

КОМБИНАТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ИЗ ПЕТЛЕВОЙ КВАНТОВОЙ ГРАВИТАЦИИ

М. В. Алтайский^{a, 1}

^a Институт космических исследований РАН, Москва, 117997, Россия

Петлевая квантовая гравитация (LQG) является перспективным кандидатом на роль квантовой теории гравитации. Однако она содержит в себе концептуальное противоречие: стартуя с действия Эйнштейна–Гильберта и описывая пространство-время без материи, мы вряд ли сможем определить само пространство-время иначе, чем систему отношений между полями материи. Здесь, следуя идее Пенроуза о комбинаторном пространстве-времени, мы переформулируем петлевую квантовую гравитацию исключительно в терминах полей материи.

Loop quantum gravity is a perspective candidate for the quantum theory of gravity. However, there is a conceptual controversy in it: having started from the Einstein–Hilbert action and describing spacetime without matter, we can hardly define spacetime as anything other than a set of relations between matter fields. Here, following the Penrose idea of combinatorial spacetime we reformulate loop quantum gravity theory solely in terms of the matter fields.

PACS: 04.60.–m; 04.60.Pp

ВВЕДЕНИЕ

Объединение квантовой механики (КМ) и общей теории относительности (ОТО) кажется самой сложной проблемой физики на протяжении уже более ста лет. Квантовая механика, возникшая из преобразования скобок Пуассона классической механики в коммутаторы операторов в КМ, наследует привилегированную роль времени t как основы теории. Общая теория относительности, напротив, является теорией, инвариантной относительно общекоординатных преобразований $\text{Diff}(4)$:

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x). \quad (1)$$

Она должна рассматривать все координаты $\mu = 0, 1, 2, 3$ на равных основаниях, при этом временная координата $x^0 = ct$ не имеет каких-либо предпочтений. С тех пор как проблема была впервые осознана, остается открытым вопрос: что важнее, ОТО или КМ?

Известные подходы к квантованию гравитации можно условно разделить на два класса: а) объединенные теории, где гравитационная сила возникает из некоторого

¹E-mail: altaisky@cosmos.ru

универсального взаимодействия на тех же основаниях, что и электрослабое и сильное взаимодействия; б) геометрический подход, основанный на Diff(4)-инвариантности общей теории относительности, где гравитация рассматривается отдельно от других физических взаимодействий. Первый подход был вдохновлен теорией суперструн [1, 2], которая позже была расширена до M -теории [3, 4] и тесно связана с суперсимметрией. Отсутствие экспериментальных свидетельств существования каких-либо частиц-суперпартнеров является реальной проблемой для нее. Второй подход по существу основан на общекоординатной инвариантности (1) ОТО и на функционале действия Эйнштейна–Гильберта, который вытекает из нее:

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (2)$$

где R — скаляр Риччи, а Λ — космологическая постоянная.

Наиболее известным, хотя и не общепринятым подходом второго класса является *петлевая квантовая гравитация* (LQG) [5–7]. Она не претендует на описание полей материи, но демонстрирует интересные результаты в квантовании площади и объема [5–7]. Граница между этими двумя классами довольно расплывчата и включает групповую теорию поля (GFT) и матричные модели [8], а также ряд других подходов, которые мы не будем здесь перечислять. Проблема взаимной согласованности между петлевой квантовой гравитацией и теорией струн также является предметом активного обсуждения [9]. Важной особенностью обоих подходов является предположение о непрерывном дифференцируемом многообразии. Это может привести к противоречиям в квантовой физике и по-прежнему быть признаком большего доверия к ОТО, чем к КМ.

В ОТО пространство-время описывается метрическим тензором $g_{\mu\nu}(x)$, который может быть определен, по крайней мере в принципе, из решения уравнений Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где $T_{\mu\nu}$ — тензор энергии-импульса полей материи, а G — константа Ньютона. Таким образом, если мы знаем $T_{\mu\nu}$, то можем определить метрику и кривизну.

В квантовой теории, и особенно в петлевой квантовой гравитации, процедура квантования начинается с «чистого пространства-времени» (2), и не ясно, что именно квантуется, поскольку нет полей материи ($T_{\mu\nu} \equiv 0$), а любое квантовое измерение длины или времени может произойти только благодаря полям материи. Проблема была понята довольно давно, и предложенным решением было выразить все метрические свойства исключительно в терминах измеримых величин [10]. Впоследствии это стали называть *спиновыми сетями* Пенроуза и *комбинаторным пространством-временем* соответственно.

Несмотря на весьма элегантную формальную схему построения комбинаторного пространства-времени, ее практическая реализация была дана только в нерелятивистских условиях [10]. В этой статье мы предлагаем локально лоренц-инвариантную реализацию комбинаторного пространства-времени Пенроуза, используя релятивистские спиновые сети полей материи. Новизна исследования заключается в том, что

вместо непрерывного оператора голономии, обычно используемого в петлевой квантовой гравитации, мы используем своего рода дискретизацию Редже, при которой все эффекты кривизны сосредоточены в вершинах графа взаимодействия.

1. СПИНОВЫЕ СЕТИ И КВАНТОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Концепции *комбинаторного пространства-времени* и *спиновых сетей* были введены в работе [10]. Вопрос заключался в том, что означают *направление* и *угол между двумя направлениями* в нерелятивистской квантовой механике.

Предположим, у нас есть электрон или любая другая частица со спином $\hbar/2$. Измерение проекции его спина на произвольно выбранную координатную ось дает одно из двух возможных значений $\pm\hbar/2$. Если у нас есть *пара электронов*, то проекция полного спина либо может быть нулем для синглетного состояния пары, либо может быть выбрана с разными вероятностями из $(-\hbar, 0, \hbar)$ для триплетного состояния. Нет направлений, связанных с синглетным состоянием. Оно инвариантно относительно вращений, но есть одно направление, связанное с триплетным состоянием. Для системы из N частиц со спином $\hbar/2$ максимальное значение спина равно $(\hbar N)/2$. При этом имеется максимум $N + 1$ возможных проекций спина. Используя правила сложения угловых моментов, мы можем сказать что-то о корреляциях между блоками частиц материи. Если нам удастся определить «направление в пространстве», связанное с блоком достаточно большого числа частиц со спином $\hbar/2$, то мы также сможем определить угол между направлениями двух таких блоков, $M, N \gg 1$. Схема такого мысленного эксперимента приведена на рис. 1.

