Письма в ЭЧАЯ. 2024. Т. 21, № 5(256). С. 978–995

О ВОЗНИКНОВЕНИИ ПАРНЫХ КОРРЕЛЯЦИЙ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТИПА В СФЕРИЧЕСКИХ ЧЕТНО-ЧЕТНЫХ ЯДРАХ

В. А. Кузьмин [a], *Т. В. Тетерева* [б]

[a] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

[б] Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, Москва

На основе специального преобразования Боголюбова для одинаковых нуклонов рассмотрено возникновение парных корреляций в основном состоянии сферических четно-четных ядер. Подтверждено, что в ядрах с заполненными подоболочками парные корреляции сверхпроводящего типа возникают при константах взаимодействия G, превышающих некоторое пороговое значение. Для такого порогового значения получены грубые оценки сверху и снизу. Показано, что в ядрах с открытой подоболочкой сверхпроводящие корреляции существуют при любых положительных значениях G. При этом пары нуклонов распределяются по всем подоболочкам, участвующим в спаривательном взаимодействии.

The appearance of the like nucleons pair correlations in the ground state of spherical even–even nuclei is considered within the special Bogoliubov transformation. It is confirmed that in closed subshell nuclei the superconducting pair correlations appear if the coupling constant G exceeds certain threshold value. Rough upper and lower estimates are obtained for the threshold value. It is shown that superconducting correlations exist in open subshell nuclei at any positive G. In that case the nucleon pairs are distributed over all subshells participating in the pairing interaction.

PACS: 21.60.−n; 21.90.+f; 74.20.Fg

ВВЕДЕНИЕ

В одной из самых первых работ по применению идеи о парных корреляциях сверхпроводящего типа к задачам спектроскопии атомных ядер [1] было подчеркнуто, что сверхпроводящие парные корреляции в ядрах возникают только тогда, когда константа взаимодействия превышает определенное значение. Там же было отмечено, что существование такого порога отличает атомные ядра от бесконечных систем, рассматриваемых в задачах сверхпроводимости. Позднее это замечание было неоднократно повторено [2, 3].

Существование порогового значения константы взаимодействия демонстрировалось следующим рассуждением [1, 2]. В простейшем случае, когда все матричные элементы притягивающего двухчастичного взаимодействия заменяются одной константой G, уравнения для вычисления корреляционной функции C и химического потенциала λ принимают вид

$$\frac{G}{2}\sum_s \frac{1}{\sqrt{(E_s-\lambda)^2+C^2}} = 1, \tag{1}$$

$$2\sum_s v_s^2 = \mathcal{N}, \quad v_s^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{E_s-\lambda}{\sqrt{(E_s-\lambda)^2+C^2}}\right]. \tag{2}$$

Здесь $\mathcal{N}$ — число частиц в системе. Суммирование ведется по парам дважды вырожденных одночастичных состояний в среднем поле ядра. Эти состояния связаны друг с другом операцией обращения времени [2]. Из уравнения (1) при ненулевых C следует неравенство

$$\frac{G}{2}\sum_s \frac{1}{|E_s-\lambda|} > 1. \tag{3}$$

Его часто рассматривают как соотношение, определяющее нижнюю границу G, начиная с которой в системе могут существовать парные корреляции сверхпроводящего типа. Это рассуждение содержит молчаливое предположение о том, что при уменьшении G химический потенциал λ не может приблизиться настолько близко к одному из E_s, чтобы значительно увеличить сумму $\sum\limits_s 1/\left|E_s-\lambda\right|$. Справедливость этого предположения не очевидна, поскольку λ и корреляционная функция C вычисляются при решении системы нелинейных уравнений (1) и (2). Тем самым неравенство (3) есть полезное наводящее соображение, а не доказательство.

В данной работе мы рассматриваем условия, при которых в основном состоянии сферических четно-четных ядер между нуклонами одного типа могут проявляться парные корреляции сверхпроводящего типа. Для большого числа одночастичных состояний уравнения (1) и (2) поддаются только численному решению, поэтому мы сначала рассмотрим решение задачи для одной и двух подоболочек и затем применим полученные результаты на случай большего числа уровней.

Работа состоит из введения, трех разделов и заключения. В разд. 1 получены уравнения для вычисления нормальных и аномальных одночастичных плотностей. При этом явно учитывается вклад парного взаимодействия в энергии одночастичных состояний. В разд. 2 изучены условия возникновения парных корреляций в системах, содержащих одну и две подоболочки, и для системы с заполненной подоболочкой вычислены точные пороговые значения константы взаимодействия G. В разд. 3 рассмотрены ядра с несколькими подоболочками. Основные итоги подведены в заключении.

1. ГАМИЛЬТОНИАН МОДЕЛИ И ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Гамильтониан для нейтронов (или протонов) в сферически-симметричном ядре выбираем в виде [2]

$$H = \sum_k \sum_{m_k=-j_k}^{j_k} E_k a_{k,m_k}^{\dagger} a_{k,m_k} -$$
$$- \frac{G}{4}\sum_{k,l}\sum_{m_k=-j_k}^{j_k}(-1)^{j_k-m_k} a_{k,m_k}^{\dagger} a_{k,-m_k}^{\dagger} \sum_{m_l=-j_l}^{j_l}(-1)^{j_l-m_l} a_{l,-m_l} a_{l,m_l}. \tag{4}$$

Индексами k мы перечисляем одночастичные состояния с энергиями E_k и угловыми моментами j_k; m_k — третья проекция углового момента, $m_k = -j_k, -j_k+1, \ldots, j_k-1, j_k$; операторы $a^\dagger_{k,m_k}$ и a_{k,m_k} — фермионные операторы рождения и уничтожения частицы в состоянии (k, m_k). Следуя традиции, мы будем называть подоболочкой совокупность из $2j_k+1$ одночастичных состояний с одинаковыми значениями E_k и j_k. В данной работе мы рассматриваем системы фермионов с притягивающим взаимодействием, т. е. $G > 0$.

Операторы квазичастиц вводятся с помощью специального преобразования Боголюбова с вещественными коэффициентами [2]

$$a_{k,m_k} = u_k \alpha_{k,m_k} + (-1)^{j_k - m_k} v_k \alpha^\dagger_{k,-m_k}. \tag{5}$$

Если операторы α_{k,m_k} и $\alpha^\dagger_{k,m_k}$ есть операторы уничтожения и рождения фермионов, то коэффициенты преобразования подчиняются условию

$$u_k^2 + v_k^2 = 1. \tag{6}$$

Вакуум квазичастиц $|\rangle$ определяется уравнениями $\alpha_{k,m_k}|\rangle = 0$ для любых k и m_k. Если операторы квазичастиц определены соотношениями (5), то угловой момент $|\rangle$ равен нулю и четность $|\rangle$ положительна. Это легко доказать, действуя на $|\rangle$ операторами полного углового момента системы нуклонов одного типа и оператором четности. В силу этого произведение нейтронных и протонных вакуумных состояний имеет нулевой угловой момент и положительную четность, значения которых совпадают с угловыми моментами и четностями основных состояний всех сферических четно-четных ядер. Поэтому в качестве приближенной волновой функции основного состояния системы одинаковых фермионов (нейтронов или протонов), содержащей четное число частиц, $\mathcal{N}$, мы рассматриваем соответствующее вакуумное состояние $|\rangle$.

