Письма в ЭЧАЯ. 2023. Т. 20, № 4(249). С. 603–617

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

ОБОБЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВИГНЕРА И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

И. Л. Бухбиндер [а, б, в, 1], *А. П. Исаев* [б, г, 2], *М. А. Подойницын* [б, 3], *С. А. Федорук* [б, 4]

[а] Центр теоретической физики, Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия

[б] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[в] Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия

[г] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Введен обобщенный оператор Вигнера, связывающий вигнеровскую волновую функцию с локальным релятивистским полем, отвечающим неприводимому представлению расширенной группы Пуанкаре со спиральностями λ и $-\lambda$. Показано, что построенные таким образом релятивистские поля являются калибровочными потенциалами и удовлетворяют соотношениям, определяющим свободные безмассовые поля высших спинов.

A generalized Wigner operator is introduced. This operator transforms the Wigner wave function into a local relativistic field corresponding to an irreducible representation of the extended Poincaré group with integer helicities λ and $-\lambda$. It is shown that the relativistic fields constructed in this way are gauge potentials and satisfy the relations that determine the free massless fields of higher spins.

PACS: 11.10.–z; 11.30.–j; 11.30.Cp; 03.65.Pm

ВВЕДЕНИЕ

Пространственно-временные симметрии играют фундаментальную роль в современной теоретической физике высоких энергий. Важнейшая из таких симметрий формулируется в терминах представлений группы Пуанкаре. Описание унитарных неприводимых представлений четырехмерной группы Пуанкаре было впервые дано в пионерских работах Вигнера [1, 2] и Баргмана–Вигнера [3].

Если отвлечься от представлений, отвечающих тахионам, то физически интересные представления группы Пуанкаре подразделяются на массивные и безмассовые

[1] E-mail: joseph@tspu.edu.ru

[2] E-mail: isaevap@theor.jinr.ru

[3] E-mail: mpod@theor.jinr.ru

[4] E-mail: fedoruk@theor.jinr.ru

в зависимости от значения на них оператора Казимира второго порядка. Безмассовые представления, в свою очередь, распадаются на представления с определенными конечными спиральностями и представления с бесконечным спином. Массивным и безмассовым представлениям с конечной спиральностью посвящена обширная литература (см., например, [4–7] и ссылки там). Представления бесконечного спина, являющиеся формально физически приемлемыми, долгое время не привлекали внимания в теории поля. Однако в последние два десятилетия наблюдается всплеск интереса к построению лагранжевой теории полей бесконечного спина (см., например, обзор [8] и ссылки там).

Начиная с работы Вигнера [1] и последующих работ [2, 3], известно, что унитарные неприводимые представления группы Пуанкаре индуцируются унитарными неприводимыми представлениями малой группы — группы, сохраняющей фиксированный импульс релятивистской частицы. Функции, на которых реализуются данные представления, называются волновыми функциями Вигнера, и их переход к релятивистским локальным полям задается оператором Вигнера. В случае безмассовой частицы в четырех измерениях малой группой является группа $ISO(2)$ — группа движений двумерного евклидова пространства (исчерпывающее описание ее представлений дано например в [9, 10]). Известно, что представления $ISO(2)$ характеризуются единственным безразмерным положительным вещественным параметром, который мы будем обозначать как $\boldsymbol{\rho}$. Такие представления заданы на функциях[1], определенных на окружности радиуса $\boldsymbol{\rho}$. Пространство представления малой группы конечномерно при $\boldsymbol{\rho} = 0$ и бесконечномерно при $\boldsymbol{\rho} \neq 0$.

В нашей предыдущей работе [11] были построены два типа локальных релятивистских полей, на которых реализуются безмассовые унитарные неприводимые представления 4D группы Пуанкаре с бесконечным спином. Данные поля заданы на пространстве, параметризованном 4-импульсом и вспомогательной коммутирующей переменной: векторной или спинорной. При построении таких полевых представлений в работе [11] было дано обобщение оператора Вигнера, ядро которого определяет интегральное преобразование, переводящее волновые функции Вигнера в локальные релятивистские поля.

Как уже было сказано выше, другим примером неприводимых представлений группы Пуанкаре являются безмассовые спиральные представления. В настоящей работе мы покажем, что обобщенный оператор Вигнера может быть определен и для построения безмассовых локальных релятивистских полей, соответствующих спиральным представлениям. Здесь для простоты мы будем рассматривать только случай целых спиральностей[2].

Хорошо известно, что описанные в литературе неприводимые безмассовые полевые представления группы Пуанкаре с определенными спиральностями даются в терминах спин-тензорных полей, которые по терминологии теории поля являются полевыми напряженностями (см. например, [13, 14, 5, 15] и ссылки там). В то же время в лагранжевых полевых моделях фундаментальными объектами являются потенци-

[1] В альтернативной формулировке, которую мы также будем использовать здесь, представление задано на фурье-компонентах таких функций (см. подробности в [11]).

[2] Некоторые аналогичные конструкции для полей полуцелых спиральностей рассмотрены в [12].

алы, а не напряженности. Поэтому интересно описать представления группы Пуанкаре непосредственно в терминах потенциалов. Здесь, однако, следует иметь в виду следующее обстоятельство. В лагранжевых безмассовых полевых теориях, инвариантных относительно P-четности, поля (потенциалы) всегда содержат две спиральности λ и $-\lambda$, что с точки зрения собственной группы Пуанкаре означает, что соответствующие поля (потенциалы) относятся к приводимому представлению. Тем не менее две спиральности λ и $-\lambda$ можно включить в неприводимое представление расширенной группы Пуанкаре, включающей в общем случае как преобразования, непрерывно связанные с тождественным преобразованием, так и дискретные C-, P-, T-преобразования (см., например, [4,7] и особенно статьи [16,17], специально посвященные описанию дискретных преобразований в группе Пуанкаре). Поэтому далее под неприводимым представлением группы Пуанкаре мы подразумеваем представления расширенной группы Пуанкаре.

