

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РЕДУКЦИИ ОДНОПЕТЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АМПЛИТУД С ЧЕТЫРЬМЯ ВНЕШНИМИ ФОТОНАМИ

*О. В. Тарасов*¹

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Метод функциональной редукции для фейнмановских интегралов, предложенный автором, применен для вычисления однопетлевых интегралов, соответствующих диаграммам с четырьмя внешними линиями. Рассмотрены интегралы, возникающие в расчетах радиационных поправок к амплитудам рассеяния света на свете, расщепления фотона во внешнем поле, а также дельбрюкковского рассеяния. Для произвольного значения размерности пространства d получены новые аналитические результаты для мастерских интегралов. Для этих интегралов при $d = 4$ приведены компактные формулы в терминах дилогарифмов.

The method for functional reduction of Feynman integrals, proposed by the author, is used to calculate one-loop integrals corresponding to diagrams with four external lines. The integrals that emerge from amplitudes for the scattering of light by light, the photon splitting in an external field and Delbrück scattering are considered. For master integrals in d -dimensions, new analytic results are presented. For $d = 4$, these integrals are given by compact expressions in terms of dilogarithms.

PACS: 11.15.Bt; 11.10.Gh; 11.15.Kc

ВВЕДЕНИЕ

В недавней публикации [1] нами был предложен метод функциональной редукции однопетлевых фейнмановских интегралов с произвольными массами и произвольными внешними импульсами. В настоящей статье мы опишем применение этого метода к вычислению однопетлевых интегралов, которые необходимы для вычисления радиационных поправок к физическим процессам. В качестве примера мы выбрали интегралы, встречающиеся при вычислении радиационных поправок к процессам рассеяния света на свете, расщепления фотона во внешнем поле, а также дельбрюкковскому рассеянию. Самые первые вычисления радиационных поправок к этим процессам рассмотрены в работах [2–6]. Поправки к амплитуде расщепления фотона во внешнем

¹E-mail: otarasov@jinr.ru

поле исследованы в работах [7, 8]. Радиационные поправки с учетом электрослабых взаимодействий рассмотрены в работах [9, 10].

Эксперименты по изучению рассеяния света на свете составляют важную часть программы исследований на LHC. Основными экспериментами, в которых исследуется данный процесс, являются эксперименты по столкновению ионов свинца. Первые результаты этих экспериментов представлены в работах [11, 12].

Мы рассмотрим класс интегралов, возникающих при вычислении амплитуд с четырьмя внешними фотонами. Отметим, что такого типа интегралы могут быть использованы и для других процессов, а также при вычислении диаграмм с пятью и более внешними линиями, для которых возможна редукция к интегралам рассматриваемого нами класса.

1. ИНТЕГРАЛЫ И ФОРМУЛА ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ РЕДУКЦИИ

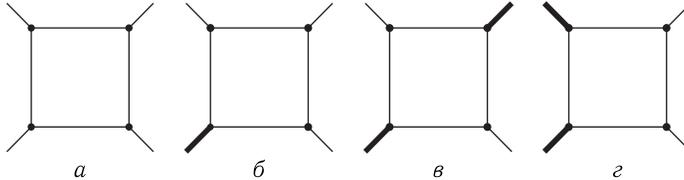
В настоящей работе мы рассмотрим вычисление интегралов вида

$$I_4^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2; s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{14}, s_{24}, s_{13}) = \frac{1}{i\pi^{d/2}} \int \frac{d^d k_1}{P_1 P_2 P_3 P_4}, \quad (1.1)$$

где

$$P_i = (k_1 - p_i)^2 - m_i^2 + i\epsilon, \quad s_{ij} = (p_i - p_j)^2. \quad (1.2)$$

В дальнейшем мы будем опускать малую мнимую добавку $i\epsilon$, подразумевая что все массы ее содержат. На рисунке приведены диаграммы, соответствующие интегралам, которые будут нами рассмотрены.