Квазичастичный вакуум связан с вакуумом частиц соотношением [2]

$$|\rangle = \prod_{k, m_k > 0} \left(u_k + (-1)^{j_k - m_k} v_k a^\dagger_{k,m_k} a^\dagger_{k,-m_k} \right) |0\rangle, \tag{7}$$

где $|0\rangle$ — состояние без нуклонов, $a_{k,m_k}|0\rangle = 0$ для всех k и m_k. Если для некоторого k коэффициенты u_k и v_k одновременно отличны от нуля ($u_k v_k \neq 0$), то функция (7) будет содержать компоненты с разным числом пар частиц.

Коэффициенты преобразования (5) вычисляются из условия минимума энергии системы, $\langle|H|\rangle$. При поиске экстремума необходимо учитывать, что среднее значение оператора числа частиц должно равняться числу частиц в системе:

$$\langle|N|\rangle = \langle| \sum_{k,m_k} a^\dagger_{k,m_k} a_{k,m_k} |\rangle = \mathcal{N}.$$

Функционал, подлежащий минимизации, принимает вид

$$\langle|H|\rangle - \lambda \left[\langle| \sum_{k,m_k} a^\dagger_{k,m_k} a_{k,m_k} |\rangle - \mathcal{N} \right].$$

Здесь λ — неопределенный множитель Лагранжа, часто называемый химическим потенциалом. Видно, что включение дополнительного условия изменяет оператор (4) в

$$H' = H - \lambda \sum_{k,m_k} a^\dagger_{k,m_k} a_{k,m_k}.$$

Среднее от оператора H' по квазичастичному вакууму равно

$$\langle|H'|\rangle = \sum_k (2j_k+1)(E_k-\lambda)v_k^2 - \frac{G}{2}\sum_k (2j_k+1)v_k^4 - \frac{G}{4}\left[\sum_k (2j_k+1)u_k v_k\right]^2. \quad (8)$$

Коэффициенты u_k и v_k входят в $\langle|H'|\rangle$ только в виде произведений v_k^2 и $u_k v_k$, которые можно выбрать в качестве новых переменных

$$w_k = v_k^2 \quad \text{и} \quad t_k = u_k v_k. \quad (9)$$

Иногда их называют нормальной и аномальной плотностями, поскольку

$$w_k = \langle|a^\dagger_{k,m_k} a_{k,m_k}|\rangle \quad \text{и} \quad t_k = (-1)^{j_k-m_k}\langle|a_{k,-m_k} a_{k,m_k}|\rangle.$$

Наличие ненулевых матричных элементов $\langle|a_{k,-m_k} a_{k,m_k}|\rangle$ указывает на появление сверхпроводящего состояния. Из условий (6) следует, что нормальная и аномальная плотности удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant w_k \leqslant 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant t_k \leqslant \frac{1}{2}$$

и связаны между собой соотношениями

$$w_k^2 + t_k^2 = w_k. \quad (10)$$

Матричный элемент (8) в переменных w_k и t_k записывается в виде

$$\langle|H'|\rangle = \sum_k (2j_k+1)(E_k-\lambda)w_k - \frac{G}{2}\sum_k (2j_k+1)w_k^2 - \frac{G}{4}\left[\sum_k (2j_k+1)t_k\right]^2. \quad (11)$$

Дополнительное условие сохранения числа частиц в среднем переходит в

$$\sum_k (2j_k+1)w_k = \mathcal{N}. \quad (12)$$

Для удобства дальнейших вычислений запишем w_k в виде суммы

$$w_k = \xi_k + \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leqslant \xi_k \leqslant \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Соотношения (10) упрощаются:

$$\xi_k^2 + t_k^2 = \frac{1}{4}, \quad (14)$$

и их выполнение легко обеспечить с помощью тригонометрических функций

$$\xi_k = \frac{1}{2}\cos\varphi_k, \quad t_k = \frac{1}{2}\sin\varphi_k \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \varphi_k \leqslant \pi.$$

Отметим, что $t_k > 0$ при $0 < \varphi_k < \pi$. Среднее (8) теперь зависит только от неизвестных φ_k:

$$\langle |H'| \rangle = \sum_k \left(j_k + \frac{1}{2}\right)\left(E_k - \lambda - \frac{G}{4}\right) + \sum_k \left(j_k + \frac{1}{2}\right)\left(E_k - \frac{G}{2} - \lambda\right)\cos\varphi_k - \\ - \frac{G}{4}\sum_k \left(j_k + \frac{1}{2}\right)\cos^2\varphi_k - \frac{G}{4}\left[\sum_k \left(j_k + \frac{1}{2}\right)\sin\varphi_k\right]^2. \quad (15)$$

Условие экстремума $\langle |H'| \rangle$ для каждого φ_k из интервала $0 < \varphi_k < \pi$ дается уравнением

$$\frac{\partial \langle |H'| \rangle}{\partial \varphi_k} = 0. \quad (16)$$

При стремлении φ_k к 0 или к π обычные производные надо заменять на односторонние производные. Проще всего необходимые предельные переходы можно сделать, отобразив всю числовую ось на сегмент $0 \leqslant \varphi_k \leqslant \pi$, положив $\varphi_k = \operatorname{arcctg} x_k$ при $\infty > x_k > -\infty$. Уравнение (16) превращается в

$$\frac{\partial \langle |H'| \rangle}{\partial x_k} = \frac{\partial \langle |H'| \rangle}{\partial \varphi_k}\frac{d\varphi_k}{dx_k} = \frac{\partial \langle |H'| \rangle}{\partial \varphi_k}\left(-\frac{1}{1 + x_k^2}\right) = 0. \quad (17)$$

Таким образом, для каждого k возможны три стационарные точки:

$$x_k = \infty, \quad \varphi_k = 0, \quad \xi_k = \frac{1}{2},\ w_k = 1,\ t_k = 0, \quad (18)$$

$$x_k = -\infty, \quad \varphi_k = \pi, \quad \xi_k = -\frac{1}{2},\ w_k = 0,\ t_k = 0, \quad (19)$$

$$x_k \ \text{конечно}, \quad \frac{\partial \langle |H'| \rangle}{\partial \varphi_k} = 0, \quad 0 < \varphi_k < \pi, \quad t_k > 0, \quad 0 < w_k < 1. \quad (20)$$