В работе, согласно [11], введен обобщенный оператор Вигнера, отвечающий случаю $\boldsymbol{\rho} = 0$, выведены уравнения для ядра этого оператора и найдено их решение. Такое решение определяет оператор, переводящий волновые функции Вигнера в лоренц-ковариантные поля, соответствующие безмассовым частицам с определенными спиральностями. В полученной схеме при фиксации $\boldsymbol{\rho} = 0$ унитарные неприводимые представления группы $ISO(2)$ раскладываются в бесконечную прямую сумму унитарных неприводимых представлений группы $SO(2)$, являющейся, как известно, группой, с которой индуцируются безмассовые спиральные представления группы Пуанкаре. Для построения интересующих нас неприводимых представлений расширенной группы Пуанкаре мы объединяем представления со спиральностями λ и $-\lambda$ в одно неприводимое представление расширенной группы. При этом оказывается, что построенные локальные релятивистские поля определены с точностью до калибровочного преобразования и соответствуют свободным безмассовым полям высших спинов.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 кратко обсуждаются основные понятия, связанные с описанием унитарных неприводимых безмассовых спиральных представлений группы Пуанкаре в терминах вигнеровской волновой функции. Разд. 2 посвящен построению обобщенного оператора Вигнера для представлений рассматриваемого типа. В разд. 3 построены уравнения для интегрального ядра обобщенного оператора Вигнера, позволяющего построить релятивистские поля, включающие две спиральности λ и $-\lambda$. В разд. 4 показано, что релятивистское поле, генерируемое обобщенным оператором Вигнера, определено с точностью до калибровочного преобразования и удовлетворяет условиям, определяющим свободные безмассовые поля высших спинов. В заключении кратко сформулированы основные результаты работы и отмечены некоторые направления дальнейших исследований. Детали вычислений, используемых в основной части статьи, отнесены в приложения.

1. ВИГНЕРОВСКАЯ ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ

Построение унитарных неприводимых безмассовых представлений 4D накрывающей группы Пуанкаре $ISL(2,\mathbb{C})$ было впервые осуществлено в работах Вигнера [1,2] и Баргмана–Вигнера [3] в терминах функций $\Phi(p,\varphi)$, получивших впоследствии название вигнеровских волновых функций. По построению эти функции зависят от изотропного 4-импульса p_μ, удовлетворяющего условию $p^\mu p_\mu = 0$, и от дополнительной координаты $\varphi \in [0, 2\pi)$. Действие на такие функции элемента $A \in SL(2,\mathbb{C})$, или $\Lambda \in SO(1,3)$, связанного с A преобразованием

$$A\,\sigma^\mu A^\dagger = \sigma^\nu\;\Lambda_\nu{}^\mu(A), \quad A \in SL(2,\mathbb{C}), \quad \Lambda_\nu{}^\mu(A) \in O(1,3), \tag{1.1}$$

(см. прил. 1), определяется следующим соотношением[1]

$$[U(A)\Phi](p,\varphi) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{t}_\varphi}\Phi\big(\Lambda^{-1}p,\ \varphi-\theta\big)\big|_{\mathbf{b}=\mathbf{b}_{A,\Lambda^{-1}p},\ \theta=\theta_{A,\Lambda^{-1}p}} =$$
$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi'\ \mathcal{D}_{\varphi\varphi'}(\theta_{A,\Lambda^{-1}p}, \mathbf{b}_{A,\Lambda^{-1}p})\,\Phi(\Lambda^{-1}p, \varphi'). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathcal{D}_{\varphi\varphi'}(\theta_{A,\Lambda^{-1}p}, \mathbf{b}_{A,\Lambda^{-1}p})$ — матричный элемент унитарного неприводимого представления (УНП) группы $ISO(2)$, параметры которого θ и $\mathbf{b}$ зависят от преобразований Лоренца и 4-импульса (см. соотношения (П1.6) и (П1.7) в прил. 1). Этот матричный элемент записывается в виде

$$\mathcal{D}_{\varphi\varphi'}(\theta,\mathbf{b}) = \mathrm{e}^{-i\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{t}_\varphi}\delta(\varphi-\varphi'-\theta), \tag{1.3}$$

где $\delta(\varphi)$ — периодическая δ-функция, 2-вектор $\mathbf{t}_\varphi$ имеет компоненты $||\mathbf{t}_\varphi|| = \boldsymbol{\rho}(\cos\varphi, \sin\varphi)$, а положительный вещественный параметр $\boldsymbol{\rho}$ характеризует УНП группы $ISO(2)$.

В случае $\boldsymbol{\rho} \neq 0$ представления $ISO(2)$ являются бесконечномерными и неприводимыми, тогда как при $\boldsymbol{\rho} = 0$ мы имеем $\mathbf{t}_\varphi = 0$ и группа $ISO(2)$ в данном представлении сужается к своей подгруппе $SO(2)$. В этом случае представление малой группы, участвующее в формуле (1.2), распадается в прямую сумму одномерных неприводимых представлений. Проще всего это увидеть, если безмассовые представления (1.2) записать в базисе функций $\Phi_n(p)$, $n \in \mathbb{Z}$, которые являются коэффициентами Фурье в разложении $\Phi(p,\varphi)$:

$$\Phi(p,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(p)\,\mathrm{e}^{in\varphi}. \tag{1.4}$$

В таком дискретном представлении преобразование (1.2) принимает вид

$$[U(A)\Phi]_n(p) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{D}_{nm}(\theta_{A,\Lambda^{-1}p}, \mathbf{b}_{A,\Lambda^{-1}p})\,\Phi_m(\Lambda^{-1}p), \tag{1.5}$$

где $\mathcal{D}_{nm}$ — матрица элемента h малой группы в дискретном базисе:

$$\mathcal{D}_{nm}(\theta,\mathbf{b}) = (-i\,\mathrm{e}^{i\beta})^{m-n}\,\mathrm{e}^{-im\theta}J_{(m-n)}(b\boldsymbol{\rho}), \tag{1.6}$$

[1]Связь группы Пуанкаре и ее накрывающей, а также используемый выбор тестового импульса для подгруппы стабильности и определение операторов Вигнера в 2-мерном спинорном пространстве представлены в прил. 1.