Диаграммы, соответствующие рассеянию света на свете, расщеплению фотона и дельбрюкковскому рассеянию. Толстые линии соответствуют фотонам вне массовой оболочки

При вычислении интеграла $I_4^{(d)}$ нам также потребуются интегралы с меньшим числом пропагаторов

$$I_3^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2; s_{23}, s_{13}, s_{12}) = \frac{1}{i\pi^{d/2}} \int \frac{d^d k_1}{P_1 P_2 P_3}, \quad (1.3)$$

$$I_2^{(d)}(m_1^2, m_2^2; s_{12}) = \frac{1}{i\pi^{d/2}} \int \frac{d^d k_1}{P_1 P_2}, \quad (1.4)$$

$$I_1^{(d)}(m_1^2) = \frac{1}{i\pi^{d/2}} \int \frac{d^d k_1}{P_1}. \quad (1.5)$$

Формула функциональной редукции интеграла $I_4^{(d)}$ с произвольными массами и кинематическими переменными [1] может быть представлена в виде

$$I_4^{(d)}(m_1^2, m_2^2, m_3^2, m_4^2; s_{12}, s_{23}, s_{34}, s_{14}, s_{24}, s_{13}) = \sum_{k=1}^{24} Q_k B_4^{(d)}(R_1^{(k)}, R_2^{(k)}, R_3^{(k)}, R_4^{(k)}), \quad (1.6)$$

где $R_j^{(k)}$ являются отношениями модифицированного детерминанта Кэйли к детерминанту Грама, Q_k — произведения отношений полиномов от масс и кинематических переменных s_{ij} . Функция $B_4^{(d)}$ определена следующим образом:

$$\begin{aligned} B_4^{(d)}(R_1, R_2, R_3, R_4) &= \\ &= I_4^{(d)}(R_1, R_2, R_3, R_4; R_2 - R_1, R_3 - R_2, R_4 - R_3, R_4 - R_1, R_4 - R_2, R_3 - R_1) = \\ &= \Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) R_1^{d/2-4} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x_1^2 x_2 h_4^{d/2-4} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (1.7) \\ h_4 &= 1 - z_1 x_1^2 - z_2 x_1^2 x_2^2 - z_3 x_1^2 x_2^2 x_3^2. \end{aligned}$$

Переменные z_j являются простыми комбинациями из R_i :

$$z_1 = 1 - \frac{R_2}{R_1}, \quad z_2 = \frac{R_2 - R_3}{R_1}, \quad z_3 = \frac{R_3 - R_4}{R_1}. \quad (1.8)$$

Явная формула для функциональной редукции интеграла $I_4^{(d)}$ представлена в работе [1].

2. ИНТЕГРАЛ $I_4^{(d)}$ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ СВЕТА НА СВЕТЕ

Интеграл, требующийся для вычисления амплитуды рассеяния света на свете, соответствует следующим значениям кинематических переменных и масс:

$$s_{12} = s_{23} = s_{34} = s_{14} = 0, \quad m_j^2 = m^2, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (2.1)$$

Воспользовавшись для данной кинематики конечной формулой функциональной редукции для интеграла $I_4^{(d)}$, приведенной в работе [1], мы получили

$$I_4^{(d)}(m^2, m^2, m^2, m^2; 0, 0, 0, 0, s_{24}, s_{13}) = \frac{\tilde{s}_{13}}{(\tilde{s}_{24} + \tilde{s}_{13})} L^{(d)}(\tilde{s}_{13}, M_2^2, m^2) + \frac{\tilde{s}_{24}}{(\tilde{s}_{24} + \tilde{s}_{13})} L^{(d)}(\tilde{s}_{24}, M_2^2, m^2), \quad (2.2)$$

где

$$L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = I_4^{(d)}(m^2 - M_2^2, m^2, m^2 - \tilde{s}_{ij}, m^2; M_2^2, -\tilde{s}_{ij}, \tilde{s}_{ij}, M_2^2, 0, M_2^2 - \tilde{s}_{ij}), \quad (2.3)$$

$$M_2^2 = \frac{\tilde{s}_{24}\tilde{s}_{13}}{(\tilde{s}_{24} + \tilde{s}_{13})}, \quad \tilde{s}_{ij} = \frac{s_{ij}}{4}. \quad (2.4)$$

Полученная формула выражает интеграл $I_4^{(d)}$, зависящий от трех переменных в терминах интегралов, также зависящих от трех переменных. Однако вычисление интеграла $L^{(d)}$ проще, чем вычисление исходного интеграла. Мы рассмотрим разные методы вычисления $L^{(d)}$.