Стационарные точки (18) и (19) соответствуют состояниям, в которых на k-й подоболочке нормальная плотность строго равна 1 или 0, а аномальная плотность обращается в нуль (нормальные решения). Уравнение (20) описывает состояния с $t_k > 0$ и $0 < w_k < 1$ (сверхпроводящие решения), и его можно записать в виде

$$\left(E_k - \frac{G}{2} - \lambda\right)\sin\varphi_k - \frac{G}{2}\cos\varphi_k\sin\varphi_k + \frac{G}{2}\left[\sum_l \left(j_l + \frac{1}{2}\right)\sin\varphi_l\right]\cos\varphi_k = 0$$

или

$$\left(E_k - \frac{G}{2} - \lambda\right)t_k - G\xi_k t_k + GD\xi_k = 0. \quad (21)$$

Здесь введены обозначения

$$D = \sum_l S_l\, t_l, \quad S_l = j_l + \frac{1}{2}.$$

Для каждой подоболочки l величины S_l равны числу разных пар частиц, которые образуют состояние (7).

Замечание 1. Обычно в уравнении (8) отбрасывают слагаемые, пропорциональные v_k^4 (или включают их в значения E_k с помощью перенормировки одночастичного спектра [2]), и уравнение (21) принимает вид

$$\big(E_k-\lambda\big)t_k=-GD\xi_k.$$

Возводят в квадрат левую и правую части уравнения, используют (14) и приходят к уравнениям, аналогичным (1) и (2) с корреляционной функцией $C=GD$.

Замечание 2. Условия экстремума (18) и (19) с $\varphi_k=0$ и $\varphi_k=\pi$ соответствуют нормальным решениям с $t_k=0$. Благодаря этому становится возможным описание ситуации, при которой для части подоболочек $t_k>0$, а для других подоболочек $t_l=0$. Если $t_{k'}=0$ для какой-либо подоболочки k', то из одних только уравнений (21) следовало бы, что $D=0$, а тогда и все остальные t_k были бы обязаны обратиться в нуль.

Замечание 3. Вклад состояний с разным числом частиц в $|\rangle$ оценивают с помощью дисперсии числа частиц

$$\mathcal{V}=\langle|N^2|\rangle-\langle|N|\rangle^2=2\sum_k(2j_k+1)\,t_k^2=4\sum_k S_k t_k^2.$$

Дисперсия зависит только от ненулевых t_k.

2. ОДНА И ДВЕ ПОДОБОЛОЧКИ

Начнем с рассмотрения простейших случаев.

2.1. Одна подоболочка. Если в системе имеется только одна подоболочка с одночастичными энергией E_0 и угловым моментом j_0, то уравнения (21) и (12) принимают вид

$$\left(E_0-\frac{G}{2}-\lambda\right)t_0-G\xi_0 t_0+GS_0t_0\xi_0=0, \tag{22}$$

$$2S_0\left(\xi_0+\frac{1}{2}\right)=\mathcal{N}. \tag{23}$$

При $\mathcal{N}=2S_0$ (подоболочка полностью занята) уравнение для среднего числа частиц (23) сводится к $\xi_0=1/2$, откуда следует $t_0=0$. То есть при любом G возможно только нормальное решение.

Пусть $\mathcal{N}=2S_0-2P_0$, здесь P_0 — число пар частиц, удаленных из полностью заполненной подоболочки. Тогда

$$\xi_0=\frac{1}{2}-p_0,\quad \text{где}\quad p_0=\frac{P_0}{S_0}\quad \text{и}\quad w_0=1-p_0,\quad w_0<1,$$

и существует только сверхпроводящее решение. Аномальная плотность и корреляционная функция равны

$$t_0=\sqrt{p_0(1-p_0)},$$

$$C=GD=GS_0t_0=GS_0\sqrt{p_0(1-p_0)}=\frac{G}{2}\sqrt{\mathcal{N}(2S_0-\mathcal{N})}.$$

Таким образом, в случае одной частично заполненной подоболочки корреляционная функция линейно зависит от G, поскольку ξ_0 и t_0 не зависят от G. Дисперсия числа частиц тоже не зависит от G и равна

$$\mathcal{V} = 4S_0 t_0^2 = 4S_0 p_0(1-p_0) = \frac{\mathcal{N}(2S_0 - \mathcal{N})}{S_0}.$$

Химический потенциал — линейная функция G,

$$\lambda = E_0 + G\left[\left(\frac{1}{2} - p_0\right) S_0 - (1-p_0)\right].$$

2.2. Две подоболочки. Если система содержит две подоболочки, то полная система уравнений записывается в виде

$$\begin{aligned}
&\left(E_1 - \frac{G}{2} - \lambda\right) t_1 - G t_1 \xi_1 + G\left(S_1 t_1 + S_2 t_2\right) \xi_1 = 0,\\
&\left(E_2 - \frac{G}{2} - \lambda\right) t_2 - G t_2 \xi_2 + G\left(S_1 t_1 + S_2 t_2\right) \xi_2 = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$2\left(S_1 \xi_1 + S_2 \xi_2\right) = \mathcal{N} - S_1 - S_2. \tag{25}$$

Расставим индексы 1 и 2 так, чтобы $E_2 > E_1$. При $E_2 = E_1$ мы возвращаемся (благодаря определению (5)) к системе из одной подоболочки с $S_0 = S_1 + S_2$. Чтобы упростить уравнения, введем безразмерные величины

$$\mu = \frac{\lambda - E_1 + G/2}{E_2 - E_1} \quad \text{и} \quad g = \frac{G}{E_2 - E_1}.$$

Соответственно, уравнения (24) принимают вид

$$\begin{aligned}
-\mu t_1 - g t_1 \xi_1 + g\left(S_1 t_1 + S_2 t_2\right) \xi_1 &= 0,\\
(1-\mu) t_2 - g t_2 \xi_2 + g\left(S_1 t_1 + S_2 t_2\right) \xi_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{26}$$

2.2.1. $S_1 = S_2$ ***и*** $\mathcal{N} = 2S_1$**.** Рассмотрим частный случай $S_1 = S_2$. Тогда уравнение для числа частиц (25) упрощается:

$$2S_1\left(\xi_1 + \xi_2\right) = \mathcal{N} - 2S_1.$$

При $\mathcal{N} = 2S_1$ из него сразу следует, что $\xi_2 = -\xi_1$ и $t_2 = t_1$. Уравнения (26) переходят в

$$\begin{aligned}
-\mu t_1 - g t_1 \xi_1 + 2g S_1 t_1 \xi_1 &= 0,\\
(1-\mu) t_1 + g t_1 \xi_1 - 2g S_1 t_1 \xi_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

Складываем их и получаем уравнение

$$(1-2\mu)\, t_1 = 0,$$

которое имеет два решения: $\mu = 1/2$ и $t_1 = 0$.