вещественные числа β и b являются полярными координатами 2-вектора $\mathbf{b} = b\,(\cos\beta, \sin\beta)$ и $J_{(n)}(x)$ — функции Бесселя целого порядка. В случае $\boldsymbol{\rho} \to 0$, и с учетом свойства $J_{n-m}(0) = \delta_{nm}$ для функций Бесселя целого порядка, матричный элемент (1.6) равен

$$\mathcal{D}_{nm}(\theta, \mathbf{b}) = \delta_{nm}\, \mathrm{e}^{-in\theta}, \tag{1.7}$$

т. е. матрица $\mathcal{D}(\theta, \mathbf{b})$ становится диагональной и преобразование (1.5) принимает вид

$$[U(A)\Phi]_n(p) = \mathrm{e}^{-in\theta}\, \Phi_n(\Lambda^{-1}p), \tag{1.8}$$

что сразу же следует из первого равенства в (1.2). Таким образом, в случае $\boldsymbol{\rho} \to 0$ на представлении (1.2) малая группа $ISO(2)$ сужается до своей подгруппы $SO(2)$ и представление малой группы распадается в сумму бесконечного числа одномерных неприводимых представлений. При фиксированном n имеет место цепочка индуцирований: одномерное неприводимое представление $SO(2)$ индуцирует неприводимое представление $ISO(2)$ с тривиальной реализацией двумерных трансляций, которые, в свою очередь, индуцируют спиральные представления группы Пуанкаре $ISO(1,3)$.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВИГНЕРА

Основными объектами релятивистской лагранжевой теории поля являются спин-тензорные поля, характеризующиеся стандартными локальными в пространстве-времени преобразованиями относительно группы Пуанкаре $ISL(2,\mathbb{C})$. В то же время вигнеровские волновые функции $\Phi(p, \varphi)$ определены в импульсном пространстве с законом преобразования (1.2) или (1.5) и после трансформации к координатному представлению с помощью преобразования Фурье не совпадают ни с какими пространственно-временными полями, используемыми в лагранжевой теории поля. Переход от описания неприводимых представлений $ISL(2,\mathbb{C})$ в терминах вигнеровских волновых функций к описанию в терминах локальных полей с конечным спином осуществляется на основе известного оператора Вигнера. Такой переход для массивных представлений был предложен в работе Вайнберга [13] (см. также [20]). Для безмассовых представлений $ISL(2,\mathbb{C})$ аналогичный подход был предложен в [14].

В нашей недавней работе [11] метод индуцированных представлений Вигнера был применен для описания неприводимых представлений группы Пуанкаре бесконечного спина, где было дано обобщение оператора Вигнера. Близкий к нашему подход развивался также в работах [18, 19]. Здесь мы рассмотрим применение обобщенного оператора Вигнера для построения локальных полей целых спиральностей и покажем, что в данном случае такой подход автоматически приводит к безмассовым полям, обладающим калибровочной симметрией.

Следуя подходу, используемому в [11], рассмотрим неприводимые представления, реализованные в пространстве полей $\Psi(p, \eta)$, зависящих от пространственно-временного 4-импульса p^μ и дополнительной коммутирующей векторной переменной η^μ. После перехода к координатному представлению полей $\Psi(p, \eta)$ в их разложении по η должны получаться локальные спин-тензорные поля[1]. Поскольку поля

[1]В работах [12, 16, 17] неприводимые представления строились с использованием дополнительных спинорных переменных.

$\Psi(p,\eta)$ описывают представления группы Пуанкаре, эквивалентные представлениям Вигнера, естественно считать, что поля $\Psi(p,\eta)$ взаимно однозначно связаны с вигнеровскими волновыми функциями $\Phi(p,\varphi)$, в терминах которых записывается преобразование (1.2). Эта связь задается интегральным преобразованием

$$\Psi(p,\eta) \;=\; \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{A}(p,\eta,\varphi)\, \Phi(p,\varphi). \tag{2.1}$$

Интегральный оператор с ядром $\mathcal{A}(p,\eta,\varphi)$ называется обобщенным оператором Вигнера. В дискретном базисе переход от вигнеровских волновых функций $\Phi_n(p)$ к локальным полям $\Psi(p,\eta)$ имеет вид

$$\Psi(p,\eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(p,\eta,n)\, \Phi_n(p), \tag{2.2}$$

где ядро обобщенного оператора Вигнера в дискретном базисе $\mathcal{A}(p,\eta,n)$ является фурье-компонентой ядра $\mathcal{A}(p,\eta,\varphi)$:

$$\mathcal{A}(p,\eta,n) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\, \mathcal{A}(p,\eta,\varphi)\, \mathrm{e}^{in\varphi}. \tag{2.3}$$

Требование локальности поля $\Psi(p,\eta)$ является довольно сильным условием. Оно предполагает, что преобразование поля $\Psi(p,\eta)$ (в импульсном пространстве) при преобразованиях Лоренца $A \in SL(2,\mathbb{C})$ имеет тот же вид, что и соответствующее преобразование любого локального релятивистского поля:

$$[U(A)\Psi](p,\eta) \;=\; \Psi\big(\Lambda^{-1}(A)\, p,\ \Lambda^{-1}(A)\, \eta\big), \tag{2.4}$$

где матрицы Λ и A связаны формулой (1.1). Подстановка (1.2) и (2.2) в (2.4) приводит к соотношению на ядро обобщенного оператора Вигнера $\mathcal{A}(p,\eta,n)$ в дискретном базисе:

$$\mathcal{A}(\Lambda^{-1}p,\ \Lambda^{-1}\eta, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(p,\eta,m)\, \mathcal{D}_{mn}(\theta_{A,\,\Lambda^{-1}p}, \mathbf{b}_{A,\Lambda^{-1}p}). \tag{2.5}$$

Это соотношение связывает преобразование ядра $\mathcal{A}$ относительно 4-мерных преобразований Лоренца (левая часть) с преобразованиями $\mathcal{A}$ при действии на него малой группой (правая часть).

