

## ПЕРЕХОД РОБЕРГЕ–ВАЙССА В ПОДХОДЕ ЛИ–ЯНГА

*Р. Н. Рогалев<sup>a,1</sup>, В. Г. Борняков<sup>a</sup>, Н. В. Герасименюк<sup>b</sup>, В. А. Гой<sup>b</sup>,  
А. А. Корнеев<sup>b</sup>, А. В. Молочков<sup>b</sup>, А. Накамура<sup>b,в</sup>*

<sup>a</sup> Институт физики высоких энергий им. А. А. Логунова  
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Протвино, Россия

<sup>b</sup> Тихоокеанский квантовый центр  
Дальневосточного федерального университета, Владивосток, Россия

<sup>в</sup> RCNP, Университет Осаки, Осака, Япония

Термодинамические величины, характеризующие плотную и горячую сильно взаимодействующую материю, изучаются в решеточной регуляризации КХД с двумя ароматами в подходе Ли–Янга. Показано, что при высокой температуре и учете достаточно большого числа фермионных мод нули Ли–Янга в комплексной плоскости барионной активности ложатся на отрицательную вещественную полуось, что соответствует переходу Роберге–Вайсса. На линии скопления нулей Ли–Янга барионная плотность и давление имеют разрыв; показано, что скачок барионной плотности пропорционален плотности нулей Ли–Янга. Рассмотрены два метода вычисления распределения по барионному числу; показано, что метод, основанный на асимптотической оценке, дает только положительные вероятности состояний с определенным барионным числом, в отличие от численного интегрирования. Обсуждается важность экспериментального измерения этих вероятностей для изучения вопроса о достижении термодинамического равновесия при ядро-ядерных соударениях.

Thermodynamic quantities characterizing dense and hot strongly interacting matter are studied in the lattice regularization of QCD with two flavors in the Lee–Yang approach. It has been shown that at high temperatures and taking into account a sufficiently large number of fermionic modes Lee–Yang zeros in the complex plane of baryon activity lie on the negative real semiaxis, which corresponds to the Roberge–Weiss transition. On the Lee–Yang zero cluster line, the baryon density and pressure have gap; it is shown that the baryon density jump is proportional to the density of Lee–Yang zeros. Two methods for calculating baryon number distributions are considered; it is shown that the method based on the asymptotic estimate gives only positive state probabilities with a certain baryon number, as opposed to numerical integration. The importance of experimental measurement of these probabilities is discussed to study the issue on the achievement of thermodynamic equilibrium in nucleus–nucleus collisions.

PACS: 11.15.Na; 12.38.Gc; 12.38.Aw

---

<sup>1</sup>E-mail: rnr@ihep.ru

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время предположение о том, что при достаточно больших значениях барионного химпотенциала  $\mu_B$  и/или температуры  $T$  адронная материя переходит в газ квазисвободных кварков и глюонов, является общепринятым. Но, хотя в последние десятилетия изучению фазовой диаграммы сильновзаимодействующей материи в плоскости  $\mu_B - T$  уделялось много внимания, к настоящему времени более-менее ясная картина получена лишь для  $\theta = \mu_B/T \ll 1$ .

Считается, что информацию о свойствах адронной материи при достаточно больших значениях  $\theta$  можно получить путем изучения термодинамических функций при комплексных значениях  $\theta = \theta_R + i\theta_I$ . Гипотеза о структуре фазовой диаграммы в плоскости  $\theta_I - T$ , основанная на периодичности статсуммы

$$Z_{GC}(\theta_I) = Z_{GC}(\theta_I + 2\pi/N_c), \quad (1)$$

была сформулирована Роберге и Вайссом в 1986 г. [1]. Фазы, между которыми происходит переход при  $T > T_{RW}$ , характеризуются различными  $Z_3$  секторами поляковской петли (рис. 1, сектора пронумерованы римскими цифрами).