Оказалось, что проще всего найти $L^{(d)}$ как решение рекуррентного уравнения по размерности пространства-времени d . Такое уравнение для интеграла $L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2)$ имеет вид [1]

$$(d-3)L^{(d+2)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = -2m_0^2 L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) - I_3^{(d)}(m^2; \tilde{s}_{ij}), \quad (2.5)$$

где

$$I_3^{(d)}(m^2; \tilde{s}_{ij}) = I_3^{(d)}(m^2, m^2 - \tilde{s}_{ij}, m^2; \tilde{s}_{ij}, 0, -\tilde{s}_{ij}), \quad (2.6)$$

$$m_0^2 = m^2 - M_2^2. \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.5) может быть представлено в виде

$$L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = \frac{(m_0^2)^{d/2} c_4^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2)}{\Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right) \sin \frac{\pi d}{2}} - \frac{1}{2m_0^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{d-3}{2}\right)_r}{(-m_0^2)^r} I_3^{(d+2r)}(m^2; \tilde{s}_{ij}), \quad (2.8)$$

где $c_4^{(d+2)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = c_4^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2)$ является произвольной периодической функцией параметра d . С использованием метода, предложенного в [13], для интеграла $I_3^{(d)}(m^2; \tilde{s}_{ij})$ было найдено простое функциональное соотношение

$$I_3^{(d)}(m^2; \tilde{s}_{ij}) = I_3^{(d)}(m^2, m^2, m^2; 4\tilde{s}_{ij}, 0, 0), \quad (2.9)$$

которое сводит этот интеграл к хорошо известному результату [14]

$$I_3^{(d)}(m^2; \tilde{s}_{ij}) = -\frac{(m^2)^{d/2-3}}{2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1, 1, 3 - \frac{d}{2}; \\ 2, \frac{3}{2}; \end{matrix} \frac{s_{ij}}{4m^2}\right]. \quad (2.10)$$

Функцию $c_4^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2)$ найдем как решение дифференциального уравнения, которое может быть получено, например, из дифференциального уравнения по переменной

\tilde{s}_{ij} для интеграла $L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2)$:

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{ij} \frac{\partial}{\partial \tilde{s}_{ij}} L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = & -L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) + \\ & + \frac{(d-3)}{8(M_2^2 - \tilde{s}_{ij})(M_2^2 - m^2)} I_2^{(d)}(m^2 - M_2^2, m^2; M_2^2) - \\ & - \frac{(d-3)}{8(M_2^2 - \tilde{s}_{ij})(\tilde{s}_{ij} - m^2)} I_2^{(d)}(m^2 - \tilde{s}_{ij}, m^2; \tilde{s}_{ij}) + \\ & + \frac{(d-2)}{16m^2(\tilde{s}_{ij} - m^2)(M_2^2 - m^2)} I_1^{(d)}(m^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Данное уравнение получено в предположении, что \tilde{s}_{ij} и M_2^2 являются независимыми переменными. Подставив решение (2.8) в уравнение (2.11), получаем простое дифференциальное уравнение

$$\tilde{s}_{ij} \frac{\partial c_4^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2)}{\partial \tilde{s}_{ij}} + c_4^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = 0. \quad (2.12)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$c_4^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = \frac{\tilde{c}_4^{(d)}(M_2^2, m^2)}{\tilde{s}_{ij}}, \quad (2.13)$$

где $\tilde{c}_4^{(d)}(M_2^2, m^2)$ — константа интегрирования дифференциального уравнения (2.12). Используя граничное значение $L^{(d)}$ для $\tilde{s}_{ij} = 0$, получаем

$$c_4^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = 0. \quad (2.14)$$

Гипергеометрическая функция из уравнения (2.10) может быть записана в виде [15]

