Письма в ЭЧАЯ. 2009. Т. 6, № 3(152). С. 312–331

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

МИНИМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТЯГОТЕНИЯ В РАМКАХ СТАНДАРТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

А. Н. Сердюков

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Белоруссия

Предлагается калибровочно-инвариантная теория линейного скалярного безмассового поля в качестве минимальной релятивистской модели тяготения. В основу подхода положен принцип мультипликативного подключения гравитационного взаимодействия при соблюдении условий простоты и требования инвариантности теории относительно допустимого (калибровочного) преобразования потенциала $\Phi \to \Phi' = \Phi + \mathrm{const}$. Получена система калибровочно-инвариантных уравнений для частиц и гравитационного поля. Построен тензор энергии-импульса поля при положительно определенной плотности энергии. Найдены точные решения для центрального статического поля и полей сферически-симметричных и плоских гравитационных волн в свободном пространстве и в материальной среде.

The minimal relativistic model of gravitation on the base of the gauge-invariant theory of the linear scalar massless field is suggested. The principle of multiplicative inclusion of gravitational interaction in common with the requirements of simplicity and invariance of the theory under the allowed (gauge) transformation of potential $\Phi \to \Phi' = \Phi + \mathrm{const}$ as the basis of the approach is used. The system of gauge-invariant gravitational field equations is obtained and the energy-momentum tensor with positively defined density of field energy is constructed. The exact solutions of equations for central static field and for fields of spherically symmetric and plane gravitational waves in the free space and in the material media are obtained.

PACS: 04.20.Cv; 11.15.-q

ВВЕДЕНИЕ

Релятивистская теория тяготения в пределе малых скоростей и слабого поля должна воспроизводить гравистатику Ньютона, являясь по сути ее динамическим обобщением. При объективном дефиците прямых экспериментальных указаний такое обобщение кроме необходимых общефизических принципов должно удовлетворять требованиям разумной достаточности. Однако среди большинства имеющихся разнообразных релятивистских моделей тяготения данное ограничение не принимается в расчет. В результате самые известные из них — векторные теории [1–4], теории с тензорным потенциалом [5–8] — и их более сложные модификации [9, 10] существенно увеличивают количество степеней свободы поля в сравнении с теорией Ньютона, оперируя экспериментально не востребованными наблюдаемыми. Даже в упрощенной «максвеллизованной» модели тяготения с 4-векторным потенциалом Φ_μ силовое воздействие поля на движущиеся частицы кроме вектора $\mathbf{g}$, соответствующего ускорению свободного падения, дополнительно определяется аксиальным t-нечетным вектором[1]: вместе все их шесть компонент группируются в антисимметричный 4-тензор второго ранга $g_{\mu\nu} = \partial_\mu \Phi_\nu - \partial_\nu \Phi_\mu$. В тензорных моделях три компоненты $\mathbf{g}$ встраиваются уже в 4-тензор третьего ранга $g_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu \Phi_{\nu\rho} - \partial_\nu \Phi_{\mu\rho}$ [5], который составляет комплект из 20 величин — таково число независимых ненулевых компонент $g_{\mu\nu\rho}$ при условии $\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}$.

В то же время предсказываемые эффекты, за которые могут быть ответственны дополнительные к $\mathbf{g}$ силовые характеристики поля, ничтожно слабы и заведомо недоступны экспериментальному подтверждению. Поэтому значительное расширение физического содержания теории в результате динамических обобщений ньютоновской гравистатики по большому счету оказывается спекулятивным. Здесь уместно заметить, что такие обобщения с сомнительно большим запасом не безупречны и в других отношениях. Ни в одной из упомянутых выше теорий, например, не обеспечена положительная определенность плотности энергии гравитационного поля (см. [2–4, 11]). И как бы в довершение логика развития и без того непростой тензорной модели с идеей геометризации в ее основе [7] привела к необходимости изначально существенно усложнить теорию, предусмотрев наличие массы покоя у гравитона (и у фотона!) [8].