Уравнение (2.5) приводит к двум важным следствиям. Во-первых, возьмем в (2.5) в качестве A и Λ преобразования $A_{(p)}$ и $\Lambda(A_{(p)})$, где матрица $A_{(p)} \in SL(2,\mathbb{C})$ определена в прил. 1. Тогда, учитывая (П1.8), для (2.5) получаем

$$\mathcal{A}(\mathring{p}, \Lambda^{-1}(A_{(p)})\eta, n) \;=\; \mathcal{A}(p,\eta,n). \tag{2.6}$$

То есть для построения обобщенного оператора Вигнера $\mathcal{A}(p,\eta,n)$ при произвольном 4-импульсе p^μ достаточно знать вид этого оператора $\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n)$ для тестового импульса $\mathring{p}^\mu$. Во-вторых, рассмотрим выражение (2.5) при $p = \mathring{p}$ и в качестве Λ возьмем

$\Lambda(h)$, где h — произвольный элемент подгруппы стабильности тестового импульса $\overset{\circ}{p}{}^{\mu}$, зависящий от параметров θ и $\mathbf{b}$. В результате из (2.5) получаем соотношение

$$\mathcal{A}(\overset{\circ}{p}, \Lambda^{-1}(h)\eta, n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\overset{\circ}{p}, \eta, m)\, \mathcal{D}_{mn}(\theta, \mathbf{b}). \tag{2.7}$$

Здесь матрица $\Lambda(h)$ зависит от параметров θ, $\mathbf{b}$ и определяется согласно (1.1) формулой $h\sigma^{\mu}\, h^{\dagger} = \sigma^{\nu}\Lambda_{\nu}{}^{\mu}(h)$, где матрица h задана в (П1.5).

Соотношение (2.7) в форме, инфинитезимальной по параметрам преобразования θ и $\mathbf{b}$, приводит к трем дифференциальным уравнениям на функцию $\mathcal{A}(\overset{\circ}{p}, \eta, n)$. После решения этих уравнений и последующего нахождения $\mathcal{A}(p, \eta, n)$ посредством (2.6) мы можем построить с помощью соотношения (2.2) локальное релятивистское поле в координатном представлении.

В [11] при рассмотрении безмассовых представлений бесконечного целого спина мы получили два типа решений для релятивистского поля, названных в работах [18, 19] сингулярным и несингулярным решениями. В следующих разделах мы покажем, как в рамках данного подхода можно построить релятивистские поля, на которых реализованы стандартные безмассовые спиральные представления.

3. НАХОЖДЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИГНЕРА

Перейдем к построению безмассовых релятивистских полей конечных спиральностей. Прежде всего мы сразу подчеркнем отличия нашего подхода от предшествующих подходов к построению локальных полей в терминах неприводимых представлений группы Пуанкаре.

Во-первых, для согласования с лагранжевыми полевыми теориями естественно считать, что построенные релятивистские поля должны быть спин-тензорными полями (чисто тензорными полями в случае целых спиральностей), которые для отличных от нуля спиральностей являются калибровочными потенциалами, т. е. определенными с точностью до преобразований с локальными параметрами. Стандартные безмассовые локальные поля, реализующие неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре с заданными целыми, отличными от нуля спиральностями с точки зрения теории поля являются полевыми напряженностями (см., например, [13, 14, 5, 15], а не потенциалами. Однако лагранжевы модели релятивистской теории поля строятся именно в терминах потенциалов. Поэтому описание неприводимых представлений сразу в терминах потенциалов для целей теории поля представляется более фундаментальным, чем описание в терминах полевых напряженностей, строящихся как производные от потенциалов.

Во-вторых, в полевых теориях с ненарушенной четностью полевое описание безмассовых состояний с помощью потенциалов использует состояния как со спиральностью λ, так и со спиральностью $-\lambda$, что соответствует неприводимым представлениям расширенной группы Пуанкаре, включающей дискретные преобразования C, P, T [1]. Например, вектор-потенциал электромагнитного поля A_{μ} описывает состояния со

[1] С точки зрения собственной группы Пуанкаре такие представления приводимы. В расширенной группе Пуанкаре они становятся неприводимыми за счет дискретных преобразований, связывающих поля со спиральностями λ и $-\lambda$.

спиральностями ± 1, тогда как состояния с фиксированной спиральностью описываются компонентами $F_{\alpha\beta} \sim (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}$ и $\bar{F}_{\dot\alpha\dot\beta} \sim (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot\alpha\dot\beta} F_{\mu\nu}$ единой напряженности $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Мы покажем ниже, что параметр n в обозначении вигнеровской волновой функции (1.8) совпадает со спиральностью. Поэтому для описания релятивистских полей в нашем подходе мы будем использовать две вигнеровские волновые функции $\Phi_{\pm n}(p)$ при фиксированном n, за исключением скалярного случая $n = 0$. Другими словами, для построения релятивистского поля со спиральностями $\lambda = \pm n$ в разложении (2.2) необходимо учесть только два слагаемых с $(\pm n)$. Таким образом, релятивистское поле, содержащее спиральные состояния со спиральностями $\lambda = \pm n$, имеет вид

$$\Psi_n(p,\eta) = \mathcal{A}(p,\eta,n)\Phi_n(p) + \mathcal{A}(p,\eta,-n)\Phi_{-n}(p). \tag{3.1}$$

В рассматриваемом случае, соответствующем конечномерным представлениям малой группы $ISO(2)$, т. е. при $\boldsymbol{\rho} = 0$, закон преобразования (2.7) в инфинитезимальной форме приводит к трем уравнениям:

$$\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \bar\zeta\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}\right)\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n) \;=\; n\,\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n). \tag{3.2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\zeta\dfrac{\partial}{\partial\eta^-} + \eta^+\dfrac{\partial}{\partial\bar\zeta}\right)\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n) = 0, \\ \left(\bar\zeta\dfrac{\partial}{\partial\eta^-} + \eta^+\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\right)\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n) = 0, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

где введены переменные

$$\zeta := \eta^2 + i\eta^1, \quad \bar\zeta := \eta^2 - i\eta^1, \qquad \eta^\pm := \eta^0 \pm \eta^3. \tag{3.4}$$

Левые части уравнений (3.2) и (3.3) получаются из разложения $\Lambda(h)$ по 4D-генераторам подгруппы стабильности безмассового тестового импульса (см. [11]), а правые части получены из явного вида (1.7) матричного элемента $\mathcal{D}_{mn}(\theta,\mathbf{b})$.