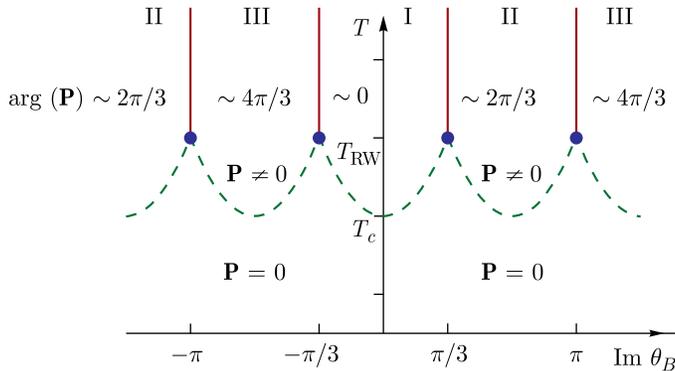


Рис. 1. Фазовая диаграмма в плоскости  $\theta_I - T$

Ли и Янг в 1952 г. предложили подход к описанию фазовых переходов [2], основанный на анализе свойств статсуммы большого канонического ансамбля в конечном объеме, в котором она является полиномом конечной степени по активности  $\xi = e^\theta$ , где  $\theta = \mu_B/T$ .

Целью нашей работы является проверка применимости подхода Ли-Янга к описанию перехода Роберге-Вайсса.

## 1. КАНОНИЧЕСКИЕ СТАТСУММЫ И ИХ ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Большая каноническая статсумма

$$Z_{GC}(\theta, T, V) = \sum_j \langle j | \exp \left( \frac{-\hat{H} + \mu_B \hat{N}}{T} \right) | j \rangle \quad (2)$$

может быть разложена в ряд Лорана по активности  $\xi = e^\theta$ :

$$Z_{GC}(\theta, T, V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_C(n, T, V) \xi^n = Z_C(0, T, V) \sum_{n=-\infty}^{\infty} Z_n \xi^n, \quad (3)$$

который можно рассматривать при  $\theta = i\theta_I$  как ряд Фурье на отрезке  $-\pi/N_c \leq \theta_I \leq \pi/N_c$ . Коэффициенты разложения можно определить, используя формулу

$$Z_C(n, T, V) = N_c \int_{-\pi/N_c}^{\pi/N_c} \frac{d\theta_I}{2\pi} e^{inN_c\theta_I} Z_{GC}(\theta = i\theta_I, T, V), \quad (4)$$

каждая из величин  $Z_C(n, T, V)$  представляет собой каноническую статсумму для системы с фиксированным барионным числом  $n$ . Далее мы используем коэффициенты  $Z_n$ , определенные формулой (3). В силу сохранения четности  $Z_n = Z_{-n}$ . Мы определяем  $Z_{GC}(\theta, T, V)$  по барионной плотности  $\rho(\theta)|_{\theta_R=0}$ , которую получаем путем подгонки фит-функции (здесь  $\rho = \rho_R + i\rho_I$ ):

$$\rho_I(\theta_I) = a_1\theta_I - a_3\theta_I^3 \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{N_c} < \theta_I \leq \frac{\pi}{N_c}, \quad \rho_I\left(\theta_I + \frac{2\pi}{N_c}\right) = \rho_I(\theta_I), \quad (5)$$

к данным для некоторого набора мнимых значений  $\mu_B$ , полученных путем численного моделирования КХД с числом ароматов  $N_f = 2$  на решетке при  $T = 1,35 T_c > T_{RW}$ . Статсумма получается интегрированием выражения

$$\rho(\theta) = \frac{1}{V} \frac{\partial \ln Z_{GC}(\theta, T, V)}{\partial \theta}, \quad (6)$$

при  $\rho(i\theta_I) = i\rho_I(\theta_I)$  задаваемого формулой (5).