Между тем возможен путь построения теории тяготения, в которой нет проблем с законами сохранения, а недоступное экспериментальной проверке содержание минимально. Такой путь был намечен уже в первых опытах релятивистского обобщения ньютоновской гравистатики, осуществленных Нордстрёмом в [12] и в [13, 14] в духе классической теории поля. В этих работах трехмерный вектор $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ достраивается до 4-вектора $g_\mu(x) = -\partial_\mu \Phi(x)$ при том, что потенциал $\Phi(x)$ наделен трансформационными свойствами скалярного поля в плоском пространстве событий. В уточненном варианте теории [13, 14] в качестве плотности гравитационного заряда принята также скалярная величина — след тензора энергии-импульса гравитирующей системы. Однако поскольку у электромагнитного поля такой инвариант тождественно равен нулю, то оказалось невозможным по схеме Нордстрёма включить гравитационное взаимодействие в электродинамику. В основном по этой причине на фоне успешного продвижения общей теории относительности данная модель гравитационного поля утратила актуальность.

С позиций современной полевой идеологии теория Нордстрёма содержит еще один принципиальный недостаток — она не удовлетворяет требованию калибровочной инвариантности, так как ее полевые уравнения включают потенциал неустранимым образом. Такое положение недопустимо, поскольку потенциал не является наблюдаемой и определяется через наблюдаемые по́ля — его силовые характеристики — неоднозначно.

Не касаясь усилий, направленных на решение космологических проблем, возникших в последние годы (аномалия «Пионеров», проблема темной материи), напомним, что в прошлом попытки построения неметрической теории тяготения мотивировались особым положением гравитационного поля в ОТО в сравнении с другими полями, сложностью математического аппарата этой теории, отсутствием в ней фундаментальных законов сохранения, а также ее несовместимостью с квантовой теорией. Ввиду того, что скалярный подход ни в работах Нордстрёма, ни в более поздних обобщениях других авторов [6, 15–18] не привел к самосогласованной теории, усилия по развитию полевой концепции

[1] Согравитация (co-gravitation) в [4].

гравитации сконцентрировались в основном на построении моделей тяготения с тензорным потенциалом. Между тем осталось незамеченным, что среди неограниченного количества допускаемых принципом соответствия релятивистских версий тяготения со скалярным потенциалом [19] возможна единственная теоретическая модель, реализующаяся как *калибровочно-инвариантная теория линейного скалярного безмассового поля*.

Данное сообщение посвящено построению такой классической модели в рамках ограничений, диктуемых стандартной теоретико-полевой концепцией, включающей принцип соответствия, условия простоты, принципы релятивистской и калибровочной инвариантности, вариационный принцип и наличие четко сформулированных законов сохранения при положительно определенной плотности энергии.

1. ЧАСТИЦА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Хорошо известна тривиальная особенность лагранжева формализма: уравнения движения любой физической системы не изменяются при масштабном преобразовании ее лагранжиана [20, 21]. Такое преобразование для дальнейшего удобно записать в виде

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L} \cdot U^2 \tag{1}$$

с постоянным U, не равным нулю. По аналогии с фазовыми преобразованиями полей в квантовой теории соотношение (1) можно рассматривать как своеобразное глобальное калибровочное преобразование лагранжиана.

Следуя принципу локальной калибровочной инвариантности, от (1) можно перейти к *локальному масштабному преобразованию лагранжиана*, положив U зависящим от четырехмерных координат $x = (x_\mu)$. Такой переход будет означать включение в систему, описываемую лагранжианом $\mathcal{L}$, взаимодействия со скалярным полем $U(x)$. Универсальность этого взаимодействия со всеми видами материи, обеспечиваемая мультипликативным подключением поля $U(x)$ к лагранжиану любой системы, дает основание рассматривать $U(x)$ как потенциальную функцию гравитационного поля.

Применяя локальное масштабное преобразование (1) к функции Лагранжа свободной релятивистской частицы, запишем

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}U^2(\mathbf{r}, t). \tag{2}$$

Уравнение движения, вытекающее из аналогичной функции Лагранжа, получено в [22]. Вместе с уравнением для энергии $\mathcal{E} = \mathbf{v}\partial L/\partial\mathbf{v} - L$ оно составит ковариантное равенство

$$\frac{d(\mathcal{M}u_\mu)}{d\tau} = \mathcal{M}g_\mu, \tag{3}$$

постулированное еще раньше в [12] как естественное обобщение уравнения движения частицы в поле тяготения. Здесь $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt$ — собственное время, $u_\mu = dx_\mu/d\tau$ — 4-скорость частицы ($dx_4 = icdt$), g_μ — векторное поле напряженности:

$$g_\mu = -\partial_\mu\Phi, \tag{4}$$

потенциал Φ которого связан с введенной нами в (2) полевой функцией U соотношением

$$U = \mathrm{e}^{\Phi/2c^2}. \tag{5}$$

Через $\mathcal{M}$ в (3) обозначена изменяющаяся в поле масса Нордстрёма $\mathcal{M} = m\,\mathrm{e}^{\Phi/c^2}$ [12]. Пространственные компоненты 4-вектора $P_\mu = \mathcal{M}^2 u_\mu$ в (3) представляют обобщенный импульс $\mathbf{P} = \partial L/\partial \mathbf{v}$, а временна́я $P_4 = (i/c)\mathcal{E}$ — энергию частицы в поле

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \mathrm{e}^{\Phi/c^2}. \tag{6}$$

Выражение (6) включает кинетическую и потенциальную энергию: в нерелятивистском приближении $\mathcal{E} \approx mc^2 + \dfrac{mv^2}{2} + m\Phi$.

2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ

При интегрировании уравнений движения возникают нежелательные осложнения из-за того, что масса $\mathcal{M}$ в (3) зависит от потенциала поля. Эту трудность легко преодолеть, если из (3) после предварительных несложных преобразований исключить потенциал, сократив его вместе с U^2. Таким образом получим уравнение

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{m}{c^2}\left(u_\mu g_\nu - u_\nu g_\mu\right) u_\nu, \tag{7}$$

содержащее только наблюдаемые — динамический 4-импульс частицы $p_\mu = mu_\mu$ и напряженность поля g_μ. Перейдя к трехмерным обозначениям

$$(g_\mu) = (\mathbf{g}, i\eta), \tag{8}$$

выпишем отдельно уравнение движения частицы — пространственную составляющую уравнения (7)

$$\frac{d}{dt}\frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\left(\mathbf{g} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v} \times \mathbf{v} \times \mathbf{g} - \frac{1}{c}\mathbf{v}\eta\right). \tag{9}$$

Правая часть (9) представляет выражение для гравитационной силы, из которого в нерелятивистском приближении следует ньютоновская формула $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$.

Уравнение (9) показывает, что все четыре компоненты вектора силовых характеристик поля (8) в принципе могут быть измерены, то есть являются однозначно определенными физическими величинами. В то же время потенциал Φ, как видно из (4), определен через наблюдаемые g_μ лишь с точностью до аддитивной константы. Таким образом, для Φ допустимо преобразование

$$\Phi \to \Phi' = \Phi + \lambda \tag{10}$$

с произвольной константой λ. Преобразование (10), не изменяющее гравитационной силы (9), далее будем называть калибровочным преобразованием потенциала Φ.

В соответствии с (5) полевая функция U также должна подвергаться калибровочному преобразованию в мультипликативной форме:

$$U \to U' = U\mathrm{e}^{\lambda/2c^2} \tag{11}$$

одновременно с преобразованием потенциала (10). Следствием (11) будет глобальное масштабное преобразование функции Лагранжа (2) $L \to L' = L\,\mathrm{e}^{\lambda/c^2}$, относительно которого уравнения Эйлера–Лагранжа остаются инвариантными.

3. УРАВНЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Из свойства потенциальности (4) следует, что напряженность гравитационного поля g_μ удовлетворяет тензорному уравнению

$$\partial_\mu g_\nu - \partial_\nu g_\mu = 0. \tag{12}$$

Еще одно полевое уравнение, обобщающее ньютоновский закон тяготения, получим из вариационного принципа. Не делая исключения для гравитационного поля, будем руководствоваться обычными в теории классических полей соображениями простоты и постулируем общий для частиц и поля лагранжиан

$$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{2\pi G}\left(\partial_\mu U\right)^2 - \mu c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}U^2. \tag{13}$$

Здесь G — гравитационная постоянная; μ — плотность массы. Второе слагаемое в (13) является плотностью для функции Лагранжа (2), а полевая часть

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{c^4}{2\pi G}\left(\partial_\mu U\right)^2 \tag{14}$$

соответствует линейному скалярному безмассовому полю. Коэффициент в (14) выбран с тем расчетом, чтобы из вариационного принципа получалось уравнение поля, соответствующее обычным обозначениям, принятым в ньютоновском приближении.