Уравнение (3.2) определяет степень однородности функции $\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n)$ как функции комплексного аргумента ζ. Так как $(\zeta\,\partial/\partial\zeta - \bar\zeta\,\partial/\partial\bar\zeta)(\zeta\bar\zeta) = 0$, общее решение уравнения (3.2) можно записать в виде

$$\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n) = \left\{\begin{array}{ll} \zeta^n g_n^{(+)}(\eta^+,\eta^-,\zeta\bar\zeta) & \text{при }\; n \geqslant 0, \\ \bar\zeta^{-n} g_n^{(-)}(\eta^+,\eta^-,\zeta\bar\zeta) & \text{при }\; n < 0, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

где явно выделена главная полиномиальная часть по ζ и $\bar\zeta$ (это удобно для дальнейшего), тогда как $g_n^{(\pm)}(\eta^+,\eta^-,\zeta\bar\zeta)$ — произвольные функции аргументов $\eta^\pm$ и $\zeta\bar\zeta$.

Найдем теперь решение уравнений (3.3). Умножая первое уравнение системы (3.3) на $\bar\zeta$, второе — на ζ и рассматривая их разность, получаем с учетом (3.2) при $n \neq 0$ условие

$$\eta^+\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n) = 0. \tag{3.6}$$

В классе обобщенных функций уравнение (3.6) решается в виде $\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n) \sim \delta(\eta^+)\ldots$ Подстановка такой функции $\mathcal{A}(\mathring{p},\eta,n)$ в систему уравнений (3.3) приводит к заключению о том, что зависимость этой функции от переменной η^- реализуется неявно в виде комбинации $(\eta^+\eta^- - \zeta\bar{\zeta}) = \eta^\mu\eta_\mu =: \eta^2$. Таким образом, общее решение уравнений (3.2) и (3.3) имеет вид

$$\mathcal{A}(\overset{\circ}{p},\eta,n) = \begin{cases} \zeta^n\,\delta(\eta^+)\,f_n^{(+)}(\eta^2) & \text{при } n>0, \\ \bar{\zeta}^{-n}\,\delta(\eta^+)\,f_n^{(-)}(\eta^2) & \text{при } n<0, \end{cases} \tag{3.7}$$

где $f_n^{(\pm)}(\eta^2)$ — произвольные функции одной вещественной переменной η^2. Разложение этих функций по аргументу η^2 приводит к полям с бесконечной вырожденностью спектра спиральности. Чтобы исключить возникающую вырожденность, необходимо зафиксировать функции $f_n^{(\pm)}(\eta^2)$. Выберем простейшее условие $f_n^{(\pm)}(\eta^2) = 1$. В этом случае обобщенный оператор Вигнера спирального состояния равен

$$\mathcal{A}(\overset{\circ}{p},\eta,n) = \begin{cases} \delta(\eta^+)\,\zeta^n & \text{при } n>0, \\ \delta(\eta^+)\,\bar{\zeta}^{-n} & \text{при } n<0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Тогда в системе стандартного импульса $\overset{\circ}{p}_\mu$ релятивистское калибровочное поле (3.1), описывающее спиральные состояния, имеет вид

$$\Psi_n(\overset{\circ}{p},\eta) = \delta(\eta^+)\Big[F_n^{(+)}(\overset{\circ}{p},\eta) + F_n^{(-)}(\overset{\circ}{p},\eta)\Big], \tag{3.9}$$

где

$$F_n^{(+)}(\overset{\circ}{p},\eta) = \zeta^n\,\Phi_n(\overset{\circ}{p}), \qquad F_n^{(-)}(\overset{\circ}{p},\eta) = \bar{\zeta}^n\,\Phi_{-n}(\overset{\circ}{p}) \tag{3.10}$$

содержат произвольные функции $\Phi_n(\overset{\circ}{p})$ и $\Phi_{-n}(\overset{\circ}{p})$.

Поля (3.9) реализованы в пространстве функций, зависящих, помимо 4-импульса, от дополнительного 4-вектора η^μ. В прил. 2 представлена реализация генераторов группы Пуанкаре и вектора Паули–Любанского на таком пространстве. В частности, выражения (П2.4) показывают, что на функциях $\delta(\eta^+)F_n^{(+)}(\overset{\circ}{p},\eta)$ и $\delta(\eta^+)F_n^{(-)}(\overset{\circ}{p},\eta)$ 4-вектор Паули–Любанского пропорционален 4-импульсу:

$$\overset{\circ}{W}_\mu\left[\delta(\eta^+)F_n^{(\pm)}(\overset{\circ}{p},\eta)\right] = \pm n\,\overset{\circ}{p}_\mu\left[\delta(\eta^+)F_n^{(\pm)}(\overset{\circ}{p},\eta)\right]. \tag{3.11}$$

Таким образом, обобщенные функции $\delta(\eta^+)F_n^{(+)}(\overset{\circ}{p},\eta)$ и $\delta(\eta^+)F_n^{(-)}(\overset{\circ}{p},\eta)$ описывают безмассовые состояния со спиральностями n и $-n$ соответственно.

Поля и обобщенные операторы Вигнера при произвольном импульсе находятся с помощью соотношения (2.6) на основе обобщенного оператора Вигнера при тестовом импульсе (3.8). Для этого воспользуемся соотношениями $\zeta = \overset{\circ}{\varepsilon}_{(+)}\cdot\eta$, $\bar{\zeta} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{(-)}\cdot\eta$, где $\overset{\circ}{\varepsilon}_{(\pm)} := \overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)} \pm i\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)}$ и 4-векторы $\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)}$, $\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)}$ определены в прил. 3. Подставляя (3.8) в (2.6), находим явный вид обобщенного оператора Вигнера спиральных состояний для произвольного 4-импульса:

$$\mathcal{A}(p,\eta,n) = \begin{cases} \delta(\eta\cdot p)\,(\varepsilon_{(+)}\cdot\eta)^n & \text{при } n>0, \\ \delta(\eta\cdot p)\,(\varepsilon_{(-)}\cdot\eta)^{-n} & \text{при } n<0, \end{cases} \tag{3.12}$$

где использованы 4-векторы поляризации $\varepsilon_{(\pm)}$, определенные в (П3.3).

4. ЛОКАЛЬНЫЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Перейдем к построению неприводимых представлений в терминах локальных релятивистских полей. Подстановка найденного в (3.12) ядра обобщенного оператора Вигнера в выражение (3.1) определяет релятивистское поле в виде

$$\Psi_n(p,\eta) = \delta(\eta\cdot p)\, F_n(p,\eta), \tag{4.1}$$

где

$$F_n(p,\eta) = F_n^{(+)}(p,\eta) + F_n^{(-)}(p,\eta), \qquad F_n^{(\pm)}(p,\eta) = (\varepsilon_{(\pm)}\cdot\eta)^n\, \Phi_{\pm n}(p). \tag{4.2}$$

Стандартные поля определенной спиральности получаются в результате разложения $F_n^{(\pm)}(p,\eta)$ в ряд по векторной переменной η^μ (см. ниже). Обратим внимание, что определенное таким образом поле $\Psi_n(p,\eta)$ из-за присутствия в нем δ-функции является обобщенной функцией, тогда как поля $F_n^{(\pm)}(p,\eta)$ — это обычные функции переменной η. Важным моментом в полученном результате является одна и та же степень однородности обеих функций $F_n^{(\pm)}(p,\eta)$ по η^μ. Сами компонентные поля $F_n^{(+)}(p,\eta)$ и $F_n^{(-)}(p,\eta)$ описывают состояния с положительной и отрицательной спиральностями $\lambda = \pm n$.

Явный вид функций (4.2) воспроизводит автоматически уравнения движения поля $F_n(p,\eta)$:

$$p^2 F_n(p,\eta) = 0, \tag{4.3}$$

$$\left(p\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_n(p,\eta) = 0, \tag{4.4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_n(p,\eta) = 0, \tag{4.5}$$

$$\left(\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right) F_n(p,\eta) = n\, F_n(p,\eta). \tag{4.6}$$

Последнее уравнение определяет степень однородности поля $F_n(p,\eta)$ по переменным η^μ. Кроме того, присутствие в определении $\Psi_n(p,\eta)$ (4.1) поля $F_n(p,\eta)$ вместе с δ-функцией $\delta(\eta\cdot p)$ приводит к следующему соотношению эквивалентности:

$$F_n(p,\eta) \sim F_n(p,\eta) + (p\cdot\eta)\,\epsilon_{n-1}(p,\eta), \tag{4.7}$$

где функции $\epsilon_{n-1}(p,\eta)$ удовлетворяют уравнениям (4.3)–(4.5) и имеют степень однородности $(n-1)$ по переменной η. Соотношение (4.7) по сути представляет собой калибровочное преобразование с параметрами $\epsilon_{n-1}(p,\eta)$, и следовательно, поле $F_n(p,\eta)$ является калибровочным полем[1].

[1]Описание безмассовых калибровочных полей с использованием обобщенных функций рассматривалось, например, в [8].

Стандартное тензорное описание калибровочных полей получается после явного выделения полиномиальной зависимости по η поля $F_n(p,\eta)$:

$$F_n(p,\eta) = \eta^{\mu_1} \cdots \eta^{\mu_n} f_{\mu_1 \cdots \mu_n}(p) \tag{4.8}$$

— и перехода в координатное представление. Соответствующее координатное тензорное поле $f_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)$ является автоматически симметричным в отношении векторных индексов $f_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) = f_{(\mu_1 \cdots \mu_n)}(x)$ и, благодаря (4.3)–(4.5), подчиняется уравнениям

$$\Box f_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) = 0, \qquad \partial^{\mu_1} f_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) = 0, \qquad \eta^{\mu_1 \mu_2} f_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_n}(x) = 0. \tag{4.9}$$

Кроме того, соотношение эквивалентности (4.7) означает, что поля $f_{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)$ определены с точностью до калибровочного преобразования:

$$\delta f_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}(x) = \partial_{(\mu_1} \epsilon_{\mu_2 \cdots \mu_n)}(x). \tag{4.10}$$

Уравнения (4.9) и калибровочная симметрия (4.10) являются стандартными условиями, определяющими свободные безмассовые поля высших спинов.

В случае нулевой спиральности использования дополнительных переменных η^μ не требуется. В этом случае релятивистское поле совпадает с вигнеровской волновой функцией $\Psi_0(p) = \Phi_0(p)$, не является калибровочным полем и подчиняется только уравнению Клейна–Гордона в импульсном представлении: $p^2 \Psi_0(p) = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложено обобщение оператора Вигнера и на его основе построено 4D релятивистское полевое описание неприводимых безмассовых представлений расширенной группы Пуанкаре, дополняющей собственную группу Пуанкаре дискретными преобразованиями P, C, T. В отличие от стандартных неприводимых локальных полевых представлений, которые на языке теории поля формулируются в терминах полевых напряженностей с фиксированными спиральностями (см., например, [14, 15]), построенные нами неприводимые представления расширенной группы Пуанкаре формулируются в терминах калибровочных потенциалов, удовлетворяющих условиям, определяющих свободные безмассовые поля высших спинов.

В работе построено локальное полевое описание в терминах полей $\Psi(p,\eta)$ в импульсном представлении, зависящих от дополнительной векторной переменной η^μ и описывающих два безмассовых состояния со спиральностями λ и $-\lambda$. Получены уравнения (3.2), (3.3) для функции $\Psi(p,\eta)$ и найдено их решение (4.1). Замечательным свойством этого решения является наличие в качестве множителя обобщенной функции $\delta(\eta \cdot p)$: $\Psi(p,\eta) = \delta(\eta \cdot p) F(p,\eta)$. Это автоматически ведет к калибровочной инвариантности поля $F(p,\eta)$.

Отметим, что ранее аналогичный подход для описания неприводимых представлений группы Пуанкаре бесконечного спина на основе обобщенного оператора Вигнера был развит в нашей работе [11]. Здесь мы показали, что этот подход успешно применим и для описания неприводимых безмассовых представлений расширенной группы Пуанкаре с конечными целыми спиральностями и тем самым продемонстрировали определенную универсальность такого подхода. Представляется интересным провести на основе обобщенного оператора Вигнера построение локальных релятивистских полей с конечными полуцелыми спиральностями, что мы планируем сделать в последующих работах.