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left[\begin{matrix} 1, 1, 3 - \frac{d}{2}; \\ 2, \frac{3}{2}; \end{matrix} x \right] = \\ = \frac{-\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{x\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right)} \int_0^1 dz z^{(2-d)/2} (1-z)^{(d-5)/2} \ln(1-xz). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Воспользовавшись этим представлением, из уравнения (2.8) с учетом (2.14) получаем

$$L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = -\frac{\pi^{1/2}(m^2)^{d/2-3}}{8\tilde{s}_{ij}\Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right)} \int_0^1 \frac{dz z^{2-d/2} (1-z)^{(d-5)/2}}{1 - z \frac{M_2^2}{m^2}} \ln\left(1 - z \frac{\tilde{s}_{ij}}{m^2}\right). \quad (2.16)$$

Подставив это выражение в уравнение (2.2), имеем

$$I_4^{(d)}(m^2, m^2, m^2, m^2; 0, 0, 0, 0, s_{24}, s_{13}) = -\frac{\pi^{1/2}(m^2)^{d/2-3}}{2(s_{24} + s_{13}) \Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right)} \times \\ \times \int_0^1 \frac{dz z^{2-d/2}(1-z)^{(d-5)/2}}{1 - z \frac{M_2^2}{m^2}} \left[\ln\left(1 - z \frac{s_{13}}{4m^2}\right) + \ln\left(1 - z \frac{s_{24}}{4m^2}\right) \right]. \quad (2.17)$$

Это наиболее простое известное до сих пор представление для этого интеграла. Отметим, что для $d = 4$ в работе [16] этот интеграл был получен в терминах гипергеометрической функции Аппеля F_3 , которая выражается в виде двукратного интеграла.

Представление (2.16) удобно для разложения в ряд по $\varepsilon = (4 - d)/2$. Для $d = 4$ имеем

$$L^{(4)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = \\ = \frac{-1}{8M_2^2 s_{ij} \beta_2} \left[\ln^2 \frac{\beta_{ij} + 1}{\beta_2 - \beta_{ij}} - \frac{1}{2} \ln^2 \frac{\beta_2 - \beta_{ij}}{\beta_2 + \beta_{ij}} - \ln \frac{\beta_{ij} - 1}{\beta_{ij} + 1} \ln \frac{\beta_2 - \beta_{ij}}{\beta_2 + \beta_{ij}} + \right. \\ \left. + \frac{\pi^2}{3} + 2\text{Li}_2\left(\frac{\beta_{ij} - \beta_2}{\beta_{ij} + 1}\right) - 2\text{Li}_2\left(\frac{\beta_{ij} - 1}{\beta_2 + \beta_{ij}}\right) + \text{Li}_2\left(\frac{\beta_{ij}^2 - 1}{\beta_{ij}^2 - \beta_2^2}\right) \right], \quad (2.18)$$

где

$$\beta_{ij} \equiv \sqrt{1 - \frac{m^2}{\tilde{s}_{ij}}} \quad (ij = 13, 24), \quad \beta_2 \equiv \sqrt{1 - \frac{m^2}{M_2^2}}. \quad (2.19)$$

Воспользовавшись (2.18), из уравнения (2.2) получаем

$$I_4^{(4)}(m^2, m^2, m^2, m^2; 0, 0, 0, 0, s_{24}, s_{13}) = \\ = \frac{1}{8\tilde{s}_{13}\tilde{s}_{24}\beta_2} \left\{ 2 \ln^2 \left(\frac{\beta_2 + \beta_{13}}{\beta_2 + \beta_{24}} \right) + \ln \left(\frac{\beta_2 - \beta_{13}}{\beta_2 + \beta_{13}} \right) \ln \left(\frac{\beta_2 - \beta_{24}}{\beta_2 + \beta_{24}} \right) - \frac{\pi^2}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{i=13,24} \left[2\text{Li}_2 \left(\frac{\beta_i - 1}{\beta_2 + \beta_i} \right) - 2\text{Li}_2 \left(-\frac{\beta_2 - \beta_i}{\beta_i + 1} \right) - \ln^2 \left(\frac{\beta_i + 1}{\beta_2 + \beta_i} \right) \right] \right\}. \quad (2.20)$$

В сумме двух $L^{(d)}$ третьи слагаемые с Li_2 из (2.18) сократились. Выражение (2.20) согласуется с результатом, полученным в работе [16].