Уравнение Эйлера–Лагранжа, вытекающее из вариационного принципа при варьировании поля $U(x)$, в случае лагранжиана (4) приводит к линейному уравнению

$$\left(\Box - \frac{2\pi G}{c^2}\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)U = 0. \tag{15}$$

Выражая U через потенциал Φ согласно (5), имея при этом в виду соотношение (4), из (15) получаем нелинейное уравнение для 4-вектора напряженности поля g_μ:

$$\partial_\mu g_\mu - \frac{1}{2c^2}g_\mu^2 = -4\pi G\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \tag{16}$$

Как легко убедиться, система уравнений (12), (15), (16) и (9) является калибровочно-инвариантной и отвечает ньютоновскому пределу.

4. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ПОЛЯ

Подставляя лагранжиан свободного поля (14) в общее выражение для канонического тензора энергии-импульса скалярного поля

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}^{(0)} \delta_{\mu\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial \left(\partial_\mu U\right)} \partial_\nu U,$$

получим

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{\pi G} \left(\partial_\mu U \cdot \partial_\nu U - \frac{1}{2} \left(\partial_\sigma U\right)^2 \delta_{\mu\nu} \right). \tag{17}$$

Как и должно быть в случае скалярного поля, этот тензор симметричен. Если частицы отсутствуют, то поле образует замкнутую систему, и его энергия и импульс сохраняются. При этом тензор (20) удовлетворяет уравнению непрерывности $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$. В присутствии массивных частиц его дивергенция уже не равна нулю:

$$\partial_\mu T_{\mu\nu} = -\mu \, \mathrm{e}^{\Phi/c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \, g_\nu, \tag{18}$$

что обусловлено обменом энергией и импульсом между частицами и полем при их взаимодействии. Разумеется, для замкнутой системы, включающей поле и частицы, законы сохранения энергии и импульса строго выполняются, что легко показать [19], сопоставив (18) и уравнение (3) для 4-импульса частицы, переписав последнее в форме

$$\frac{d}{dt} \left(m \, \mathrm{e}^{\Phi/c^2} u_\nu \right) = m \, \mathrm{e}^{\Phi/c^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} g_\nu. \tag{19}$$

Принимая во внимание соотношения (4), (5), тензор энергии-импульса (17) легко выразить через наблюдаемые поля и потенциал:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\mathrm{e}^{\Phi/c^2}}{4\pi G} \left(g_\mu \cdot g_\nu - \frac{1}{2} \left(g_\sigma\right)^2 \delta_{\mu\nu} \right). \tag{20}$$

Обратим внимание на принципиальный результат теории — положительную определенность плотности энергии гравитационного поля $w = -T_{44}$:

$$w = \frac{1}{8\pi G} \left(\mathbf{g}^2 + \eta^2 \right) \mathrm{e}^{\Phi/c^2}. \tag{21}$$

В этой связи еще раз напомним, что плотность энергии поля отрицательна как в векторной, так и в тензорной моделях гравитации (см. [2–4, 11]). Укажем также, что псевдотензор энергии-импульса Ландау–Лифшица [23] в ОТО приводит к плотности псевдоэнергии, которая также не является положительно определенной.

5. СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ. ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ ИНЕРТНОЙ И ТЯЖЕЛОЙ МАССЫ

В случае неподвижных тяготеющих масс из (16) следует нелинейное уравнение для трехмерного вектора напряженности $\mathbf{g}$ статического поля тяготения

$$\nabla\mathbf{g} - \frac{1}{2c^2}\mathbf{g}^2 = -4\pi G\mu, \tag{22}$$

а из (15) — линейное уравнение для его потенциальной функции U

$$\left(\nabla^2 - \frac{2\pi G}{c^2}\mu\right) U = 0. \tag{23}$$

Обычно в гравистатике наибольший интерес представляют центральные поля источников со сферически-симметрично распределенной массой. Полагая в (23) $\mu(\mathbf{r}) = \mu(r)$, для потенциальной функции $U(\mathbf{r}) = U(r)$ такого поля получим

$$\frac{d^2U(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU(r)}{dr} - \frac{2\pi G\mu(r)}{c^2}U(r) = 0. \tag{24}$$