Благодарности. Работа И. Л. Б. поддержана грантом Минпросвещения РФ (проект № QZOY-2023-0003). Работа С. А. Ф. выполнена при поддержке РНФ (гранта № 21-12-00129).

Приложение 1
НАКРЫВАЮЩАЯ 4D-ГРУППЫ ЛОРЕНЦА. ОПЕРАТОРЫ ВИГНЕРА

Связь группы Лоренца и ее накрывающей группы $SL(2,\mathbb{C})$ осуществляется в пространстве $\mathcal{H}$ эрмитовых (2×2)-матриц. Базисные эрмитовы матрицы, в качестве которых мы используем $\sigma^0 = I_2$ и σ^i, $i = 1,2,3$, — σ-матрицы Паули, устанавливают взаимно однозначное соответствие между множеством векторов пространства $x_\mu \in \mathbb{R}^{1,3}$ и множеством $\mathcal{H}$ эрмитовых матриц $X = x_\mu\sigma^\mu \in \mathcal{H}$. Действие группы $SL(2,\mathbb{C})$ на множестве $\mathcal{H}$

$$X \to X' = AXA^\dagger, \quad X, X' \in \mathcal{H}, \quad A \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{П1.1}$$

приводит к гомоморфизму групп $SL(2,\mathbb{C}) \to SO^\uparrow(1,3)$, представленному в (1.1).

В качестве тестового 4-импульса безмассовой частицы берется вектор $\overset{\circ}{p} \in \mathbb{R}^{1,3}$, имеющий следующие компоненты:

$$||\overset{\circ}{p}_\mu|| = (\overset{\circ}{p}_0, \overset{\circ}{p}_1, \overset{\circ}{p}_2, \overset{\circ}{p}_3) = (E, 0, 0, E). \tag{П1.2}$$

Оператор Вигнера $A_{(p)} \in SL(2,\mathbb{C})$ определяется матричным уравнением

$$A_{(p)}(\overset{\circ}{p}\,\sigma)A^\dagger_{(p)} = (p\,\sigma), \tag{П1.3}$$

где $(x\sigma) := x_\mu\sigma^\mu$. Произвол в определении операторов Вигнера фиксируется равенством $A_{(\overset{\circ}{p})} = I_2$. Соотношение (П1.3) в векторном представлении имеет вид $\Lambda_\nu{}^\mu(A_{(p)})\,\overset{\circ}{p}_\mu = p_\nu$. Матрицы $h \in SL(2,\mathbb{C})$ из подгруппы стабильности $G_{\overset{\circ}{p}}$ сохраняют тестовый импульс,

$$h\;(\overset{\circ}{p}\,\sigma)\;h^\dagger = (\overset{\circ}{p}\,\sigma). \tag{П1.4}$$

В случае изотропного 4-импульса (П1.2) элементы $h \in G_{\overset{\circ}{p}} \simeq ISO(2)$ имеют вид

$$h = \begin{pmatrix} 1 & b_1 + \mathrm{i}b_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(i/2)\theta} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-(i/2)\theta} \end{pmatrix}, \tag{П1.5}$$

т. е. определяются тремя параметрами $\theta \in [0, 2\pi]$ и $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

Операторы Вигнера $A_{(p)}$ определены с точностью до умножения справа на элемент из подгруппы стабильности $G_{\overset{\circ}{p}}$ и таким образом параметризуют фактор-пространство $SL(2,\mathbb{C})/G_{\overset{\circ}{p}}$. Соотношение $A\,A_{(p)} = A_{(\Lambda p)}\,h_{A,p}$, задающее действие элемента $A \in SL(2,\mathbb{C})$ на фактор-пространство $SL(2,\mathbb{C})/G_{\overset{\circ}{p}}$, параметризованное операторами Вигнера, приводит к двум следствиям

$$h_{A,p} = A^{-1}_{(\Lambda p)}\,A\,A_{(p)} \Rightarrow h_{A,\Lambda^{-1}p} = A^{-1}_{(p)}\,A\,A_{(\Lambda^{-1}p)}, \tag{П1.6}$$

где индексы у $h_{A,p}$ указывают на то, что элемент подгруппы стабильности тестового импульса зависит от $A \in SL(2,\mathbb{C})$ и 4-импульса p.

Параметры, которые соответствуют элементу подгруппы стабильности $h_{A,p}$, заданному в (П1.6), обозначаются посредством $\theta_{A,p}$ и $\mathbf{b}_{A,p}$ и определяются из соотношения

$$h_{A,p} = A^{-1}_{(\Lambda p)}\, A\, A_{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{b}_{A,p} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{i/2\theta_{A,p}} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-i/2\theta_{A,p}} \end{pmatrix}, \tag{П1.7}$$

где $\mathbf{b}_{A,p} = (b_{A,p})_1 + i(b_{A,p})_2$. Параметры $\theta_{A,\Lambda^{-1}p}$ и $\mathbf{b}_{A,\Lambda^{-1}p}$, соответствующие второй формуле из (П1.6), определяются из $\theta_{A,p}$ и $\mathbf{b}_{A,p}$ заменой $p \to \Lambda(A)^{-1}p$. С учетом (П1.6) условие $A_{(\overset{\circ}{p})} = I_2$ приводит к равенствам

$$\theta_{A_{(p)},\overset{\circ}{p}} = 0, \quad \mathbf{b}_{A_{(p)},\overset{\circ}{p}} = 0. \tag{П1.8}$$

Приложение 2
ПСЕВДОВЕКТОР ПАУЛИ–ЛЮБАНСКОГО ДЛЯ ПОЛЕЙ С ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ВЕКТОРНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Генераторы группы Пуанкаре $\hat{P}_n$, $\hat{M}_{nm}$, действующие в пространстве полей $\Psi(p,\eta)$, имеют вид

$$\hat{P}_n = p_n, \quad \hat{M}_{nm} = i\Big(p_n \frac{\partial}{\partial p^m} - p_m \frac{\partial}{\partial p^n} + \eta_n \frac{\partial}{\partial \eta^m} - \eta_m \frac{\partial}{\partial \eta^n}\Big). \tag{П2.1}$$