Определение  $Z_C(n, T, V)$  и  $Z_n$  по кварковой плотности проводилось двумя методами — численным расчетом интеграла (4) и его асимптотической оценкой в термодинамическом пределе  $V \rightarrow \infty$  методом перевала

$$Z_C(n, T, V) \simeq \sqrt{\frac{2\pi}{VT^3 p''(\theta_s)}} \exp\left[-V\left(\frac{p(\theta_s)}{T} - \varrho(n)T^3\theta_s\right)\right] \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{(VT^3)^k}\right), \quad (7)$$

где  $p(\theta) = T(a_1(\theta^2/2) + a_3(\theta^4/4))$  — давление, соответствующее барионной плотности (5);  $\varrho(n) = (n/VT^3)$  — безразмерная барионная плотность<sup>1</sup>, соответствующая каноническому ансамблю с барионным числом  $n$ ;  $\theta_s$  — седловая точка, определяемая как корень уравнения  $(dp/d\theta) = T^4\varrho(n)$ ;  $\beta_k$  — константы, определяемые в соответствии с процедурой, описанной в [6], в первом и втором порядках  $\beta_k = 0$ .

Обозначим результаты численного расчета и асимптотической оценки через  $Z_{nN}$  и  $Z_{nA}$  соответственно. Асимптотическая оценка была сделана как в первом приближении  $Z_{nN} = Z_{nA}^{(1)}$  (в (7) учитывалась только экспонента), так и во втором порядке

<sup>1</sup>Не следует путать безразмерную плотность  $\varrho(n)$ , характеризующую определенное барионное число в заданном объеме, со средней барионной плотностью  $\rho$ , имеющей размерность  $M^3$ .

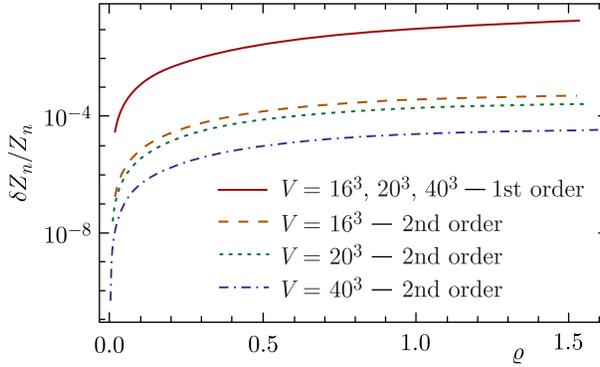


Рис. 2. Относительное отклонение  $\delta Z_n/Z_n$  асимптотической оценки в первом и втором порядках от численного расчета для разных объемов

$Z_{nN} = Z_{nA}^{(2)}$  (в (7) учитывался также предэкспоненциальный фактор). Численный расчет при  $\varrho(n) > 1,6$  дает  $Z_{nN} < 0$  при четных  $n$ , что противоречит положительности канонических статсумм, в то время как  $Z_{nA} > 0 \forall n$ . При  $\varrho(n) < 1,6$  разница между  $Z_{nA}$  и  $Z_{nN}$  пренебрежимо мала, причем разность  $\delta Z^{(2)} = Z_{nA}^{(2)} - Z_{nN}$  много меньше, чем  $\delta Z^{(1)} = Z_{nA}^{(1)} - Z_{nN}$  (рис. 2). Это говорит в пользу применимости асимптотической оценки и при  $\varrho(n) > 1,6$ .

Чередование знака  $Z_{nN}$  может объясняться некорректностью наивного перехода к пределу бесконечного объема, поскольку барионная плотность может описываться разрывной функцией  $\theta_I$  (которую мы используем для фитирования) только в этом пределе, а при конечном объеме  $\rho(\theta)$  аналитична всюду.