Решение $t_1 = 0$ отвечает нормальному состоянию, в котором $\xi_1 = \pm 1/2$ и $\xi_2 = \mp 1/2$. Минимуму энергии будут соответствовать $\xi_1 = 1/2$ ($w_1 = 1$) и $\xi_2 = -1/2$ ($w_2 = 0$). При этом значение μ произвольно. Это решение существует при любом положительном G.

Рассмотрим решение с $\mu = 1/2$ и $t_1 \neq 0$. Химический потенциал

$$\lambda = \frac{1}{2}\left(E_1 + E_2 - G\right).$$

При $t_1 \neq 0$ из первого уравнения (27), после сокращения на t_1, получаем, что

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{g\,(2S_1 - 1)}.$$

В силу уравнения (14) вещественные ненулевые t_1 существуют при $|\xi_1| < 1/2$, поэтому парные корреляции сверхпроводящего типа могут возникнуть, если только

$$g > \frac{1}{2S_1 - 1}.$$

Удобно ввести специальные обозначения для таких критических значений константы взаимодействия:

$$g_{\text{cr}} = \frac{1}{2S_1 - 1} \quad \text{и} \quad G_{\text{cr}} = \frac{E_2 - E_1}{2S_1 - 1}.$$

С их помощью выражения для ξ_1 и t_1 упрощаются:

$$\xi_1 = \frac{1}{2}\frac{g_{\text{cr}}}{g} = \frac{1}{2}\frac{G_{\text{cr}}}{G}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - \xi_1^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(g - g_{\text{cr}})(g + g_{\text{cr}})}{g^2}}.$$

Для малых g, таких что $0 < g - g_{\text{cr}} \ll g_{\text{cr}}$, выполняется (учитываем, что $g + g_{\text{cr}} \approx 2g$) $t_1 \approx \sqrt{\dfrac{g - g_{\text{cr}}}{2g}} = \sqrt{\dfrac{G - G_{\text{cr}}}{2G}}$ и $C = 2GS_1t_1 \approx S_1\sqrt{2G(G - G_{\text{cr}})}$. Такую корреляционную функцию C нельзя разложить в ряд Тейлора по G в окрестности G_{cr}. Как и в статистической механике, в данном примере зависимость C от G оказалось неаналитической. Значение G_{cr} задает точку излома функции $C(G)$

$$C(G) = \begin{cases} 0 & \text{при } G \leqslant G_{\text{cr}}, \\ GS_1\sqrt{1 - (G_{\text{cr}}/G)^2} & \text{при } G > G_{\text{cr}}. \end{cases}$$

При очень больших G, $G \gg (E_2 - E_1)/(2S_1 - 1)$,

$$C = GS_1\sqrt{1 - \frac{(E_2 - E_1)^2}{(2S_1 - 1)^2 G^2}} \approx GS_1\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(E_2 - E_1)^2}{(2S_1 - 1)^2\, G^2} + \ldots\right).$$

Первое слагаемое в разложении C по степеням G_{cr}/G не зависит от $(E_2 - E_1)$ и совпадает, как и следовало ожидать, с корреляционной функцией в модели с одной подоболочкой, параметры которой $S_0 = 2S_1$ и $p_0 = 1/2$.

Вычисленное нами критическое значение константы взаимодействия оказалось обратно пропорциональным $(2S_1 - 1)$. При этом непонятно, зависит ли $g_{\rm cr}$ от числа частиц или от числа вакансий в системе.

Замечание 4. В рассмотренном примере при $G > G_{\rm cr}$ возможны и нормальное ($w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $t_2 = t_1 = 0$), и сверхпроводящее ($w_1 = 1/2 + G_{\rm cr}/(2G)$, $w_2 = 1/2 - G_{\rm cr}/(2G)$, $t_2 = t_1 > 0$) решения. Разность энергий нормального и сверхпроводящего состояний легко вычисляется с помощью уравнения (11) при $\lambda = 0$,

$$\langle |H| \rangle_{w_2=0} - \langle |H| \rangle_{w_2>0} = S_1 \left(S_1 - \frac{1}{2} \right) G \left(1 - \frac{G_{\rm cr}}{G} \right)^2 .$$

Нижние индексы $w_2 = 0$ и $w_2 > 0$ говорят о том, что гамильтониан усредняется по волновой функции нормального или сверхпроводящего состояния соответственно. Видно, что при $G > G_{\rm cr}$ энергия нормального состояния превышает энергию сверхпроводящего.

2.2.2. $S_1 \neq S_2$ ***и*** $\mathcal{N} = 2S_1$**.** Выясним, как критическое значение константы взаимодействия зависит от числа частиц в заполненной подоболочке E_1 и числа свободных одночастичных состояний в подоболочке E_2.

При $\mathcal{N} = 2S_1$ уравнение (25) принимает вид

$$2(S_1\xi_1 + S_2\xi_2) = S_1 - S_2 \quad \text{или} \quad S_1 \left(\xi_1 - \frac{1}{2} \right) + S_2 \left(\xi_2 + \frac{1}{2} \right) = 0. \tag{28}$$

Чтобы упростить вычисления, введем новые переменные δ_1 и δ_2, такие что

$$\xi_1 = \frac{1}{2} - \delta_1 \quad \text{и} \quad \xi_2 = -\frac{1}{2} + \delta_2.$$

Из (28) следует, что неизвестные δ_1 и δ_2 связаны уравнением

$$S_1\delta_1 = S_2\delta_2,$$

из которого следует

$$\delta_1 = S_2\delta, \quad \delta_2 = S_1\delta.$$

Поскольку $-1/2 \leqslant \xi_{1,2} \leqslant 1/2$, δ может принимать значения из интервала

$$0 \leqslant \delta \leqslant \min \left(\frac{1}{S_1}, \frac{1}{S_2} \right).$$

Из (14) следует

$$t_1 = \sqrt{\delta_1(1-\delta_1)} = \sqrt{S_2\delta(1-S_2\delta)}, \quad \xi_1 = \frac{1}{2} - S_2\delta,$$
$$t_2 = \sqrt{\delta_2(1-\delta_2)} = \sqrt{S_1\delta(1-S_1\delta)}, \quad \xi_2 = -\frac{1}{2} + S_1\delta.$$

Неизвестные $\xi_{1,2}$ и $t_{1,2}$, выраженные через δ, можно подставить в уравнения (26), исключить химический потенциал и получить алгебраическое уравнение шестой степени. Анализ решений таких уравнений практически невозможен, и мы сузим задачу, разыскивая те значения константы взаимодействия G, при которых в системе начнут формироваться парные корреляции сверхпроводящего типа. Иначе говоря, при которых неизвестная δ будет бесконечно малым положительным числом.