Функция $L^{(d)}$ может быть получена как решение уравнения (2.11). Для $d = 4$ решение этого уравнения имеет вид

$$L^{(4)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2) = \frac{1}{8s_{ij}M_2^2\beta_2} [F(y_{ij}, y_2) - 2\text{Li}_2(1 - y_2)], \quad (2.21)$$

где

$$F(y_{ij}, y_k) = \text{Li}_2(1 - y_{ij}y_k) + \text{Li}_2\left(1 - \frac{y_k}{y_{ij}}\right) + \frac{1}{2} \ln^2 y_{ij}, \quad (2.22)$$

$$y_{ij} = \frac{\beta_{ij} - 1}{\beta_{ij} + 1}, \quad y_2 = \frac{\beta_2 - 1}{\beta_2 + 1}. \quad (2.23)$$

Отметим, что выражение (2.21) инвариантно как относительно замены $y_{ij} \rightarrow 1/y_{ij}$, так и замены $y_2 \rightarrow 1/y_2$.

Подставив (2.21) в формулу (2.2), получаем

$$I_4^{(d)}(m^2, m^2, m^2, m^2; 0, 0, 0, 0, s_{24}, s_{13}) = \frac{1}{2s_{13}s_{24}\beta_2} [F(y_{13}, y_2) + F(y_{24}, y_2) - 4\text{Li}_2(1 - y_2)]. \quad (2.24)$$

Представления $L^{(d)}(\tilde{s}_{ij}, M_2^2, m^2)$ в виде рядов по различным отношениям кинематических переменных могут быть получены из интегрального представления (1.7).

3. ИНТЕГРАЛ $I_4^{(d)}$ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ФОТОНА

Рассмотрим теперь интеграл с одной внешней линией вне массовой оболочки, соответствующий диаграмме b на рисунке. Этот интеграл соответствует кинематике

$$s_{23} = s_{34} = s_{14} = 0, \quad m_i^2 = m^2. \quad (3.1)$$

Воспользовавшись конечной формулой функциональной редукции $I_4^{(d)}$ из работы [1], получаем

$$(s_{12} - s_{24} - s_{13})I_4^{(d)}(m^2, m^2, m^2, m^2, s_{12}, 0, 0, 0, s_{24}, s_{13}) = s_{12}L^{(d)}(\tilde{s}_{12}, M_3^2, m^2) - s_{13}L^{(d)}(\tilde{s}_{13}, M_3^2, m^2) - s_{24}L^{(d)}(\tilde{s}_{24}, M_3^2, m^2), \quad (3.2)$$

где

$$M_3^2 = \frac{s_{24}s_{13}}{4(s_{13} + s_{24} - s_{12})}. \quad (3.3)$$

Для $d = 4$ имеем

$$I_4^{(4)}(m^2, m^2, m^2, m^2, s_{12}, 0, 0, 0, s_{24}, s_{13}) = \frac{F(y_{13}, y_3) + F(y_{24}, y_3) - F(y_{12}, y_3) - 2\text{Li}_2(1 - y_3)}{2s_{24}s_{13}\beta_3}, \quad (3.4)$$

где

$$y_3 = \frac{\beta_3 - 1}{\beta_3 + 1}, \quad \beta_3 = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M_3^2}}. \quad (3.5)$$

4. ИНТЕГРАЛЫ $I_4^{(d)}$ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ ДЕЛЬБРЮКОВСКОГО РАССЕЯНИЯ

Аналогичным образом может быть вычислен более сложный интеграл, соответствующий диаграмме *b* на рисунке. Подставив значения кинематических переменных для данного интеграла

$$s_{23} = s_{14} = 0, \quad m_k^2 = m^2, \quad k = 1, \dots, 4, \quad (4.1)$$

в конечную формулу функциональной редукции $I_4^{(d)}$ из работы [1], имеем

$$\begin{aligned} (s_{12} - s_{13} - s_{24} + s_{34})I_4^{(d)}(m^2, m^2, m^2, m^2; s_{12}, 0, s_{34}, 0, s_{24}, s_{13}) = \\ = s_{12}L^{(d)}(\tilde{s}_{12}, M_4^2, m^2) - s_{13}L^{(d)}(\tilde{s}_{13}, M_4^2, m^2) - \\ - s_{24}L^{(d)}(\tilde{s}_{24}, M_4^2, m^2) + s_{34}L^{(d)}(\tilde{s}_{34}, M_4^2, m^2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$M_4^2 = \frac{s_{12}s_{34} - s_{13}s_{24}}{4(s_{12} - s_{13} - s_{24} + s_{34})}. \quad (4.3)$$