Заметим, что

$$\mathcal{P}_n = \frac{Z_n \xi^n}{1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \cosh(k\theta)} \geq 0 \quad (8)$$

представляет собой вероятность того, что система с химпотенциалом  $\mu_B$  находится в состоянии с барионным зарядом  $n$ . Набор значений  $\mathcal{P}_n$  дает распределение по барионному заряду, измерение этого распределения в столкновениях ядер с определенной центральностью может быть использовано [4] для проверки соответствия теоретических оценок  $Z_n$  эксперименту. Это может быть достигнуто путем использования фит-функции

$$\mathcal{P}_n = C Z_n \xi^n \quad (9)$$

с параметрами  $C$  и  $\xi$ . Рассматривая отношение  $\mathcal{P}_n/\mathcal{P}_{-n}$ , можно получить и другую формулу для экспериментального определения барионного химпотенциала:

$$\mu_B = \frac{T}{2n} \ln \left( \frac{\mathcal{P}_n}{\mathcal{P}_{-n}} \right). \quad (10)$$

Согласованность значений  $\mu_B$ , полученных при разных  $n$ , может служить одним из критериев установления термодинамического равновесия в файрболе.

## 2. АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НУЛЕЙ ЛИ–ЯНГА

Для системы на решетке суммирование в формуле (3) идет от  $-N_{\text{tot}}$  до  $N_{\text{tot}}$ , где  $N_{\text{tot}} = 2N_f N_s^3$ . Однако вычисление корней полинома степени  $2N_{\text{tot}}$  — трудная задача, поэтому, в силу быстрого убывания  $Z_n$ , мы приближали статсумму выражением  $Z_{\text{GC}} \approx Z_{\text{GC}}^{(N_{\text{max}})} = \sum_{n=-N_{\text{max}}}^{N_{\text{max}}} Z_n \xi^n$  и изучали зависимость распределения нулей Ли–

Янга, т. е. корней полинома  $Q = \xi^{N_{\text{max}}} Z_{\text{GC}}^{(N_{\text{max}})}$ . Результаты представлены на рис. 3, где показана верхняя половина единичного круга, которая содержит информацию обо всех нулях Ли–Янга, так как в силу  $C$ -четности и вещественности статсуммы, если  $\xi = z$  — корень  $Q(\xi)$ , то  $\xi = z^*$ ,  $\xi = 1/z$  и  $\xi = 1/z^*$  — тоже корни.

При малых  $\varrho$  линия нулей Ли–Янга занимает дугу  $A$  окружности  $|\xi| = 1$ :  $\zeta < \arg \xi < 2\pi - \zeta$ , в точках  $\xi = e^{\pm i\zeta}$  эта линия раздваивается: на рис. 3, *a* показано раздвоение в точке  $\xi = e^{i\zeta}$  на кривые  $A_1$  и  $A_2$ , которые переходят друг в друга при инверсии относительно единичной окружности. С ростом  $\varrho$  граничный угол  $\zeta$  дуги  $A$  увеличивается и достигает  $\pi$  при  $\varrho = \varrho_c$ . При дальнейшем росте  $\varrho$  линия нулей Ли–Янга идет по отрезку отрицательной вещественной полуоси и на каждом из его концов раздваивается:  $C_1$  на рис. 3, *a* — это одна из четырех получающихся таким образом кривых. При дальнейшем росте  $\varrho$  отрезок  $D$  отрицательной вещественной полуоси, занятый нулями Ли–Янга, увеличивается в размерах; кривая  $D_1$ , ответвляющаяся от его правого конца, показана в увеличенном масштабе на рис. 4, *a*. Далее мы считаем (оставляя доказательство на будущее), что в пределе  $N_{\text{max}} \rightarrow N_{\text{tot}} \rightarrow \infty$  такие ответвления от отрезка  $D$  исчезают.