Сравнение направлений больших блоков производится операционно, как такое взаимодействие этих блоков, при котором мы отделяем один кубит от N -блока и затем присоединяем его к M -блоку, см. рис. 1. Мы можем ожидать два возможных исхода такого мысленного эксперимента: либо M -блок становится $(M + 1)$ -блоком, либо он становится $(M - 1)$ -блоком. В первом случае мы заключаем, что блоки были *параллельны* до того, как эксперимент был завершен, во втором — что они были *антипараллельны*. Здесь N -блок понимается как сущность, способная иметь $N + 1$ проекцию спина. В общем случае, вероятность получения $(M + 1)$ -блока определяет угол θ :

$$P(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta). \quad (4)$$

Имея достаточное число копий таких блоков, мы можем оценить углы между блоками как рациональные вероятности $P = m/n$ получения $(M + 1)$ -блоков из M -блоков; m — количество успехов, n — общее количество экспериментов. Таким образом, направления могут быть введены только в том случае, если у нас есть некоторые блоки частиц материи с достаточно большим полным спином. Не существует «направлений» для одного фермиона со спином $1/2$.

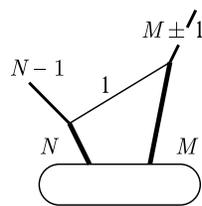


Рис. 1. Перенос кубита от N -блока к M -блоку может привести к любому из $(M \pm 1)$ -блоков. Схема из статьи [10]

Схема, представленная на рис. 1, не включает время — она включает только объекты и преобразования этих объектов. На современном языке теории категорий ребра графа рис. 1 — блоки спинов — являются *объектами*, а вершины графа — *морфизмами* [11]. Отсутствие времени здесь вполне естественно, поскольку метод основан на операторе углового момента, определяемом только одной фундаментальной константой \hbar :

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}\hat{L}_k. \quad (5)$$

Для измерения времени и длины требуется другая фундаментальная константа c .

Каждая частица со спином $1/2$ (кубит) на таких диаграммах представлена сплошной линией. N -кубитный блок представлен пучком из N линий. Диаграммы, обозначающие переход между такими блоками, известны как спиновые сети Пенроуза. Чтобы обеспечить сохранение углового момента в каждой вершине, линия фермиона, входящая в вершину из одного пучка, должна выходить из другого; обратные пути через одни и те же пучки не допускаются (рис. 2).

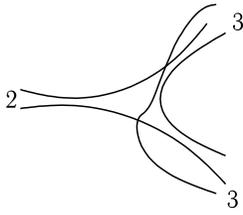


Рис. 2. Структура вершины спиновой сети

Оригинальные спиновые сети были, по сути, квантовыми схемами операций, выполняемых над блоками частиц со спином $\hbar/2$, такими, что в каждой вершине преобразования сохраняется угловой момент. Другими словами, это графическая техника, описывающая манипуляции с блоками частиц, преобразующихся при вращениях в соответствии с представлениями группы $SU(2)$ так, что каждая вершина взаимодействия (интертвинер), умноженная на все смежные ребра, остается инвариантной относительно $SU(2)$ вращений. Позже это свойство было обобщено на произвольную группу Ли. Формально, спиновая сеть

$$\mathcal{S} = (\Gamma, j_l, n_r) \quad (6)$$

представляет собой граф Γ с набором ребер $\{j_l\}_l$, помеченных представлениями группы Ли G , и набором вершин $\{n_r\}_r$, построенных так, что комбинация всех входящих ребер с вершиной является синглетом по группе G . Каждому ребру j_l , соединяющему вершины n_i и n_j , можно сопоставить элемент группы $g_{ij} \in G$, так что $g_{ij} = g_{ji}^{-1}$.

Техника спиновых сетей, основанная на представлениях группы $SU(2)$, вошла в теорию гравитации путем, кардинально отличающимся от исходной формулировки Р. Пенроуза. А именно, из абстрактной математической идеи трехмерной гравитации, основанной на функционале действия

$$S[g] = \int_{\mathcal{M}_3} d^3x \sqrt{g} R, \quad (7)$$

инвариантом относительно группы диффеоморфизмов $\text{Diff}(3)$. Как было показано Понцано и Редже [12], действие (7) может быть приближено дискретной суммой

$$S_{\text{Ponzano-Regge}} = \sum_{\text{tetrahedra}} \sum_{i=1}^6 \theta_i \left(j_i + \frac{1}{2} \right) \quad (8)$$

по разбиениям многообразия \mathcal{M}_3 на тетраэдры с длиной ребер (взятых в соответствующих достаточно малых единицах) $l_i = j_i + 1/2$, где θ_i — угол между внешними

нормальными к граням тетраэдра, соединяемым i -м ребром. Полуцелые числа j_i сопоставляются спину представлений группы $SU(2)$ с помощью коэффициентов Рака [12]. Отдельный тетраэдр из разбиения (8) с ребрами, помеченными «спиновыми индексами» j_k , схематически изображен на рис. 3. В действии (7), по построению, нет ничего об угловом моменте — использована лишь инвариантность относительно общекоординатных преобразований — смыслом «спиновых индексов» j_k являются лишь длины. В данной формулировке также не сказано ничего ни о каких частицах — в противоположность исходной модели, предложенной Р. Пенроузом [10].

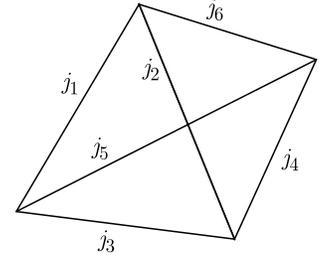


Рис. 3. Тетраэдр, помеченный спиновыми индексами на его ребрах

Прорыв в применении спиновых сетей к теории гравитации произошел тогда, когда метрический тензор $g_{\mu\nu}(x)$ в действии Эйнштейна–Гильберта (2) был заменен на аштекарговскую связность A_{μ}^{IJ} и тетрады e_{μ}^I [13].

Все локальные физические измерения описываются с помощью квантовополевых амплитуд, вычисляемых в плоском пространстве Минковского с метрикой $\eta_{IJ} = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$. Чтобы описать кривое четырехмерное пространство \mathcal{M}_4 , мы можем использовать формализм 1-форм

$$e^I(x) = e_{\mu}^I(x) dx^{\mu}.$$

Матрицы e_{μ}^I называют *тетрадами*. Если многообразие \mathcal{M}_4 является плоским и совпадает с пространством Минковского $e_{\mu}^I \equiv \delta_{\mu}^I$, то в остальных случаях e_{μ}^I являются функциями координат $x \in \mathcal{M}_4$. Метрика $g_{\mu\nu}(x)$ может быть выражена в терминах тетрад:

$$g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}^I(x) e_{\nu}^J(x) \eta_{IJ}. \quad (9)$$

Параллельный перенос вектора e^I из точки x в точку $x + dx$ на многообразии \mathcal{M}_4 задается ковариантной производной

$$De^I = de^I + \omega^I{}_J \wedge e^J,$$

где $\omega^I{}_J = \omega_{\mu J}^I dx^{\mu}$ — спиновая связность, принимающая значения в алгебре Ли $SO(3, 1)$.