Для $d = 4$ имеем

$$\begin{aligned} I_4^{(d)}(m^2, m^2, m^2, m^2; s_{12}, 0, s_{34}, 0, s_{24}, s_{13}) = \\ = \frac{F(y_{13}, y_4) + F(y_{24}, y_4) - F(y_{34}, y_4) - F(y_{12}, y_4)}{2(s_{13}s_{24} - s_{12}s_{34})\beta_4}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$y_4 = \frac{\beta_4 - 1}{\beta_4 + 1}, \quad \beta_4 = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M_4^2}}. \quad (4.5)$$

Еще один интеграл, дающий вклад в сечение дельбрюковского рассеяния, представлен диаграммой *c* на рисунке. Он соответствует кинематике

$$s_{34} = s_{14} = 0, \quad m_k^2 = m^2, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (4.6)$$

Подставив эти значения в конечную формулу функциональной редукции, мы получили

$$\begin{aligned} d_1 d_2 I_4^{(d)}(m^2, m^2, m^2, m^2; s_{12}, s_{23}, 0, 0, s_{24}, s_{13}) = \\ = \frac{1}{2} d_1 s_{13} s_{24} I_4^{(d)}(m_0^2, m^2, m^2 - \tilde{s}_{13}, m^2) - \frac{1}{2} d_1 s_{23} s_{24} I_4^{(d)}(m_0^2, m^2, m^2 - \tilde{s}_{23}, m^2) - \\ - \frac{1}{2} d_1 s_{12} s_{24} I_4^{(d)}(m_0^2, m^2, m^2 - \tilde{s}_{12}, m^2) + d_1 s_{24}^2 I_4^{(d)}(m_0^2, m^2, m^2 - \tilde{s}_{24}, m^2) + \\ + \frac{1}{2} n_1 s_{12} (s_{12} - s_{13} - s_{23}) I_4^{(d)}(m_0^2, \tilde{m}_0^2, m^2 - \tilde{s}_{12}, m^2) - \\ - \frac{1}{2} n_1 s_{13} (s_{12} - s_{13} + s_{23}) I_4^{(d)}(m_0^2, \tilde{m}_0^2, m^2 - \tilde{s}_{13}, m^2) - \\ - \frac{1}{2} n_1 s_{23} (s_{12} + s_{13} - s_{23}) I_4^{(d)}(m_0^2, \tilde{m}_0^2, m^2 - \tilde{s}_{23}, m^2), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где

$$m_0^2 = m^2 - \tilde{s}_1, \quad \tilde{m}_0^2 = m^2 - \tilde{s}_2, \quad \tilde{s}_1 = \frac{s_{13}s_{24}^2}{4d_2}, \quad \tilde{s}_2 = -\frac{s_{12}s_{13}s_{23}}{d_1}, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} n_1 &= 2s_{12}s_{23} - s_{12}s_{24} + s_{13}s_{24} - s_{23}s_{24}, \\ d_1 &= s_{12}^2 + s_{13}^2 + s_{23}^2 - 2s_{12}s_{13} - 2s_{12}s_{23} - 2s_{13}s_{23}, \\ d_2 &= s_{12}s_{23} - s_{12}s_{24} + s_{13}s_{24} - s_{23}s_{24} + s_{24}^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Первые четыре интеграла в уравнении (4.7) выражаются через функцию $L^{(d)}$. Для вычисления интегралов $I_4^{(d)}(m_0^2, \tilde{m}_0^2, m^2 - \tilde{s}_{ij}, m^2)$ можно воспользоваться формулой из работы [1]

$$I_4^{(d)}(r_{1234}, r_{234}, r_{34}, r_4) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\Gamma\left(4 - \frac{d}{2}\right) x_1^2 x_2 dx_1 dx_2 dx_3}{[a - bx_1^2 - cx_1^2 x_2^2 - ex_1^2 x_2^2 x_3^2]^{4-d/2}}, \quad (4.10)$$