Для бесконечно малых δ аномальные плотности $t_{1,2} \approx \sqrt{S_{2,1}\delta}$. Поэтому первое из уравнений (26) принимает вид

$$-\mu\sqrt{S_2\delta} + g(S_1 - 1)\sqrt{S_2\delta}\xi_1 + gS_2\sqrt{S_1\delta}\xi_1 = 0.$$

Поскольку мы рассматриваем $\delta > 0$ ($\delta = 0$ соответствует тривиальному решению), то левую часть уравнения можно сократить на $\sqrt{S_2\delta}$. Так же преобразуем и второе из уравнений (26). Получаем упрощенную систему уравнений

$$-\mu + g\left(S_1 - 1 + \sqrt{S_1S_2}\right)\xi_1 = 0,$$
$$1 - \mu + g\left(\sqrt{S_1S_2} + S_2 - 1\right)\xi_2 = 0,$$

исключаем μ и приходим к линейному уравнению для δ:

$$\left[\left(S_1 - 1 + \sqrt{S_1S_2}\right)S_2 + \left(S_2 - 1 + \sqrt{S_1S_2}\right)S_1\right]\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{g}. \quad (29)$$

В уравнении коэффициент при δ не зависит от g и положителен, поскольку $S_{1,2} \geqslant 1$. Поэтому δ будет положительным, если правая часть будет положительной. Правую часть перепишем в виде

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{g} = \frac{1}{g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2)} - \frac{1}{g} = \frac{g - g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2)}{g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2)g},$$

здесь

$$g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2) = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2 - 1}. \quad (30)$$

Таким образом, δ будет бесконечно малым положительным числом, если

$$0 < g - g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2) \ll g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2)\, g.$$

Выражение для $g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2)$ показывает, что число частиц (размер полностью заполненной подоболочки, $2S_1$) и число вакансий в полностью свободной подоболочке ($2S_2$) одинаково влияют на критическое значение константы взаимодействия. Такой несколько неожиданный результат можно объяснить тем, что гамильтониан (4) содержит равные матричные элементы для процессов рождения и уничтожения пары частиц в подоболочке E_1 и рождения пар частиц в подоболочке E_2.

Вычислим корреляционную энергию, химический потенциал и дисперсию числа частиц в случае бесконечно малых δ, т. е. при G, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < G - G_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2) \ll g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2)\, G, \quad \text{где} \quad G_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2) = (E_2 - E_1)\, g_{\mathrm{cr}}(S_1, S_2).$$

Определим δ из (29), после чего получим δ_1 и δ_2:

$$\delta_1 = \frac{S_2}{R(S_1,S_2)}\left(\frac{1}{g_{\text{cr}}(S_1,S_2)} - \frac{1}{g}\right) = \frac{S_2}{R(S_1,S_2)}\frac{g - g_{\text{cr}}(S_1,S_2)}{g\ g_{\text{cr}}(S_1,S_2)},$$

$$\delta_2 = \frac{S_1}{R(S_1,S_2)}\left(\frac{1}{g_{\text{cr}}(S_1,S_2)} - \frac{1}{g}\right) = \frac{S_1}{R(S_1,S_2)}\frac{g - g_{\text{cr}}(S_1,S_2)}{g\ g_{\text{cr}}(S_1,S_2)},$$

$$\text{где}\quad R(S_1,S_2) = \left(S_1 - 1 + \sqrt{S_1S_2}\right)S_2 + \left(S_2 - 1 + \sqrt{S_1S_2}\right)S_1.$$

Корреляционная энергия

$$C = G\left(S_1t_1 + S_2t_2\right) \approx G\left(S_1\sqrt{\delta_1} + S_2\sqrt{\delta_2}\right) =$$
$$= G\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)\sqrt{\frac{S_1S_2\left(g - g_{\text{cr}}(S_1,S_2)\right)}{R(S_1,S_2)\,g\ g_{\text{cr}}(S_1,S_2)}}.$$

Видно, что C нельзя разложить в ряд по g в окрестности g_{cr}. Химический потенциал

$$\lambda = E_1 + \frac{1}{2}\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} - 2\right)G + \frac{\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} - 1\right)S_2}{R(S_1,S_2)}\left(1 - \frac{g}{g_{\text{cr}}(S_1,S_2)}\right)(E_2 - E_1).$$

Дисперсия числа частиц равна

$$\mathcal{V} = 4\left(S_1t_1^2 + S_2t_2^2\right) = 8\frac{S_1S_2}{R(S_1,S_2)}\left(\frac{1}{g_{\text{cr}}} - \frac{1}{g}\right),$$

т. е. $\mathcal{V}$ оказывается прямо пропорциональным разности $g - g_{\text{cr}}$ для g, незначительно превышающих критическое значение.

2.2.3. $\mathcal{N} < 2S_1$. Пусть число частиц $\mathcal{N} = 2S_1 - 2P_1$, т. е. из нижней полностью занятой подоболочки изъяты P_1 пар частиц. Мы показали в п. 2.1, что в этом случае аномальная плотность t_1 будет положительной при любом G. Необходимо выяснить, при каких G аномальная плотность t_2 будет больше нуля. Возможны два варианта. Или $t_2 > 0$ при любой положительной константе взаимодействия G, или существует некоторое критическое значение $\tilde{G}$, такое что при $0 < G < \tilde{G}$ $t_1 > 0$ и $t_2 = 0$.

При $\mathcal{N} = 2S_1 - 2P_1$ уравнение (25) принимает вид

$$2S_1\xi_1 + 2S_2\xi_2 = S_1 - 2P_1 - S_2 \quad \text{или} \quad S_1\left(\xi_1 - \frac{1}{2} + p_1\right) + S_2\left(\xi_2 + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Здесь $p_1 = P_1/S_1$. Положим $\xi_1 = 1/2 - p_1 - \delta_1$ и $\xi_2 = -1/2 + \delta_2$ и получим

$$t_1 = \sqrt{(p_1 + \delta_1)(1 - p_1 - \delta_1)} \quad \text{и} \quad t_2 = \sqrt{\delta_2(1 - \delta_2)}.$$

Неизвестные δ_1 и δ_2 связаны между собой соотношением $S_1\delta_1 = S_2\delta_2$, которое удовлетворяется выбором $\delta_1 = S_2\delta$ и $\delta_2 = S_1\delta$.

Плотность $t_2 > 0$, если $\delta > 0$. Ограничения (13) на допустимые значения $\xi_{1,2}$ приводят к неравенствам

$$0 \leqslant \delta \leqslant \min\left(\frac{1 - p_1}{S_2}, \frac{1}{S_1}\right).$$

Как и в предыдущем случае, из уравнений (26) можно получить алгебраическое уравнение шестой степени относительно δ. Получим упрощенные уравнения для бесконечно малых положительных δ, для которых

$$t_1 = \sqrt{p_1(1-p_1)} + \frac{1}{2}\frac{1-2p_1}{\sqrt{p_1(1-p_1)}} S_2\delta + o(\delta),$$
$$t_2 = \sqrt{S_1\delta}\left(1 - \frac{1}{2}S_1\delta + o(\delta)\right).$$

Символом $o(x)$ обозначены такие функции от x, что $o(x)/x \to 0$ при $x \to 0$.