Если спиновая связность ω группы $SO(3, 1)$ определена так, чтобы поддерживать тетрады ковариантно-постоянными,

$$\partial_{[\mu} e_{\nu]}^I + \omega_{[\mu J}^I [e_{\nu]}^J] = 0, \quad (10)$$

то функционал действия (2) принимает вид

$$S[e, \omega] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x ee^{\mu}{}_I e^{\nu}{}_J R_{\mu\nu}^{IJ}[\omega], \quad (11)$$

где

$$R^{\mu}{}_{\nu\tau\sigma}[g[e]] = e_{\tau}^{\mu} e_{\nu J} R_{\tau\sigma}^{IJ}[\omega[e]]$$

— тензор кривизны, определяемый связностью A , где введено обозначение $e \equiv \det(e_I^\mu)$. Вводя комплекснозначную аштекаровскую связность

$$A_\mu^{IJ}[\omega] = \omega_\mu^{IJ} - \frac{i}{2} \epsilon^{IJ}{}_{MN} \omega_\mu^{MN}, \quad (12)$$

мы можем переписать действие Эйнштейна–Гильберта в виде калибровочной теории

$$S[e, A] = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x e_{\mu I} e_{\nu J} F_{\tau\sigma}^{IJ}[A] \epsilon^{\mu\nu\tau\sigma}, \quad (13)$$

где

$$F_{\mu\nu}^{IJ}[A] = R_{\mu\nu}^{IJ}[\omega] - \frac{i}{2} \epsilon^{IJ}{}_{MN} R_{\mu\nu}^{MN}[\omega],$$

см., например, [14].

Будучи записанным в аштекаровских переменных, квантовое состояние пространства-времени становится состоянием $SL(2, \mathbb{C})$ -связности A , описываемым вектором состояния $\psi(A)$ в гильбертовом пространстве состояний. По этой причине квантование в аштекаровских переменных также называют *коннектодинамикой*, в отличие от *геометродинамики*, квантования в терминах (g_{ab}, π^{ab}) .

Связность A может быть естественным образом охарактеризована с помощью оператора голономии

$$U_\gamma[A] = \mathcal{P} e^{\int_\gamma ds \dot{\gamma}^\mu(s) A_\mu^B(x(s)) T_B}, \quad (14)$$

где интегрирование проводится по кривой $\gamma = \gamma(s)$, $\dot{\gamma}^\mu(s)$ — касательный вектор к кривой $\gamma(s)$, а \mathcal{P} обозначает упорядочение операторов вдоль пути интегрирования, T_B — генераторы группы симметрии в представлении, соответствующем связности A . (Это может быть группа $SO(3)$ в теории Редже, группа $SL(2, \mathbb{C})$ для спиновой связности и т. д.) Каждое состояние геометрии, т. е. как именно заданная связность A вращает поля материи, может быть записано в петлевом базисе $\{|\alpha\rangle\}$:

$$\psi_\alpha[A] = \text{Tr}(U_\alpha[A]), \quad (15)$$

где α пробегает множество всех возможных петель. Базис петель $\{|\alpha\rangle\}$ является переполненным и образует фрейм [5]. Использование петлевого базиса в теории, инвариантной относительно диффеоморфизмов, является достаточно естественным в дифференциальной геометрии [15]. Петлевая квантовая гравитация, в дополнение к этим основаниям, имеет глубокие корни в теории графов [16].

Квантование теории, основанное на самодуальной связности Аштекара, естественным образом приводит к квантованию площади, что наиболее просто выражается в $d = 3$ измерениях. В случае двумерной поверхности Σ ее площадь задается вектором

$$L_\Sigma^I = \frac{1}{2} \epsilon^I{}_{JK} \int_\Sigma e^J \wedge e^K, \quad (16)$$

где $e^J = e_\mu^J dx^\mu$ — 1-форма. Если поверхность Σ натянута на векторы e_x и e_y , касательные к поверхности, то площадь поверхности Σ дается интегралом от абсолютного

значения векторного произведения $e_z = e_x \times e_y$ по этой поверхности, или в компонентных обозначениях,

$$S = \int_{\Sigma} d^2x \sqrt{\delta_{IJ} e_z^I e_z^J}. \quad (17)$$

При каноническом квантовании гравитации переменные Аштекара (A_I^a, e_b^J) рассматриваются как канонические координаты и сопряженные им импульсы соответственно. Это означает, что в квантовой теории мы должны сделать замену

$$e_a^I \rightarrow -i\hbar \frac{\delta}{\delta A_I^a}.$$

Вариация оператора (14) по отношению к канонической координате дает

$$\frac{\delta}{\delta A_I^a} U_{\gamma}[A] = ie_a T^I U_{\gamma}[A]. \quad (18)$$

Так что в квантовой теории аналог классического уравнения (17) принимает вид

$$\hat{A}_{\Sigma} \Psi_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{p=P_1}^{P_n} \sqrt{-\delta_{IJ} \frac{\delta}{\delta A_I^z} \frac{\delta}{\delta A_J^z}} \Psi_{\tilde{\Gamma}}, \quad (19)$$

где \hat{A}_{Σ} — оператор площади поверхности Σ ; $\Psi_{\tilde{\Gamma}}$ — волновая функция квантовой геометрии, определяемой связностью A для спиновой сети с графом $\tilde{\Gamma}$, пересекающим Σ в n точках, как показано на рис. 4. Волновая функция такой геометрии, определяемая связностью A , может быть записана в виде

$$\Psi_{\tilde{\Gamma}} = \Psi(U_1, U_2, \dots, U_N), \quad (20)$$

где $U_k[A]$ — оператор голономии для k -го ребра графа $\tilde{\Gamma}$, пересекающего поверхность Σ . Скалярное произведение двух состояний геометрии на графе $\tilde{\Gamma}$ определяется обычным образом [6]:

$$\langle \Psi_{\tilde{\Gamma}} | \Phi_{\tilde{\Gamma}} \rangle = \int dU_1 \dots dU_N \bar{\Psi}(U_1, \dots, U_N) \Phi(U_1, \dots, U_N).$$

В случае группы вращений $SO(3)$ свертка латинских индексов I, J в выражении (19) дает квадрат оператора углового момента $\hat{j}^2 = \sum_{I=1}^3 (T^I)^2$, из чего следует, что оператор площади \hat{A}_{Σ} имеет дискретный спектр собственных значений:

$$\hat{A}_{\Sigma} \Psi_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{p=P_1}^{P_n} \sqrt{\hat{j}^2} \Psi_{\tilde{\Gamma}} = \sum_{p=P_1}^{P_n} \sqrt{j_p(j_p + 1)} \Psi_{\tilde{\Gamma}}. \quad (21)$$

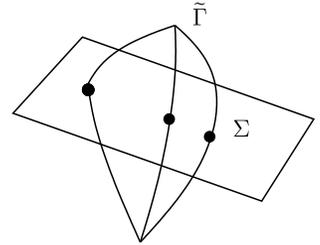


Рис. 4. Граф спиновой сети $\tilde{\Gamma}$, пересекающий поверхность Σ в $n = 3$ точках

Аналогичное, но более сложное построение может быть проведено и для оператора объема [17, 18]. Проблема здесь состоит в том, что сама поверхность Σ не была предварительно определена в терминах спиновой сети, ассоциированной с графом $\tilde{\Gamma}$.