Если гравитирующая масса сконцентрирована внутри шара радиуса R, то для внешней области $r > R$ общим решением уравнения (24) при $\mu(r) = 0$ будет $U(r) = C_1 + C_2/r$. Переобозначив постоянные интегрирования $C_1 = U_0$ и $C_2 = -U_0GM/2c^2$, запишем

$$U(r) = U_0\left(1 - \frac{GM}{2c^2r}\right). \tag{25}$$

Учитывая (4), (5), из (25) находим $g_4 = i\eta = 0$ и

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r^2\left(1 - GM/2c^2r\right)}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{26}$$

Постоянная $U_0 = \mathrm{e}^{\Phi_0/c^2}$ в (25) определяется принимаемым по соглашению значением Φ_0 потенциала Φ на бесконечности. Вторая постоянная M в (25) есть активная гравитационная масса по определению, если иметь в виду закон всемирного тяготения, вытекающий из (26) как приближение для $r \ll GM/c^2$. Чтобы найти ее значение, домножим (22) на U^2, а результат с учетом (4), (5) преобразуем к виду

$$\nabla\left(U^2\mathbf{g}\right) = -\frac{4\pi G}{c^2}\left(\mu U^2c^2 + \frac{\mathbf{g}^2}{8\pi G}U^2\right). \tag{27}$$

Теперь проинтегрируем (27) по всему пространству, а левую часть получающегося при этом равенства представим как поток вектора $U^2\mathbf{g}$ через сферу бесконечно большого радиуса. Подсчет этого потока для внешнего решения (25), (26) дает значение $-4\pi GM\,\mathrm{e}^{\Phi_0/c^2}$. В итоге получается

$$M = \frac{1}{c^2}\int\left(\mu c^2 + \frac{\mathbf{g}^2}{8\pi G}\right)\mathrm{e}^{(\Phi-\Phi_0)/c^2}d^3r. \tag{28}$$

Интеграл в (28), согласно (6), (21), является полной энергией $\mathcal{E}$ всей системы частиц и поля. Потенциал $\widetilde{\Phi} = \Phi - \Phi_0$, при котором вычисляется значение $\mathcal{E}$ в (28), удовлетворяет калибровке $\widetilde{\Phi} = 0$ на бесконечности и получается из Φ в результате калибровочного преобразования $\Phi \to \widetilde{\Phi} = \Phi - \Phi_0$.

Таким образом, из (26) и (28) следует, что источник M поля, т. е. активная гравитационная масса, одновременно является мерой энергии $\mathcal{E} = Mc^2$ всей системы, что по определению представляет инертную массу этой системы.

6. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Поле $U(x)$ гравитационных волн в пространстве, свободном от частиц и других полей, кроме гравитационного, удовлетворяет точному линейному волновому уравнению

$$\Box U(r,t) = 0, \tag{29}$$

которое следует из (10), если положить плотность массы μ равной нулю.

Оставляя пока открытым вопрос о механизме возбуждения, рассмотрим поле расходящихся гравитационных волн во внешней по отношению к источнику области пространства, предполагая, что они генерируются сферически-симметричным источником — центральным телом с периодически изменяющейся плотностью массы (например, пульсирующей нейтронной звездой). Из соображений симметрии ясно, что при выборе начала координат в центре источника скалярное поле $U(x)$ будет зависеть только от двух переменных — времени и модуля радиуса-вектора: $U = U(r,t)$.

При отыскании физически приемлемых решений для $U(r,t)$ необходимо помнить, что напряженность поля выражается через логарифмический градиент этой функции: $g_\mu = -2c^2\partial_\mu U/U$. Поскольку значения наблюдаемой g_μ должны быть вещественными и конечными, то функция $U(r,\, t)$ везде должна быть непрерывной и положительно определенной. Второе условие отличает данную задачу от аналогичных задач электродинамики и заставляет строить совместное решение уравнения (15) для обеих составляющих поля — статической и волновой. Такое решение, обобщающее (25), можно представить в виде

$$U(r,t) = U_0\left(1 + \frac{Y(r-ct) - GM/2c^2}{r}\right), \tag{30}$$

где U_0 и M — постоянные интегрирования; $Y(\zeta)$ — непрерывная функция переменной $\zeta = r - ct$, описывающая расходящуюся сферическую волну, распространяющуюся от центра поля со скоростью света c. Разумеется, эта функция должна быть ограничена оговоренным условием положительной определенности $U(r,t)$.