Для $0 < \delta < 1$ выполняются неравенства $0 < \delta < \sqrt{\delta} < 1$, поэтому разложение $t_{1,2}$ следует проводить по $\sqrt{\delta}$, а не по δ. Удерживая $\sqrt{\delta}$ в нулевой и первой степенях, получаем приближенные значения

$$t_1 = \sqrt{p_1(1-p_1)}, \qquad \xi_1 = 1/2 - p_1,$$
$$t_2 = \sqrt{S_1\delta}, \qquad \xi_2 = -1/2.$$

Из точной системы уравнений (26) следуют приближенные уравнения

$$-\mu - g\left(\frac{1}{2} - p_1\right) + g\left(S_1 + S_2\sqrt{\frac{S_1\delta}{p_1(1-p_1)}}\right)\left(\frac{1}{2} - p_1\right) = 0,$$
$$(1-\mu)\sqrt{S_1\delta} + \frac{g}{2}\sqrt{S_1\delta} - \frac{g}{2}\left(S_1\sqrt{p_1(1-p_1)} + S_2\sqrt{S_1\delta}\right) = 0.$$

Решениями приближенной системы будут

$$\mu = g\left(\frac{1}{2} - p_1\right)\left(S_1 - 1 + S_2\sqrt{\frac{S_1\delta}{p_1(1-p_1)}}\right),$$
$$t_2 = \sqrt{S_1\delta} = \frac{g}{2}\,\frac{S_1\sqrt{p_1(1-p_1)}}{1 + g\left(1 + p_1(S_1-1) - (S_1+S_2)/2\right)}.$$

При вычислении t_2 мы отбросили слагаемое, пропорциональное $S_1\delta$, которое появилось во втором уравнении приближенной системы из произведения $\mu\sqrt{S_1\delta}$.

Из полученных решений видно, что аномальная плотность t_2 будет бесконечно малым положительным числом при произвольном бесконечно малом положительном g. Корреляционная функция в этом случае приближенно равна

$$C \approx GS_1\sqrt{p_1(1-p_1)}\left(1 + \frac{G}{2\left(E_2 - E_1\right)}S_2\right).$$

Мы удержали в этом выражении только линейную по g часть t_2. Вычисленный с такой же точностью химический потенциал равен

$$\lambda \approx E_1 + G\left[\left(\frac{1}{2} - p_1\right)S_1 + p_1 - 1 + \frac{G}{2\left(E_2 - E_1\right)}\left(\frac{1}{2} - p_1\right)S_1S_2\right].$$

Легко видеть, что в первом порядке по G химический потенциал равен химическому потенциалу сверхпроводящего состояния в системе с одной частично заполненной подоболочкой.

2.2.4. $\mathcal{N} = 2S_1 + 2Q$**,** $0 < Q < S_2$**.** Пусть число частиц таково, что подоболочка E_1 заполнена полностью, а подоболочка E_2 — частично. Из уравнения (25) получаем

$$2\left(S_1\xi_1 + S_2\xi_2\right) = S_1 - S_2 + 2Q,$$
$$S_1\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\right) + S_2\left(\xi_2 + \frac{1}{2} - q\right) = 0, \quad q = \frac{Q}{S_2}.$$

Положим $\xi_1 = 1/2 - \varepsilon_1$ и $\xi_2 = -1/2 + q + \varepsilon_2$. Неизвестные ε_1 и ε_2 связаны уравнением $S_1\varepsilon_1 = S_2\varepsilon_2$, решение которого запишем в виде $\varepsilon_1 = S_2\varepsilon$ и $\varepsilon_2 = S_1\varepsilon$.

Как и в предыдущем случае, для выяснения условий возникновения парных корреляций мы удерживаем слагаемые, пропорциональные бесконечно малым $\sqrt{\varepsilon}$ в нулевой и первой степени, и получаем

$$\xi_1 = \frac{1}{2} - S_2\varepsilon \approx \frac{1}{2}, \qquad t_1 = \sqrt{S_2\varepsilon\left(1 - S_2\varepsilon\right)} \approx \sqrt{S_2\varepsilon},$$
$$\xi_2 = -\frac{1}{2} + q + S_1\varepsilon \approx -\frac{1}{2} + q, \qquad t_2 = \sqrt{\left(q + S_1\varepsilon\right)\left(1 - q - S_1\varepsilon\right)} \approx \sqrt{q\left(1 - q\right)}.$$

Подставляем эти приближенные значения в систему (26), сокращаем второе уравнение на отличное от нуля t_2 и извлекаем μ и t_1 из полученной пары связанных линейных уравнений

$$\mu \approx 1 + g\left(q - \frac{1}{2}\right)\left[S_2 - 1 + S_1\frac{t_1}{t_2}\right],$$
$$t_1 \approx \sqrt{S_2\varepsilon} = \frac{g}{2}\frac{S_2\sqrt{q\left(1 - q\right)}}{1 + g\left[1 + \left(S_2 - 1\right)q - \left(S_1 + S_2\right)/2\right]} \approx \frac{g}{2}S_2\sqrt{q(1 - q)}.$$

По полученным значениям t_1 и t_2 вычисляем корреляционную функцию и химический потенциал:

$$C \approx GS_2\sqrt{q\left(1 - q\right)}\left(1 + \frac{G}{2(E_2 - E_1)}S_1\right),$$
$$\lambda \approx E_2 + G\left[\left(q - \frac{1}{2}\right)S_2 - q + \frac{G}{2(E_2 - E_1)}\left(q - \frac{1}{2}\right)S_1S_2\right].$$

Заметим, что в первом порядке по g эти корреляционная функция и химический потенциал воспроизводят точные решения для случая одной открытой подоболочки.

В последних двух примерах мы показали, что если в системе из двух подоболочек одна из подоболочек заполнена частично, то обе аномальные плотности будут отличны от нуля (сверхпроводящее решение возможно) при сколь угодно малых положительных константах взаимодействия. Химический потенциал располагается вблизи энергии одночастичных состояний, образующих открытую подоболочку. Нормального решения в такой системе нет.