Квантование пространства-времени, или, как это обычно принято, квантование непрерывного дифференцируемого многообразия, наделенного действием Эйнштейна–Гильберта, вытекает из наблюдения Редже, что разбиение компактного 3d-многообразия на 3d-симплексы — тетраэдры — связано с группой вращений $SO(3)$ посредством коэффициентов Рака [12]. Двумерная сфера S^2 может быть разбита на 2d-симплексы — треугольники, 3d компактное многообразие — на тетраэдры, 4d-многообразие — на 4d-симплексы и т. д. При условии, что эти симплексы достаточно малы, вся информация о кривизне многообразия закодирована в дефектах углов разбиения: в вершинах в 2d, на ребрах в 3d, на гранях в 4d. Ребра и грани считаются плоскими в этой процедуре триангуляции [19]. Граф $\tilde{\Gamma}$, соединяющий центры симплексов в разбиении, рассматривается как граф спиновой сети; симплексы — как кванты пространства. В случае трехмерного многообразия тетраэдры склеиваются друг с другом путем соединения их граней — треугольников, а спиновая сеть — это сеть нитей, которая удерживает тетраэдры вместе. Фрагмент триангуляции компактного 3d-многообразия тетраэдрами показан на рис. 5. Элементарная площадь — это площадь треугольника, пересеченного графом спиновой сети $\tilde{\Gamma}$.

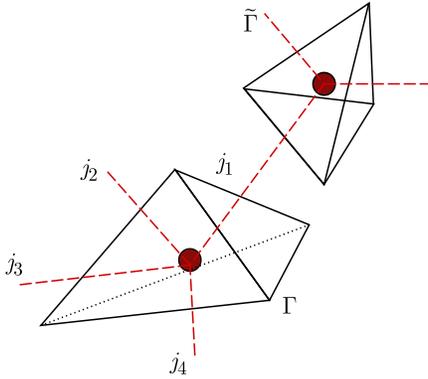


Рис. 5. Разбиение трехмерного многообразия на тетраэдры. Граф триангуляции Γ , состоящий из ребер тетраэдров и их вершин, показан сплошной линией. Дуальный ему граф $\tilde{\Gamma}$, соединяющий центры тетраэдров, показан штриховой линией

непрерывным дифференцируемым многообразием, то мы не сможем одновременно определить как граф триангуляции Γ , так и граф спиновой сети $\tilde{\Gamma}$, и будем вынуждены довольствоваться только одним из них.

Физическая проблема здесь состоит в том, что если пространство-время *не является*

2. СПИНОВЫЕ СЕТИ МАТЕРИИ

Давайте вспомним определение многообразия [15]:

Определение 1. Дифференцируемым n -мерным многообразием называется произвольное множество точек M , в котором введена следующая структура:

1. M представлено в виде объединения конечного или счетного числа областей U_q , называемых картами.

2. В каждой области U_q заданы координаты x_q^α , $\alpha = \overline{1, n}$, называемые локальными картами. Пересечение каждой пары областей $U_p \cap U_q$, если оно не пусто, само является областью (картой), в которой обе локальные карты взаимно со-

гласованы:

$$x_p^\alpha = x_p^\alpha(x_q^1, \dots, x_q^n), \quad x_q^\alpha = x_p^\alpha(x_p^1, \dots, x_p^n),$$

так что $\det(\partial x_p^\alpha / \partial x_q^\beta) \neq 0$.

С физической точки зрения координаты могут быть приписаны только *событиям* — изменениям физических частиц или систем, которые можно наблюдать. Без событий не может быть координат [20]. Это означает, что в физической теории пространства-времени карты U_q должны быть подмножествами множества событий во Вселенной.

Рассмотрение пространства-времени как набора вершин взаимодействия, помеченных координатами, согласуется с представлением Пенроуза о комбинаторном пространстве-времени. Принимая частицы материи как *объекты* (теории категорий), а вершины взаимодействия как *морфизмы*, мы приходим к обычной диаграмме Фейнмана, описывающей историю Вселенной. Другими словами, у нас есть граф триангуляции Γ , ребра которого помечены частицами материи. Здесь нет ничего о дуальном графе $\tilde{\Gamma}$. Вот почему желательно переформулировать петлевую квантовую гравитацию в терминах графа Γ , ребра которого ассоциированы с физическими частицами.

В обычной квантовой теории поля ребра диаграмм Фейнмана отождествляются с представлениями группы Пуанкаре, умноженными на соответствующее представление внутренней группы симметрии [21]. Мы не можем сделать это в искривленном пространстве, поскольку группа Пуанкаре предполагает инвариантность относительно пространственно-временных трансляций — т. е. предполагает *плоское* пространство. Вместо этого нам нужно что-то более общее, что сведется к группе Пуанкаре в пределе плоского пространства.

Подобно тому как это делается в петлевой квантовой гравитации, граф триангуляции Γ может быть составлен из элементарных ориентированных петель, которые мы будем ассоциировать с элементарными фермионами со спином $1/2$. Более точно мы можем ассоциировать фермионы с $SL(2, \mathbb{C})$ -спинорами, периодическими по параметру петли:

$$u(s) = u(s + 2\pi).$$

В этом месте проявляется отличие от обычных спиновых сетей. В технике спиновых сетей Пенроуза для каждого ребра графа имеет значение только полный угловой момент, чем обеспечивается его сохранение в каждой вершине, а вся информация о пересечении отдельных петель переносится в вершины. В нашем случае состояния отдельных частиц на ребрах графа имеют значение. Мы обозначаем двумя параллельными линиями (=) состояние со спином $J = 1$, а синглетное состояние с $J = 0$ обозначаем двумя скрещенными линиями (\times). Оба эти состояния присутствуют в разложении произведения двух фермионов со спином $1/2$ в прямую сумму,

$$D_{1/2} \otimes D_{1/2} = D_1 \oplus D_0.$$

Аналогичным образом, для случая трех фермионных линий, имеем выражение

$$D_{1/2}^3 = D_{3/2} \oplus 2D_{1/2}, \tag{22}$$

правая часть которого соответствует диаграммам, изображенным на рис. 6.