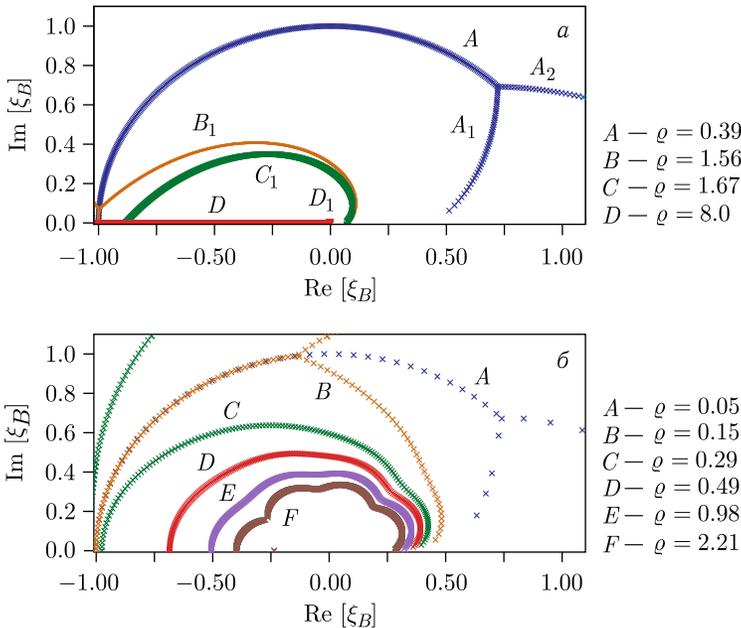


Рис. 3. Распределение нулей Ли–Янга для  $T/T_c = 1,35$  (а) и  $T/T_c = 1,08$  (б) при разных  $N_{\text{max}} = [\varrho VT^3]$

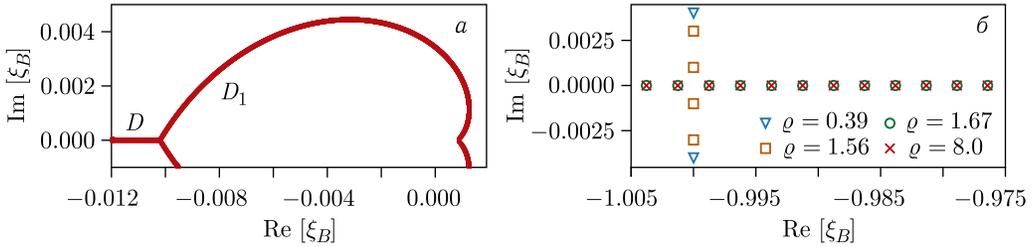


Рис. 4. Распределение нулей Ли-Янга: в окрестности  $\xi = 0$  (а) и  $\xi = -1$  (б)

Изучаемая статсумма, в случае только вещественных отрицательных нулей, имеет вид

$$Z_{GC} = \prod_{i=1}^{N_{tot}} (\xi - z_i) (\xi^{-1} - z_i) = \frac{C}{\xi^{N_{tot}}} \prod_{i=1}^{N_{tot}} (\xi - z_i) (\xi - z_i^{-1}), \quad (11)$$

где  $N_{tot}$  — число фермионных мод на рассматриваемой решетке и  $C = \prod_{i=1}^{N_{tot}} z_i$ .

Докажем, что в этом случае скачок барионной плотности на переходе Роберге-Вайсса пропорционален плотности нулей Ли-Янга. Пусть  $n(\xi)$  — число нулей Ли-Янга справа от  $\text{Re } \xi$ . Разрежем плоскость  $\xi$  вдоль отрезка, содержащего нули статсуммы и выберем точку  $\xi_0$  на верхнем берегу разреза:  $\xi_0 = \text{Re } \xi_0 + i\epsilon$  (рис. 5). Используя общую формулу для давления

$$p(\xi) = \frac{T}{V} \ln Z_{GC}(\theta, V, T) = \frac{T}{V} \left( \sum_n \ln(\xi - z_n) - N_{tot} \ln \xi \right),$$

получаем скачок давления  $\Delta p(\xi_0) = p(\text{Re } \xi_0 + i\epsilon) - p(\text{Re } \xi_0 - i\epsilon)$ , т. е.