3. НЕСКОЛЬКО ПОДОБОЛОЧЕК

Пусть в системе имеется $\mathcal{M}$ подоболочек, $\mathcal{M} > 2$. Пронумеруем подоболочки так, чтобы $E_k \leqslant E_l$ при $k < l$. В модели невзаимодействующих частиц в основном состоянии с ростом числа частиц подоболочки будут заполняться постепенно:

от подоболочек с меньшими одночастичными энергиями к подоболочкам с большими энергиями. Обозначим номер подоболочки с наибольшей энергией, на которой еще есть частицы, через F. Таким образом, число частиц в системе равно

$$\mathcal{N} = \sum_{k=1}^{F} 2S_k - 2P,$$

где P — число пар частиц, которое необходимо добавить, чтобы заполнить подоболочку F полностью. Если $P = 0$, то мы рассматриваем систему с заполненными подоболочками. В противном случае, $0 < P < S_F$, мы имеем дело с системой с открытой подоболочкой.

Условие сохранения числа частиц в среднем, (12), можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{F-1} S_k \left(\xi_k - \frac{1}{2}\right) + S_F \left(\xi_F - \frac{1}{2} + p_F\right) + \sum_{k=F+1}^{\mathcal{M}} S_k \left(\xi_k + \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{31}$$

Здесь $p_F = P/S_F$. От неизвестных ξ_k перейдем к неизвестным δ_k

$$\xi_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \delta_k, & 1 \leqslant k < F, \\ \dfrac{1}{2} - p_F - \delta_k, & k = F, \\ -\dfrac{1}{2} + \delta_k, & F < k \leqslant \mathcal{M}, \end{cases}$$

которые связаны друг с другом соотношением

$$\sum_{k=1}^{F} S_k \delta_k = \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l \delta_l. \tag{32}$$

Из условий $-1/2 < \xi_k < 1/2$, справедливых для всех k, следуют ограничения на область изменения δ_k:

$$0 < \delta_k < 1 \text{ при } k \neq F \text{ и } -p_F < \delta_F < 1 - p_F.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае δ_F может быть не только положительным, но и отрицательным числом. Как следует из уравнения (14), аномальные плотности

$$t_k = \begin{cases} \sqrt{\delta_k(1-\delta_k)}, & k \neq F, \\ \sqrt{(p_F + \delta_F)(1 - p_F - \delta_F)}, & k = F. \end{cases}$$

Уравнения (21) переходят в систему

$$\begin{aligned} \left[E_k - G\left(1 - \delta_k\right) - \lambda\right] t_k + GD \left(\frac{1}{2} - \delta_k\right) &= 0, \qquad 1 \leqslant k < F, \\ \left[E_F - G\left(1 - p_F - \delta_F\right) - \lambda\right] t_F + GD \left(\frac{1}{2} - p_F - \delta_F\right) &= 0, \\ \left[E_l - G\delta_l - \lambda\right] t_l - GD \left(\frac{1}{2} - \delta_l\right) &= 0, \qquad F < l \leqslant \mathcal{M}, \end{aligned} \tag{33}$$

которая связывает λ, δ_k и t_k, $k = 1, \ldots, \mathcal{M}$.

3.1. $p_F > 0$. Для открытой подоболочки $p_F > 0$. Ищем условия, при которых все δ_k с $k \neq F$ будут бесконечно малыми положительными числами. Из уравнения (32) следует, что тогда δ_F будет тоже бесконечно малым числом того же порядка, как и δ_k. Аномальные плотности равны

$$\begin{aligned} t_F &= \sqrt{p_F(1-p_F)} + \frac{1}{2}\frac{1-2p_F}{\sqrt{p_F(1-p_F)}}\delta_F + o(\delta_F), \\ t_k &= \sqrt{\delta_k}\left(1 - \frac{1}{2}\delta_k + o(\delta_k)\right), \quad k \neq F. \end{aligned} \tag{34}$$

Для бесконечно малых δ_k с $k \neq F$ выполняется неравенство $0 < \delta_k < \sqrt{\delta_k}$, поэтому величиной первого порядка малости считаем $\sqrt{\delta_k}$ и будем удерживать $\sqrt{\delta_k}$ в нулевой и первой степенях. Соответственно, получаем

$$t_k \approx \sqrt{\delta_k}, \quad k \neq F, \quad t_F \approx \sqrt{p_F\,(1-p_F)},$$
$$D \approx S_F\sqrt{p_F\,(1-p_F)} + \sum_{l \neq F} S_l\sqrt{\delta_l} \approx S_F\sqrt{p_F\,(1-p_F)}.$$

В последнем выражении мы пренебрегли слагаемыми, пропорциональными $S_l\sqrt{\delta_l}$, поскольку они бесконечно малы по сравнению с $S_F\sqrt{p_F\,(1-p_F)}$. Подставляем эти приближенные выражения в уравнения (33) и получаем

$$\lambda = E_F + \left[\left(\frac{1}{2} - p_F\right)S_F - (1-p_F)\right]G,$$
$$t_k = \frac{1}{2}S_F\sqrt{p_F(1-p_F)}\frac{G}{E_F - E_k} + o\left(\frac{G}{E_F - E_k}\right), \quad 1 \leqslant k < F,$$
$$t_l = \frac{1}{2}S_F\sqrt{p_F(1-p_F)}\frac{G}{E_l - E_F} + o\left(\frac{G}{E_l - E_F}\right), \quad F < l \leqslant \mathcal{M}.$$

Корреляционная функция и дисперсия числа частиц соответственно равны

$$C \approx G\,S_F\sqrt{p_F(1-p_F)}\left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{F-1} S_k\frac{G}{E_F - E_k} + \frac{1}{2}\sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l\frac{G}{E_l - E_F}\right),$$
$$\mathcal{V} \approx S_F\,p_F(1-p_F)\left[4 + \sum_{k=1}^{F-1} S_F S_k\left(\frac{G}{E_F - E_k}\right)^2 + \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_F S_l\left(\frac{G}{E_l - E_F}\right)^2\right].$$

Для малых констант взаимодействия и корреляционная функция, и дисперсия числа частиц зависят прежде всего от ненулевой аномальной плотности открытой подоболочки. При этом справедливы неравенства

$$C > GS_F\sqrt{p_F(1-p_F)} \quad \text{и} \quad \mathcal{V} > 4S_F\,p_F(1-p_F).$$

Отметим, что при $G \to 0$ дисперсия $\mathcal{V}$ ограничена снизу положительным числом.

Видно, что взаимодействие распространяет влияние ненулевой t_F на все подоболочки в системе так, что аномальные плотности отличаются от нуля на всех подоболочках, охваченных взаимодействием. Таким образом, в системе одинаковых нуклонов, имеющей открытую подоболочку, сверхпроводящее решение существует при сколь угодно малой константе притягивающего взаимодействия.