Псевдовектор Паули–Любанского в системе отсчета стандартного тестового импульса определяется следующим образом:

$$\overset{\circ}{W}_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\hat{M}^{lk}\overset{\circ}{p}{}^\nu = i\varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\,\overset{\circ}{p}{}^\nu\,\eta^\lambda \frac{\partial}{\partial \eta_\rho}. \tag{П2.2}$$

Компоненты этого вектора имеют вид

$$\overset{\circ}{W}_0 = \overset{\circ}{W}_3 = E\left(\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta} - \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right), \tag{П2.3}$$

$$\overset{\circ}{W}_{(+)} = -\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{W}_1 + i\overset{\circ}{W}_2\right) = E\left(\eta^+\frac{\partial}{\partial\zeta} + \bar{\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta^-}\right), \tag{П2.4}$$

$$\overset{\circ}{W}_{(-)} = -\frac{1}{2}\left(\overset{\circ}{W}_1 - i\overset{\circ}{W}_2\right) = E\left(\eta^+\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}} + \zeta\frac{\partial}{\partial\eta^-}\right), \tag{П2.5}$$

где использованы переменные, определенные в (3.4). Можно показать, что в произвольной системе отсчета компоненты вектора Паули–Любанского даются выражениями

$$\begin{gathered} W_0 = -\frac{1}{2}\left[(\varepsilon_{(+)}\cdot\eta)\left(\varepsilon_{(-)}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - (\varepsilon_{(-)}\cdot\eta)\left(\varepsilon_{(+)}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right] = W_3, \\ W_{(\pm)} = \left((\varepsilon_{(\mp)}\cdot\eta)\left(p\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - (p\cdot\eta)\left(\varepsilon_{(\mp)}\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right). \end{gathered} \tag{П2.6}$$

Приложение 3
ВЕКТОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Здесь мы приведем выражения для используемых в тексте 4-векторов поляризации.

В системе стандартного импульса 4-векторы поляризации, которые ортогональны друг другу и безмассовому тестовому импульсу $\overset{\circ}{p}$, имеют компоненты

$$(\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)})_\nu = (0,1,0,0), \qquad (\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)})_\nu = (0,0,1,0). \tag{П3.1}$$

В произвольном базисе они обозначаются посредством

$$\varepsilon_{(1)} := \Lambda(A_{(p)})\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{(1)}, \quad \varepsilon_{(2)} := \Lambda(A_{(p)})\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{(2)}. \tag{П3.2}$$

Также используются следующие линейные комбинации векторов (П3.2):

$$\varepsilon_{(\pm)} := \varepsilon_{(2)} \pm i\varepsilon_{(1)}, \tag{П3.3}$$

которые по построению удовлетворяют уравнениям

$$p \cdot \varepsilon_{(\pm)} = 0, \qquad \varepsilon_{(\pm)} \cdot \varepsilon_{(\pm)} = 0, \qquad \varepsilon_{(+)} \cdot \varepsilon_{(-)} = -2. \tag{П3.4}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wigner E. P.* On Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group // Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149.
2. *Wigner E. P.* Relativistische Wellengleichungen // Z. Phys. 1948. V. 124. P. 665.
3. *Bargmann V., Wigner E. P.* Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations // Proc. Nat. Acad. Sci. 1948. V. 34. P. 211.
4. *Fonda L., Ghirardi G. C.* Symmetry Principles in Quantum Physics. New York: Marcel Deccer, Inc, 1970. 515 p.
5. *Новожилов Ю. В.* Введение в теорию элементарных частиц. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1972. 472 с.
6. *Барут А., Рончка Р.* Теория представлений групп и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1980. 393 с.
7. *Tung Wu-Ki.* Group Theory in Physics. Philadelphia; Singapore: World Sci., 1985. 344 p.
8. *Bekaert X., Skvortsov E. D.* Elementary Particles with Continuous Spin // Intern. J. Mod. Phys. A. 2017. V. 32. P. 1730019; arXiv:1708.01030 [hep-th].
9. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1965.
10. *Желобенко Д. П., Штерн А. И.* Представления групп Ли. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1983.
11. *Бухбиндер И. Л., Исаев А. П., Подойницын М. А., Федорук С. А.* Обобщение конструкции Баргмана–Вигнера для описания полей бесконечного спина. // ТМФ. 2023 (направлено).
12. *Зима В. Г., Федорук С. А.* Ковариантное квантование $d = 4$ суперчастицы Бринка–Шварца с использованием лоренцевых гармоник // ТМФ. 1995. Т. 102. С. 420.
13. *Weinberg S.* Feynman Rules for Any Spin // Phys. Rev. 1964. V. 133, No. 5B. P. B1318.
14. *Weinberg S.* Feynman Rules for Any Spin. II. Massless Particles // Phys. Rev. 1964. V. 134, No. 4B. P. B882.

15. *Buchbinder I. L., Kuzenko S. M.* Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or a Walk through Superspace. Bristol; Philadelphia: IOP Publ., 1998.
16. *Gitman D. M., Shelepin A. L.* Fields on the Poincare Group: Arbitrary Spin Description and Relativistic Wave Equations // Intern. J. Theor. Phys. 2001. V. 40. P. 603–684; arXiv:hep-th/0003146.
17. *Buchbinder I. L., Gitman D. M., Shelepin A. L.* Discrete Symmetries as Automorphisms of the Proper Poincare Group // Intern. J. Theor. Phys. 2002. V. 41. P. 753–790; arXiv:hep-th/0010035.
18. *Schuster P., Toro N.* On the Theory of Continuous-Spin Particles: Wavefunctions and Soft-Factor Scattering Amplitudes // JHEP. 2013. V. 09. P. 104; arXiv:1302.1198 [hep-th].
19. *Schuster P., Toro N.* On the Theory of Continuous-Spin Particles: Helicity Correspondence in Radiation and Forces // JHEP. 2013. V. 09. P. 105; arXiv:1302.1577 [hep-th].
20. *Isaev A. P., Podoinitsyn M. A.* Two-Spinor Description of Massive Particles and Relativistic Spin Projection Operators // Nucl. Phys. B. 2018. V. 929. P. 452; arXiv:1712.00833 [hep-th].

Получено 1 марта 2023 г.