где

$$a = r_{1234}, \quad b = r_{1234} - r_{234}, \quad c = r_{234} - r_{34}, \quad e = r_{34} - r_4. \quad (4.11)$$

Для $d = 4$ интеграл (4.10) может быть вычислен в виде комбинации функций $L^{(4)}$ с разными аргументами. Детальный вывод результата будет представлен в расширенной версии статьи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из представленных вычислений видно, что применение метода функциональной редукции позволяет свести сложные интегралы к более простым интегралам. Даже если количество переменных в интегралах, возникающих в результате редукции, такое же, как и в исходном интеграле, эти интегралы проще, чем исходный интеграл. В общем случае происходит редукция к интегралам с меньшим числом переменных, которые также проще чем исходный интеграл. Тот факт, что результаты для рассмотренных интегралов выражаются через одну и ту же функцию $L^{(d)}$, может быть полезен для увеличения точности и скорости вычислений радиационных поправок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Tarasov O. V.* Functional Reduction of One-Loop Feynman Integrals with Arbitrary Masses // *JHEP.* 2022. V. 06, No. 2. P. 155.
2. *Karplus R., Neuman M.* The Scattering of Light by Light // *Phys. Rev.* 1951. V. 83. P. 776–784.
3. *Karplus R., Neuman M.* Non-Linear Interactions between Electromagnetic Fields // *Phys. Rev.* 1950. V. 80. P. 380–385.
4. *De Tollis B.* Dispersive Approach to Photon–Photon Scattering // *Nuovo Cim.* 1964. V. 32. P. 757.
5. *De Tollis B.* The Scattering of Photons by Photons // *Nuovo Cim.* 1965. V. 35. P. 1182.

6. *Constantini V., De Tollis B., Pistoni G.* Nonlinear Effect in Quantum Electrodynamics // *Nuovo Cim.* 1971. V. 2A. P. 733–787.
7. *Shima Y.* Photon Splitting in a Nuclear Electric Field // *Phys. Rev.* 1966. V. 142, No. 4. P. 944.
8. *Baier V. N., Fadin V. S., Katkov V. M., Kuraev E. A.* Photon Splitting into Two Photons in a Coulomb Field // *Phys. Lett. B.* 1974. V. 49. P. 385–387.
9. *Jikia G., Tkabladze A.* Photon–Photon Scattering at the Photon Linear Collider // *Phys. Lett. B.* 1994. V. 323. P. 453–458.
10. *Gounaris G. J., Porfyriadis P. I., Renard F. M.* The $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ Process in the Standard and SUSY Models at High Energies // *Eur. Phys. J. C.* 1999. V. 9. P. 673–686.
11. *Aaboud M. et al.* Evidence for Light-by-Light Scattering in Heavy-Ion Collisions with the ATLAS Detector at the LHC // *Nature Phys.* 2017. V. 13, No. 9. P. 852–858.
12. *Sirunyan A. M. et al.* Evidence for Light-by-Light Scattering and Searches for Axion-Like Particles in Ultraperipheral PbPb Collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 5.02$ TeV // *Phys. Lett. B.* 2019. V. 797. P. 134826.
13. *Tarasov O. V.* Derivation of Functional Equations for Feynman Integrals from Algebraic Relations // *JHEP.* 2017. V. 11. P. 038.
14. *Boos E. E., Davydychev A. I.* A Method of Evaluating Massive Feynman Integrals // *Theor. Math. Phys.* 1991. V. 89. P. 1052–1063.
15. *Rainville D.* *Special Functions.* New-York: Macmillan, 1960.
16. *Davydychev A. I.* Standard and Hypergeometric Representations for Loop Diagrams and the Photon–Photon Scattering // 7th Intern. Seminar on High-Energy Phys. 1993. V. 5.

Получено 27 октября 2022 г.