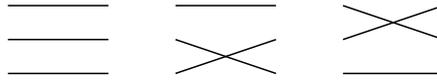


Рис. 6. Разложение произведения трех фермионных линий $D_{1/2} \otimes D_{1/2} \otimes D_{1/2}$ в сумму представлений. Направления изменения параметров петель не конкретизированы

Наша цель — построить четырехмерное пространство-время из элементарных полей материи, фермионных петель. Для одной петли без вершин взаимодействия ничего нельзя измерить. Невзаимодействующая петля — это просто отображение из S^1 в гильбертово пространство состояний полей материи:

$$S^1 \xrightarrow{u} \mathcal{H}, \quad u(s) = u(s + 2\pi). \quad (23)$$

Таким образом, невзаимодействующая петля может быть описана как

$$u(s) = \begin{pmatrix} u_1(s) \\ \vdots \\ u_N(s) \end{pmatrix}, \quad 0 < s \leq 2\pi, \quad (24)$$

где N — размерность представления. Если петля не содержит вершин (*событий*), то параметр петли s не является наблюдаемым, и все физические наблюдаемые должны быть инвариантны относительно трансляций параметра петли. Таким образом, функции от состояния петель могут быть разложены в ряды Фурье, т. е. разложены по представлениям группы трансляций петли

$$u(s) = \sum_m C_m e^{ims}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (25)$$

где «импульс» m совпадает с нётеровским током, соответствующим глобальному $U(1)$ -преобразованию фазы

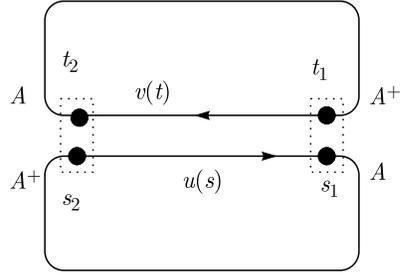
$$u \rightarrow e^{i\alpha} u, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

в функционале действия свободной петли.

Параметр петли s в нашем случае нельзя понимать непосредственно как «длину», как это имеет место для обычного преобразования Фурье в квантовой теории поля. Поскольку s не является измеримой величиной, его следует понимать как артефакт периодичности отображения петли (23). Любое определение физического расстояния (или интервала) должно основываться на событиях — вершинах графа Γ .

Если у нас имеются две петли со спином $1/2$, то путем склеивания этих петель в двух вершинах взаимодействия мы можем сконструировать бозон со спином 1 , как это показано на рис. 7. Представление бозона со спином 1 в виде тензорного представления двух спиноров $p_{\alpha\dot{\alpha}} = \lambda_\alpha \tilde{\lambda}_{\dot{\alpha}}$ — довольно распространенный метод в квантовой теории поля (см., например, [22]). По определению вершины взаимодействия петель являются операторами (морфизмами), которые изменяют входящие состояния полей, переводя их в выходящие. Диаграмма, изображенная на рис. 7, содержит две идентичные вершины, помеченные значениями петлевых параметров, (t_1, s_1) и (t_2, s_2)

Рис. 7. Конструирование бозона из двух одинаковых фермионных петель со спином $1/2$. Две вершины отвечают значениям параметров петель (s_1, t_1) и (s_2, t_2) соответственно. Матрица связности первой петли в вершине s_1 есть A . Она осуществляет вращение поля $u(s)$ в точке s_1 согласно $u(s_1 + \epsilon) = Au(s_1 - \epsilon)$



соответственно. Произведем преобразование поля $u(s)$ в вершине 1 при значении петлевого параметра $s = s_1$. Это означает

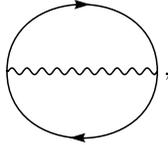
$$u(s_1 + \epsilon) = Au(s_1 - \epsilon), \epsilon \rightarrow +0, \quad (26)$$

где A — матрица преобразования поля u . Свойства периодичности поля петли (23) должны сохраняться и в присутствии вершин взаимодействия. Это означает, что матрица преобразования A^+ во второй вершине, применяемая к полю при значении параметра $s = s_2$, должна возвращать поле $u(s)$ к его исходному состоянию:

$$u(s_2 + \epsilon) = A^+u(s_1 + \epsilon) = A^+Au(s_1 - \epsilon),$$

откуда следует что $A^+A = \mathbb{I}$, поскольку преобразования полей имеют место только в вершинах, и $u(s_2 + \epsilon) = u(s_1 - \epsilon)$. Такое же рассуждение справедливо и для другой петли, соответствующей параметру t .

В предельном случае КЭД, когда аналогом диаграммы рис. 7 является вакуумная диаграмма,



мы можем считать u и v четырехкомпонентными дираковскими спинорами $u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix}$, так что матрица преобразования A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(\omega - i\nu)\sigma} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}(\omega + i\nu)\sigma} \end{pmatrix},$$

а обратная матрица A^+ связана с эрмитово-сопряженной путем преобразования четности:

$$A^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая спиноры как функции параметра петли, мы не вводили ни параметр «длины», ни параметр «массы». Оба параметра связаны с группой трансляций. В обычной КТП частицы, соответствующие ребрам фейнмановских диаграмм, отождествляются с представлениями группы Пуанкаре. Параметр массы M является меткой этих представлений, поскольку $\hat{p}^2 = M^2$ есть оператор Казимира группы Пуанкаре, в которой оператор импульса \hat{p} является генератором четырехмерных трансляций.

В случае петель у нас нет четырехмерных трансляций, а есть только одномерные трансляции вдоль каждой петли:

$$t \rightarrow t + a \bmod 2\pi.$$

Никакие наблюдения не возможны над элементарной фермионной петлей, не содержащей вершин взаимодействия. Ее длина может быть лишь по определению положена равной некоторой *минимальной различимой длине* l_0 , предположительно планковской длине $l_0 \propto l_{\text{Pl}}$. Рассматривая взаимодействие двух петель в двух вершинах, как показано на рис. 7, мы можем выделить две различных части на каждой петле. Естественно предположить, что все эти части имеют равную длину l_0 . Таким образом, длина каждой из петель на рис. 7 составляет $2l_0$, поскольку имеется ровно две вершины, в которых изменяются состояния полей. То же справедливо для произвольного числа вершин: если петля содержит N вершин, ее длину следует положить Nl_0 .