$$\Delta p(\xi_0) = \frac{2i\pi T}{V} (n(\xi_0) - N_{tot}). \quad (12)$$

Используя термодинамическую формулу для плотности  $\rho = 1/T (\partial p / \partial \theta)_{T, V}$  и дифференцируя давление вдоль вещественной оси на верхнем и нижнем берегу разреза, получаем выражение для разрыва барионной плотности:

$$\Delta \rho = \frac{i\xi_R}{T} \Delta \frac{\partial \ln p}{\partial \xi_R} = \frac{2i\pi \xi_R}{V} \frac{\partial n(\xi_R)}{\partial \xi_R} = 2i\pi T^3 N_t^3 g(\xi). \quad (13)$$

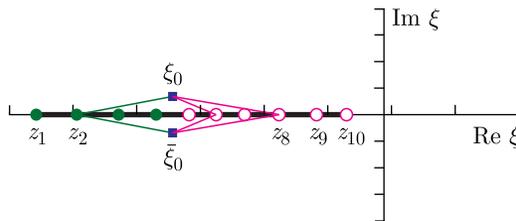


Рис. 5. Положение нулей Ли-Янга и разреза функции  $\ln Z_{GC}(\xi)$

Плотность нулей Ли–Янга определяется так:  $g(\xi) = (1/N_s^3) (1/\Delta\theta_R)$ , где  $\Delta\theta_R$  — расстояние между соседними нулями. Его можно оценить по цепочкам нулей статсуммы в окрестности точки  $\xi = -1$ , показанных на рис. 4, б для  $N_s = 40$ .

На рис. 3, б показано изменение положения нулей Ли–Янга с увеличением  $N_{\max}$  при температуре ниже  $T_{RW}$ . Видно, что линия нулей, отвечающая переходу Роберге–Вайсса, отсутствует. Однако анализ поведения нулей Ли–Янга в этом случае выходит за рамки данной работы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Барионная плотность и канонические статсуммы вычислены в КХД при мнимом барионном химпотенциале из первых принципов. Канонические статсуммы дают распределение по барионному числу, которое, в принципе, можно измерить экспериментально. Согласованность значений  $\mu_B$ , измеренных на основе формулы (10), можно использовать как критерий достижения термодинамического равновесия при столкновениях ядер.

Показано, что для корректного вычисления нулей Ли–Янга нужен учет вкладов высоких барионных плотностей в статсумму (т. е. аппроксимация статсуммы полиномом степени  $n \gg VT^3$ ).

Описан метод вычисления канонических статсумм (формула (7)), позволяющий находить аппроксимирующий полином необходимой степени с положительными коэффициентами.

Положение корректно вычисленных нулей Ли–Янга при  $T > T_{RW}$  указывает на переход Роберге–Вайсса, причем скачок барионной плотности на нем выражается через плотность нулей по формуле (13), что соответствует численным оценкам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Roberge A., Weiss N. // Nucl. Phys. B. 1986. V. 275. P. 734.
2. Lee T. D., Yang Chen-Ning // Phys. Rev. 1952. V. 87. P. 404–409.
3. Lee T. D., Yang Chen-Ning // Ibid. P. 410–419.
4. Borneyakov V., Boyda D., Goy V. A., Molochkov A. V., Nakamura A. // PoS LATTICE2019. 2020. P. 271.
5. Borneyakov V. G., Gerasimeniuk N. V., Goy V. A., Korneev A. A., Molochkov A. V., Nakamura A., Rogalyov R. N. arXiv: 2203.06159 [hep-lat].
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
7. Wakayama M., Borneyakov V., Boyda D., Goy V., Iida H., Molochkov A., Nakamura A., Zakharov V. // Phys. Lett. B. 2019. V. 793. P. 227–233; arXiv:1802.02014 [hep-lat].

Получено 27 октября 2022 г.