3.2. $p_F = 0$**.** Рассмотрим систему с заполненными подоболочками, в которой $p_F = 0$. Предположим, что все E_k для $1 \leqslant k < F$ равны E_F и все E_l для $F < l \leqslant \mathcal{M}$ равны E_{F+1}. Тем самым мы возвращаемся к задаче с двумя подоболочками, для которых

$$\widetilde{S}_F = \sum_{k=1}^{F} S_k \quad \text{и} \quad \widetilde{S}_{F+1} = \sum_{l=F+1}^{\mathcal{M}} S_l.$$

В п. 2.2 мы показали в этом случае, что сверхпроводящие корреляции начинают формироваться, если G превышает пороговое значение (30), равное в данном случае

$$G'_{\text{cr}} = \frac{E_{F+1} - E_F}{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\widetilde{S}_F} + \sqrt{\widetilde{S}_{F+1}}\right)^2 - 1}.$$

Заметим, что $2\widetilde{S}_F = \mathcal{N}$. При возникновении сверхпроводящих корреляций пары частиц начинают переходить из полностью занятых подоболочек в полностью свободные подоболочки. Разность $(E_{F+1} - E_F)$ оказывается наименьшей среди энергий таких переходов. Поэтому в исходной системе из $\mathcal{M}$ подоболочек G'_{cr} оказывается нижней границей для действительного критического значения константы взаимодействия G_{cr}.

В свою очередь, величина

$$G''_{\text{cr}} = \frac{E_{F+1} - E_F}{\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{S_F} + \sqrt{S_{F+1}}\right)^2 - 1},$$

равная критическому значению константы взаимодействия в задаче, в которой учитывается взаимодействие только между двумя подоболочками в системе из $\mathcal{M}$ подоболочек и пренебрегается влиянием всех остальных подоболочек, будет оценкой сверху для G_{cr}. Аномальные плотности, возникшие в подоболочках F и $F+1$, вызовут появление аномальных плотностей и в остальных подоболочках. Наше рассуждение показывает, что в системе с заполненными подоболочками при константе взаимодействия при $0 < G < G'_{\text{cr}}$ возможны только нормальные решения, все аномальные плотности равняются нулю. Если $G''_{\text{cr}} < G$, то в системе становится возможным сверхпроводящее решение, и все аномальные плотности будут больше нуля. Промежуточный случай, $G'_{\text{cr}} < G < G''_{\text{cr}}$, требует дополнительного изучения.

Замечание 5. Мы использовали простейший модельный гамильтониан (4) с постоянным притягивающим взаимодействием. Гамильтониан с реалистическим взаимодействием [4] записывается в виде

$$H = \sum_k \sum_{m_k=-j_k}^{j_k} E_k a^\dagger_{k,m_k} a_{k,m_k} - \\ - \frac{1}{4} \sum_{k,l} G_{k,l} \sum_{m_k=-j_k}^{j_k} \sum_{m_l=-j_l}^{j_l} (-1)^{j_k - m_k} a^\dagger_{k,m_k} a^\dagger_{k,-m_k} (-1)^{j_l - m_l} a_{l,-m_l} a_{l,m_l}.$$

Если все $G_{k,l}$ будут положительными числами, то качественно наши выводы, относящиеся к ядрам с открытой подоболочкой, сохранятся, поскольку уравнения (31) и (34) определяются только числом частиц в системе и взаимным расположением подоболочек и не зависят от матричных элементов оператора парного взаимодействия $G_{k,l}$.

Повторяя рассуждения из п. 3.1, получаем в первом порядке по $G_{k,l}$ выражения для химического потенциала и аномальных плотностей

$$t_F \approx \sqrt{p_F(1-p_F)}, \quad \lambda \approx E_F + \left[\left(\frac{1}{2} - p_F\right) S_F - (1-p_F)\right] G_{F,F},$$
$$t_k \approx \frac{1}{2} S_F \sqrt{p_F(1-p_F)} \frac{G_{k,F}}{E_F - E_k}, \quad 1 \leqslant k < F.$$
$$t_l \approx \frac{1}{2} S_F \sqrt{p_F(1-p_F)} \frac{G_{l,F}}{E_l - E_F}, \quad F < l \leqslant \mathcal{M}.$$

Замечание 6. В деформированных ядрах угловой момент одночастичного состояния не является хорошим квантовым числом, и каждая сферическая подоболочка с одночастичными энергией E_k и моментом j_k под влиянием аксиальной деформации одночастичного потенциала расщепляется на $(j_k + 1/2)$ пар одночастичных состояний. Состояния, принадлежащие паре, имеют одинаковые энергии, четности и абсолютные значения проекции углового момента на ось симметрии ядра, различаются знаками проекции углового момента и переходят друг в друга под действием операции обращения времени [2]. Можно сказать, что каждая подоболочка в основном состоянии деформированного ядра дважды вырождена. Чтобы в уравнениях перейти от сферических ядер к деформированным, достаточно выбрать $j_k = 1/2$ и $S_k = 1$ для всех подоболочек. Например, подставим $j_k = 1/2$ в уравнение (5), обозначим число $(-1)^{1/2-m_k}$ через σ и получим выражение $a_{s,\sigma} = u_s\alpha_{s,\sigma} + \sigma v_{s,\sigma}\alpha^{\dagger}_{s,-\sigma}$, которое совпадает с уравнением (4.5) из книги [2]. Пригодными для деформированных ядер оказываются формулы, полученные при рассмотрении систем с замкнутой подоболочкой, так как деформированное ядро может иметь открытую подоболочку только при совпадении энергий E_F и E_{F+1}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы изучили на примере системы с простейшим модельным гамильтонианом условия возникновения парных корреляций сверхпроводящего типа в сферически-симметричных четно-четных атомных ядрах. При этом учтено влияние монопольного спаривания на энергии одночастичных состояний в оболочечном ядерном потенциале.

Показано, что возникновение корреляций сверхпроводящего типа зависит от числа частиц и оболочечной структуры.

В системах с открытой подоболочкой аномальные плотности становятся положительными при любой сколь угодно малой константе связи. Новый результат, полученный в данной работе, состоит в том, что аномальные плотности становятся отличными от нуля при сколь угодно малых G на каждой подоболочке, участвующей в спаривательном взаимодействии.

В системах с заполненными подоболочками парные корреляции возникают начиная с некоторого критического значения константы взаимодействия. Если константа взаимодействия меньше критического значения, то в системе возможны только нормальные решения с нулевыми аномальными плотностями и нулевой корреляционной функцией. В работе получены грубые двухсторонние оценки критического значения константы взаимодействия, которые требуют дальнейшего уточнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belyaev S. T.* Effect of Pairing Correlations on Nuclear Properties // Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 1959. V. 31, No. 11.
2. *Соловьев В. Г.* Теория сложных ядер. М.: Наука; ГРФМЛ, 1971; Theory of Complex Nuclei. Pergamon Press, 1976.
3. Fifty Years of Nuclear BCS: Pairing in Finite Systems / Eds.: Broglia R. A. and Zelevinsky V. World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2013.
4. *Volya A., Brown B. A., Zelevinsky V.* Exact Solution of the Nuclear Pairing Problem // Phys. Lett. B. 2001. V. 509. P. 37.

Получено 19 марта 2024 г.