Кажется естественным измерять длину петель в единицах действия \hbar . Оператор импульса в квантовой механике $\hat{p} = -i\hbar(\partial/\partial x)$ является генератором трансляций:

$$\psi(x + \delta x) = \psi(x) + \delta x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \dots = \left(1 + i \frac{p \delta x}{\hbar} \right) \psi(x) + \dots$$

Изменение волновой функции $\psi(x)$, вызванное трансляцией на δx по координате, пропорционально целому числу минимальных квантов действия (\hbar) в действии $p\delta x$, необходимом для осуществления этой трансляции. Если петля содержит N вершин взаимодействия, то ее длина составляет $\lambda = Nl_0$ и условием квантования длины оказывается условие квантования Бора–Зоммерфельда

$$\oint p dx = 2\pi\hbar N, \quad (27)$$

которое и определяет длину петли. Если мы знаем длину петли $\lambda = Nl_0$, то ее «комптоновская» масса составит

$$M = \frac{\hbar}{\lambda c}. \quad (28)$$

Измерение длин, или более точно *интервалов*, в единицах действия хорошо согласуется с классическим пределом механики. В релятивистской механике действие частицы, обладающей массой покоя M , движущейся вдоль пространственно-временной кривой ($t = t(\tau)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$) из точки a в точку b , пропорционально интервалу, или «четырёхмерной длине» кривой:

$$S = -Mc \int_a^b ds = -Mc \int_a^b \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2}. \quad (29)$$

Для частицы с массой M подстановка

$$p^0 = \frac{Mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p = \frac{Mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \\ dx^0 = c dt, \quad dx = v dt$$

подсказывает, что выражение (29) может быть записано в виде

$$S = - \int_a^b \sqrt{(p_0 dx^0 - p dx)^2} \equiv - \int_a^b \sqrt{\left(\sum_{\mu} p_{\mu} dx^{\mu}\right)^2}. \quad (30)$$

Величины функционалов действия двух массивных частиц, движущихся в противоположных направлениях, составляющих «фотон», показанный на рис. 7, равны по значению и противоположны по знаку, они тождественно сокращают друг друга:

$$\int_a^b + \int_b^a = 0.$$

Вследствие этого *интервал* «фотона» на рис. 7 тождественно равен нулю независимо от массы M .

В теории непрерывного поля $u(s)$, определенного на петле и взятого в определенном n -мерном представлении группы внутренней симметрии, трансляции поля вдоль петли задаются ковариантной производной

$$D_s = \partial_s + \mathcal{A}(s),$$

где $\mathcal{A}(s)$ — матрица связности размером $n \times n$, которая генерирует вращения во внутреннем пространстве. Физически, в отсутствие вершин взаимодействия, никакие наблюдения не могут быть выполнены над свободной петлей, и нам придется рассматривать дискретизацию, при которой все изменения полей материи имеют место на конечном множестве из N вершин:

$$u(s_v + \epsilon) = \hat{A}(s_v)u(s_v - \epsilon), \quad \epsilon \rightarrow +0, \quad s_v \in \{s_1, \dots, s_N\}.$$

В такой постановке задачи непрерывный параметр петли s более не имеет физического смысла, и мы должны переписать эволюцию в дискретном виде

$$u^{k+1} = \hat{A}^k u^k, \quad (31)$$

как это изображено на рис. 8. Это типичный случай категории, когда поля материи u^k представляют собой объекты, а связности \hat{A}^k — морфизмы. Рассмотрим дискретизацию лагранжиана грассмановых полей материи, определенного на петле,

$$L = \frac{\alpha_{ij}}{2} (\bar{u}_i \dot{u}_j - \dot{\bar{u}}_i u_j) + \mu_{ij} \bar{u}_i u_j, \quad (32)$$

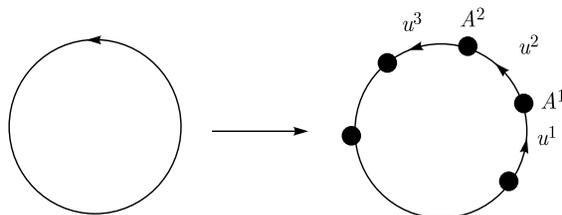


Рис. 8. Добавление вершин к свободной петле, превращающее непрерывный лагранжиан в дискретный

где α_{ij} и μ_{ij} — эрмитовы матрицы, $i, j = \overline{1, n}$, точки обозначают дифференцирование по параметру петли, а черта сверху обозначает комплексное сопряжение. Для простоты рассмотрим случай $\alpha_{ij} = \delta_{ij}$, $\mu_{ij} = M\delta_{ij}$. В дискретном случае полное изменение полей задается выражением (31), так что производная по параметру петли превращается в конечную разность:

$$L = \frac{1}{2} (\bar{u}^k (u^{k+1} - u^k) - (\bar{u}^{k+1} - \bar{u}^k) u^k) + iM\bar{u}^k u^k, \quad (33)$$

где подразумевается суммирование по индексам внутренних степеней свободы, а k играет роль дискретной координаты. Рассматривая все поля материи u^k и u^{k+1} как независимые, мы можем избежать использование связности \hat{A}^k и записать лагранжиан (33) в виде

$$L = \frac{1}{2} (\bar{u}^k u^{k+1} - \bar{u}^{k+1} u^k) + iM\bar{u}^k u^k. \quad (34)$$

Следовательно, если мы проинтегрируем по всем возможным конфигурациям полей (u^1, \dots, u^N) , то мы автоматически проинтегрируем по всем возможным геометриям $(\hat{A}^1, \dots, \hat{A}^N)$, что обеспечивается равенством (31). Чтобы получить действие всего пространства-времени, мы должны просуммировать по всем петлям со всеми вершинами взаимодействия.

