevsky V. N.* Casimir Interaction of Dielectric Gratings // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. 160403.
14. *Lambrecht A., Marachevsky V. N.* Theory of the Casimir Effect in One-Dimensional Periodic Dielectric Systems // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2009. V. 24. P. 1789–1795.
15. *Emig T., Jaffe R. L., Kardar M., Scardicchio A.* Casimir Interaction between a Plate and a Cylinder // *Phys. Rev. Lett.* 2006. V. 96. 080403.
16. *Rahi S. J., Emig T., Graham N., Jaffe R. L., Kardar M.* Scattering Theory Approach to Electromagnetic Casimir Forces // *Phys. Rev. D.* 2009. V. 80. 085021.
17. *Canaguier-Durand A., Maia Neto P. A., Cervero-Pelaez I., Lambrecht A., Reynaud S.* Casimir Interaction between Plane and Spherical Metallic Surfaces // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. 230404.
18. *Bordag M., Pirozhenko I.* Vacuum Energy between a Sphere and a Plane at Finite Temperature // *Phys. Rev. D.* 2010. V. 81. 085023.
19. *Rayleigh O. M.* On the Dynamical Theory of Gratings // *Proc. Roy. Soc. A.* 1907. V. 79. P. 399–415.
20. *Chan H. B., Bao Y., Zou J., Cirelli R. A., Klemens F., Mansfield W., Pai C.* Measurement of the Casimir Force between a Gold Sphere and a Silicon Surface with Nanoscale Trench Arrays // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. 030401.
21. *Chiu H.-C., Klimchitskaya G. L., Marachevsky V. N., Mostepanenko V. M., Mohideen U.* Demonstration of the Asymmetric Lateral Casimir Force between Corrugated Surfaces in the Nonadditive Regime // *Phys. Rev. B.* 2009. V. 80. 121402(R).
22. *Chiu H.-C., Klimchitskaya G. L., Marachevsky V. N., Mostepanenko V. M., Mohideen U.* Lateral Casimir Force between Sinusoidally Corrugated Surfaces: Asymmetric Profiles,

- Deviations from the Proximity Force Approximation, and Comparison with Exact Theory // *Phys. Rev. B*. 2010. V. 81. 115417.
23. *Derjaguin B. V., Abrikosova I. I., Lifshitz E. M.* Direct Measurement of Molecular Attraction between Solids Separated by a Narrow Gap // *Q. Rev.* 1956. V. 10. P. 295–329.
  24. *Intravaia F., Koev S., Jung I. W., Talin A. A., Davids P. S., Decca R. S., Aksyuk V. A., Dalvit D. A. R., López D.* Strong Casimir Force Reduction through Metallic Surface Nanostructuring // *Nat. Commun.* 2013. V. 4. 2515.
  25. *Bao Y., Guérout R., Lussange J., Lambrecht A., Cirelli R. A., Klemens F., Mansfield W. M., Pai C. S., Chan H. B.* Casimir Force on a Surface with Shallow Nanoscale Corrugations: Geometry and Finite Conductivity Effects // *Phys. Rev. Lett.* 2010. V. 105. 250402.
  26. *Tang L., Wang M., Ng C. Y., Nikolic M., Chan C. T., Rodriguez A. W., Chan H. B.* Measurement of Non-Monotonic Casimir Forces between Silicon Nanostructures // *Nat. Photon.* 2017. V. 11. P. 97–101.
  27. *Wang M., Tang L., Ng C. Y., Messina R., Guizal B., Crosse J. A., Antezza M., Chan C. T., Chan H. B.* Strong Geometry Dependence of the Casimir Force between Interpenetrated Rectangular Gratings // *Nat. Commun.* 2021. V. 12. 600.
  28. *Buhmann S. Y.* Dispersion Forces. Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. V. I–II.
  29. *Bender H., Stehle C., Zimmermann C., Slama S., Fiedler J., Scheel S., Buhmann S. Y., Marachevsky V. N.* Probing Atom-Surface Interactions by Diffraction of Bose–Einstein Condensates // *Phys. Rev. X*. 2014. V. 4. 011029.
  30. *Buhmann S. Y., Marachevsky V. N., Scheel S.* Impact of Anisotropy on the Interaction of an Atom with a One-Dimensional Nano-Grating // *Intern. J. Mod. Phys. A*. 2016. V. 31. 1641029.
  31. *Antezza M., Chan H. B., Guizal B., Marachevsky V. N., Messina R., Wang M.* Giant Casimir Torque between Rotated Gratings and the  $\theta = 0$  Anomaly // *Phys. Rev. Lett.* 2020. V. 124. 013903.
  32. *Guérout R., Genet C., Lambrecht A., Reynaud S.* Casimir Torque between Nanostructured Plates // *Europhys. Lett.* 2015. V. 111. 44001.

Получено 27 октября 2022 г.