Рассмотрим случай $n = 2$, когда поля u являются $SL(2, \mathbb{C})$ -спинорами, а \hat{A}^k являются $SL(2, \mathbb{C})$ -матрицами преобразований этих спиноров. Собственная ортохронная группа Лоренца $SO(3, 1)$ изоморфна группе $SL(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$. Таким образом, мы можем использовать либо левые, либо правые спиноры, чтобы построить представление группы Лоренца. Возьмем, для определенности, левые спиноры. Матрица связности \hat{A} в любой вершине может быть разложена по базису матриц Паули:

$$\hat{A} = a_0 \mathbb{I} + \sum_{i=1}^3 a_i \hat{\sigma}^i, \quad \det A = a_0^2 - \sum_{k=1}^3 a_k^2 = 1. \quad (35)$$

Некоторый вектор e^0 можно произвольно ассоциировать с первым фермионом $u^1 = \begin{pmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{pmatrix}$. В силу произвольности вектора его координаты могут быть положены $e^0 = (1, 0, 0, 0)$. Теперь применим матрицу связности к первому фермиону u^1 , чтобы получить состояние второй частицы $u^2 = \hat{A}u^1$. В силу соответствия между вращениями спиноров и лоренцевыми вращениями векторов вектор тетрады e^1 , отвечающий фермиону u^2 , запишется в виде

$$e^1_\rho = e^0_\mu \Lambda^\mu{}_\rho. \quad (36)$$

Компоненты матрицы лоренцева $SO(3, 1)$ -вращения задаются выражениями [23]:

$$\begin{aligned} \Lambda^0{}_0 &= |a_0|^2 + \sum_{k=1}^3 |a_k|^2, \\ \Lambda^k{}_0 &= a_0 \bar{a}_k + \bar{a}_0 a_k + i\epsilon^{klm} a_l \bar{a}_m, \\ \Lambda^0{}_k &= a_0 \bar{a}_k + \bar{a}_0 a_k - i\epsilon^{klm} a_l \bar{a}_m, \\ \Lambda^l{}_k &= \delta^l_k \left(|a_0|^2 - \sum_{k=1}^3 |a_k|^2 \right) + a_k \bar{a}_l + \bar{a}_k a_l + i\epsilon^{klm} (\bar{a}_0 a_m - a_0 \bar{a}_m). \end{aligned} \quad (37)$$

Таким способом каждое ребро графа триангуляции может быть ассоциировано и с полем материи u^k (в соответствии с полным спином данного ребра), и с вектором тетрады e^k . Координаты последнего должны быть выбраны таким образом, чтобы при обходе по разным петлям получались одни и те же векторы тетрад. Задав векторы тетрад (e^k) в терминах полей материи (u^k), мы полностью определяем геометрию.

Определив векторы тетрад, отвечающие ребрам графа триангуляции Γ , мы можем выразить элементы площади как *бивекторы* [24], состоящие из пар векторов тетрад, следующих друг за другом вдоль петли:

$$F^{[ij]} = \frac{1}{2} e^{[i,j]} \wedge e^{[i+1,j]} \text{ при } e_r^{[i+1,j]} = e_m^{[i,j]} \Lambda^m_r, \quad (38)$$

где j — метка петли, а i — метка ребра графа. Ребра i и $i + 1$ связаны между собой матрицей преобразования \hat{A}_j^i , действующей вдоль петли j .

Пространство-время в такой картине мира является функцией квантовых состояний всей материи во Вселенной, и в этом смысле не существует никакой специальной силы, называемой «гравитацией». Это никоим образом не исключает конструкций из четырех фермионных линий, возникающих в сети взаимодействующих петель, которые могут интерпретироваться как «гравитоны» со спином 2.

3. ИГРУШЕЧНАЯ МОДЕЛЬ ВСЕЛЕННОЙ

Топология Вселенной нам неизвестна. Все, что нам известно о Вселенной, это то, что она является локально лоренцевой и почти плоской при экспериментально достижимых энергиях. Таким образом, мы не можем сконструировать реалистическую модель Вселенной, триангулируя известное многообразие с помощью частиц материи, подобно тому как производится триангуляция компактного трехмерного многообразия в модели 3d-гравитации Редже [19]. То что мы можем сделать, это построить игрушечную модель, состоящую из нескольких фермионных петель, соединенных друг с другом в нескольких вершинах.

Рассмотрим игрушечную модель тетраэдра, шесть ребер которого соответствуют четырем фермионам и двум бозонам [25], что отвечает диаграмме Фейнмана, изображенной на рис. 9. На языке спиновых сетей эта диаграмма представима одной фермионной петлей, собранной в пучки с помощью четырех 4-валентных вершин, как это изображено на рис. 10. Сеть, показанная на рис. 10, представляет собой «2d-вселенную»: граница 3d-симплекса изоморфна двумерной сфере S^2 .

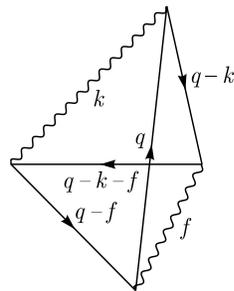


Рис. 9. Игрушечная модель пространства-времени, состоящая из 4 фермионов и 2 бозонов. Если рассматривать ее как обычную диаграмму Фейнмана в квантовой теории поля, то требование сохранения импульса в каждой вершине немедленно приведет к схлопыванию тетраэдра в двумерную плоскость. Диаграмма из работы [25]

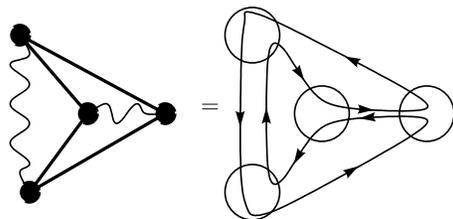


Рис. 10. Тетраэдральная диаграмма, содержащая фермионные линии со спином $1/2$ и две бозонных линии со спином 1. Она может быть перерисована в виде единственной петли, склеенной в четырех 4-валентных вершинах. Пучки из двух антипараллельных линий представляют собой бозоны. Одинарные линии представляют фермионы со спином $1/2$

Нарисовать что-либо подобное комбинаторным образом для четырехмерной Вселенной было бы чрезвычайно сложно, но возможно провести численное моделирование для небольших случайных сетей, подобно тому как это делается для случайных поверхностей [26].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построено комбинаторное пространство-время, состоящее исключительно из полей материи, что отвечает исходной идее Роджера Пенроуза [10]. Построение основано на идее Редже о том, что вся кривизна пространства-времени сосредоточена в вершинах графа триангуляции Γ [19]. Это предположение находится в разительном контрасте с обычной формулировкой петлевой квантовой гравитации [5, 7, 27]. Сменив основной объект с дуального графа $\tilde{\Gamma}$ на граф триангуляции Γ , мы сделали теорию более трактуемой с физической точки зрения, поскольку вершины графа триангуляции могут быть непосредственно интерпретированы как *физические события*, а ребра графа как поля материи, при этом сам граф Γ приобретает смысл фейнмановской диаграммы истории Вселенной.

Как можно заключить из процедуры конструирования тетрад (36), предложенная модель не отдает каких-либо предпочтений временной координате. В этом состоит отличие от обычного формализма спиновых сетей, где сеть создается на пространственно-подобном многообразии, а затем растет в ортогональном направлении, что ведет к образованию пространственно-временной пены [28]. Отсутствие каких-либо предпочтений между направлениями кажется весьма выгодным с точки зрения общекоординатной инвариантности (1).

Если нет никаких предпочтений для временной координаты, возникает естественный вопрос: что такое эволюция? Этот вопрос уже достаточно давно обсуждался в контексте квантовой гравитации (см., например, [6, 7] и ссылки там же). Точка зрения автора состоит в том, что роль параметра эволюции может играть число степеней свободы во Вселенной, возникающее в теории посредством формализма ренормализационной группы. Такая возможность уже обсуждалась различными авторами в рамках модели асимптотической безопасности [29] и в контексте пространств анти-де Ситтера [30, 31].

Перенормировка вершины (слияния) двух фермионных линий в рассматриваемой модели спиновых сетей материи достаточно очевидна и совпадает с перенормировкой вершин в обычной КЭД. Она схематически изображена на рис. 11.

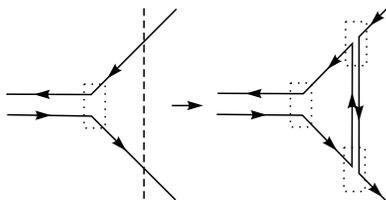


Рис. 11. Перенормировка вершины слияния двух фермионов со спином $1/2$ в бозон со спином 1 в спиновой сети полей материи

Исследование ренормгрупповой эволюции спиновых сетей полей материи планируется для будущих исследований. Данный подход допускает возможность того, что мы живем во Вселенной, расширяющейся во всех четырех пространственно-временных направлениях, а не только в трех пространственных, как это происходит в модели Фридмана. Роль космологического времени, описывающего динамику такой пятимерной Вселенной, может играть ренормгрупповая координата [30, 31].

Благодарности. Автор признателен д-ру К. Г. Фалзу за полезные ссылки, д-ру М. Гнатичу за полезные комментарии и д-ру Д. Вайду за стимулирующие обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Green M., Schwarz J.* Anomaly Cancellations in Supersymmetric $D = 10$ Gauge Theory and Superstring Theory // *Phys. Lett. B.* 1984. V. 149, No. 1. P. 117–122.
2. *Green M., Schwarz J., Witten E.* Superstring Theory. Cambridge Univ. Press, 2012.
3. *Duff M.* *M-Theory (The Theory Formerly Known as Strings)* // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 1996. V. 11, No. 32. P. 5623–5641.
4. *Becker K., Becker M., Schwarz J.* *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction.* Cambridge Univ. Press, 2007.
5. *Rovelli C., Smolin L.* Spin Networks and Quantum Gravity // *Phys. Rev. D.* 1995. V. 52. P. 5743–5759.
6. *Rovelli C.* *Quantum Gravity.* Cambridge Univ. Press, 2004.
7. *Rovelli C., Vidotto F.* *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spin Foam Theory.* Cambridge Univ. Press, 2014.
8. *Freidel L.* Group Field Theory: An Overview // *Intern. J. Theor. Phys.* 2005. V. 44. P. 1769–1783.
9. *Vaid D., de Sousa L. T.* A Loop Quantum Gravity Inspired Action for the Bosonic String and Emergent Dimensions at Large Scales // *Ann. Phys.* 2025. V. 483. P. 170240.
10. *Penrose R.* *Angular Momentum: An Approach to Combinatorial Spacetime* // *Quantum Theory and Beyond* / Ed. by T. Bastin. Cambridge, England: Cambridge Univ. Press, 1971. P. 151–180.
11. *Beer K., Bondarenko D., Hahn A., Kalabakov M., Knust N., Niermann L., Osborne T. J., Schridde C., Seckmeyer S., Stiegemann D. E., Wolf R.* From Categories to Anyons: A Travelogue. arXiv.org:1811.06670. 2018.

12. *Ponzano G., Regge T.* Semiclassical Limit of Racah Coefficients // Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics / Ed. by F. Block. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 1–58.
13. *Ashtekar A.* New Variables for Classical and Quantum Gravity // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 57, No. 18. P. 2244–2247.
14. *Rovelli C.* Ashtekar Formulation of General Relativity and Loop-Space Nonperturbative Quantum Gravity: A Report // Class. Quant. Grav. 1991. V. 8. P. 1613–1675.
15. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. П.* Современная геометрия: Методы и приложения. 2-е изд. М.: Наука, 1986.
16. *Crane L., Kauffman L., Yetter D.* State Sum Invariants of 4-Manifolds // J. Knot Theory Ram. 1997. V. 6. P. 177–234.
17. *Rovelli C., Smolin L.* Discreteness of Area and Volume in Quantum Gravity // Nucl. Phys. B. 1995. V. 442, No. 3. P. 593–619; <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139500150Q>.
18. *Ashtekar A., Lewandowski J.* Quantum Theory of Geometry: I. Area Operators // Class. Quant. Grav. 1997. V. 14, No. 1A. P. A55; <https://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/14/1A/006>.
19. *Regge T.* General Relativity without Coordinates // Nuovo Cim. 1961. V. 19, No. 3. P. 558–571.
20. *Misner C., Thorne K., Wheeler J.* Gravitation. W. H. Freeman, 1973.
21. *Weinberg S.* The Quantum Theory of Fields. Cambridge Univ. Press, 1995. V. 1.
22. *Arkani-Hamed N., Huang T. C., Huang Y. T.* Scattering Amplitudes for All Masses and Spins // JHEP. 2021. V. 11.
23. *Rühl W.* Lectures on the Lorentz Group and Harmonic Analysis. 1967. Geneva: CERN, 1967–1968; <https://cds.cern.ch/record/223924>.
24. *Barrett J., Crane L.* Relativistic Spin Networks and Quantum Gravity // J. Math. Phys. 1998. V. 39, No. 6. P. 3296–3302.
25. *Altaisky M.* Poincaré Group Spin Networks // Intern. J. Theor. Phys. 2024. V. 63. P. 145.
26. *Ambjorn J., Jurkiewicz J., Loll R.* Reconstructing the Universe // Phys. Rev. D. 2005. V. 72. P. 064014.
27. *Vaid D., Bilson-Thompson S.* LQG for the Bewildered: The Self-Dual Approach Revisited. Springer, 2017.
28. *Baez J.* Spin Foam Models // Class. Quant. Grav. 1998. V. 15. P. 1827–1858.
29. *Ferrero R., Reuter M.* Towards a Geometrization of Renormalization Group Histories Asymptotic Safety // Universe. 2021. V. 7. P. 125.
30. *Altaisky M., Raj R.* Can Our Spacetime Emerge from Anti-de Sitter Space? // Phys. Part. Nucl. Lett. 2022. V. 19, No. 4. P. 313–316.
31. *Ferrero R., Reuter M.* On the Possibility of a Novel (A)dS/CFT Relationship Emerging in Asymptotic Safety // JHEP. 2022. V. 12. P. 118.

Получено 4 марта 2025 г.