Переходя к рассмотрению гравитационных волн с гармонической зависимостью от времени, далее примем

$$Y\,(r-ct) = A\cos\,(k_0 r - \omega t), \tag{31}$$

полагая $k_0 = \omega/c$. Для выполнения требования $U(r,\, t) > 0$ необходимо, чтобы в пространстве вне источника амплитудная характеристика A гравитационной волны удовлетворяла ограничению $|A| < R - GM/2c^2$, где R — радиус источника.

Вычисляя логарифмические производные потенциальной функции $U(r,t)$, найдем силовые характеристики сферически-симметричного поля, включающего поле тяготения источника и поле излучаемых им расходящихся волн

$$\mathbf{g}(\mathbf{r},t) = -\frac{GM}{r\left(r - GM/2c^2 + A\cos\left(k_0 r - \omega t\right)\right)}\mathbf{n} + \frac{2c\omega A\sin\left(k_0 r - \omega t\right)}{r - GM/2c^2 + A\cos\left(k_0 r - \omega t\right)}\mathbf{n} + \\ + \frac{2c^2 A\cos\left(k_0 r - \omega t\right)}{\left(r - GM/2c^2\right)\left(r - GM/2c^2 + A\cos\left(k_0 r - \omega t\right)\right)}\mathbf{n}, \quad (32)$$

$$\eta(\mathbf{r},t) = \frac{2c\omega A\sin\left(k_0 r - \omega t\right)}{r - GM/2c^2 + A\cos\left(k_0 r - \omega t\right)}, \quad (33)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Из этих формул следует, что монохроматической волне поля потенциала (30) соответствуют поля $\mathbf{g}$ и η, в которых кроме основной частоты присутствуют волны гармоник на кратных частотах. Однако поля гармоник убывают с расстоянием от центра источника поля быстрее, чем поле основной частоты: n-кратная гармоника не медленнее, чем r^{-n}. В этом можно убедиться, разлагая поля (32), (33) для больших r в ряд по параметру A/r. Следовательно, на достаточном удалении от центра поля можно ограничиться вытекающими из (32), (33) приближенными выражениями для поля напряженностей

$$\mathbf{g} \approx \frac{2c\omega A}{r}\mathbf{n}\sin\left(k_0 r - \omega t\right), \quad (34)$$

$$\eta \approx \frac{2c\omega A}{r}\sin\left(k_0 r - \omega t\right). \quad (35)$$

Распространение гравитационных волн сопровождается переносом энергии. Интенсивность гравитационного излучения определяется вектором плотности потока энергии поля $S_i = -icT_{i4}$. Для расчетов излучаемой энергии в данном случае удобно использовать представление (17) тензора энергии-импульса через производные полевой функции U. Подставляя (30) с учетом (31) в (17) и затем усредняя результат по периоду колебаний поля, найдем плотность потока энергии, систематически переносимой гравитационной волной

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{c^3\omega^2 A^2}{2\pi G r^2}\mathbf{n}. \quad (36)$$

Аналогично найдем усредненные по периоду колебаний значения плотности энергии поля в волновой зоне:

$$\langle w\rangle = \frac{c^2\omega^2 A^2}{2\pi G r^2}. \quad (37)$$

Распределение излучаемой энергии в данном случае отличается центральной симметрией, так что полная интенсивность гравитационного излучения будет равна произведению абсолютной величины вектора (36) на поверхности сферы радиуса r на площадь этой сферы. Это позволяет связать полную мощность источника с параметром A в (31):

$$\mathcal{Q} = \frac{2c^3}{G}\omega^2 A^2. \quad (38)$$

В волновом процессе средняя за период плотность потока энергии по определению равна произведению средней плотности энергии на скорость ее переноса: $\mathbf{S} = w\mathbf{v}_{\text{эн}}$. Сравнивая (35) и (37), находим $\mathbf{v}_{\text{эн}} = c\mathbf{n}$ и, таким образом, убеждаемся, что скорость переноса энергии гравитационной волной в пустом пространстве равна скорости света и направлена радиально от источника.

7. ВОЗБУЖДЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН

Рассмотрим теперь поле сферических гравитационных волн, излучаемых в пустое пространтво каким-либо конкретным источником, например, нейтронной звездой радиуса R с плотностью массы

$$\mu(r,t) = \mu_0 + \Delta\mu(r,t), \tag{39}$$

модулируемой сферической сейсмической волной. Очевидно, источником гравитационных волн в данном случае может быть изменяющаяся часть плотности массы $\Delta\mu(r,t)$. Полагая возникающее при прохождении сейсмической волны движение гравитирующего вещества нерелятивистским, когда $v^2/c^2 \ll 1$, из общего уравнения (15) получим приближенное уравнение для потенциала поля внутри шара

$$\left(\Box - \frac{2\pi G}{c^2}\mu_0\right)U(r,t) = \frac{2\pi G}{c^2}\Delta\mu(r,t)U(r,t). \tag{40}$$

Переменную часть плотности массы шара в этом уравнении, возникающую при наличии стоячей сферической сейсмической волны, представим в виде

$$\Delta\mu(r,t) = \mu_0\beta R\frac{\sin(\varkappa r)}{r}\cos(\omega t), \tag{41}$$

где $\varkappa = \omega/v_s$ — волновое число сейсмической волны; v_s — ее фазовая скорость и ω — частота; β — безразмерный параметр сжатия, задающий глубину модуляции плотности массы в поверхностной области центрального тела.

Полагая параметр β малым и воспользовавшись методом последовательных приближений, в качестве первого приближения для потенциала поля стоячих волн внутри шара найдем

$$U(r,t) = U_1\left\{\frac{1}{\operatorname{ch}(KR)}\frac{\operatorname{sh}(Kr)}{Kr} + \frac{\cos(\omega t)}{r}\left(\frac{-\beta RK^2}{\varkappa^2 - k^2}\sin(\varkappa r) + b\sin(kr)\right)\right\}. \tag{42}$$

Здесь $K = \sqrt{2\pi G\mu_0}/c,\ k = \sqrt{k_0^2 - K^2}$; U_1 и b — постоянные интегрирования.

Решение уравнения (40) для сферически-симметричного поля во внешней области ищется в виде (30), (31).

Поскольку напряженность поля и плотность массы являются конечными величинами, поле потенциала и его первые пространственные производные, согласно (4), (15), должны быть непрерывными функциями координат. Это требование связывает поля по обе стороны от границы источника и позволяет выразить постоянные интегрирования внешнего решения (30), (31) через характеристики источника. Опуская утомительные выкладки и отсылая за подробностями к [19], запишем результат решения сформулированной граничной задачи для амплитудного параметра A, определяющего поле (31) излучаемой волны

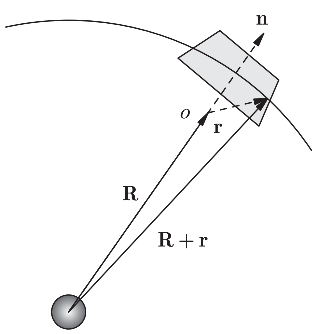
$$A = \frac{\beta RK^2\sqrt{k_0^2 - K^2\cos^2(kR)}}{\varkappa^2 - k^2}\frac{\varkappa\sin(kR)\cos(\varkappa R) - k\cos(kR)\sin(\varkappa R)}{k_0^2\sin^2(kR) + k^2\cos^2(kR)}. \tag{43}$$

Как показано выше, интенсивность гравитационного излучения и связанные с ним энергетические потери источника пропорциональны квадрату этого параметра.

8. ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЛОСКИХ ВОЛН

Плоская волна, как известно, является идеализацией, которая достаточно точно соответствует картине реальных переменных полей лишь на большом удалении от источника. Рассмотрим в плосковолновом приближении поле сферически-симметричной гравитационной волны в некоторой ограниченной области пространства, удаленной от источника на расстояние, значительно превышающее линейные размеры этой области. Выберем начало координат O внутри данной области, соединив центр гравитирующей системы с точкой O вектором $\mathbf{R}$, как это показано на рисунке. В такой системе координат поле потенциала (30), удовлетворяющее калибровке $U = 1$ на бесконечности, перепишется следующим образом:

$$U(r,t) = 1 - \frac{GM}{2c^2|\mathbf{R}+\mathbf{r}+\alpha|} + \frac{A}{|\mathbf{R}+\mathbf{r}|}\cos\left(k_0|\mathbf{R}+\mathbf{r}| - \omega t\right). \tag{44}$$



Геометрия плосковолнового приближения в дальней зоне

На большом удалении от центра гравитирующей системы, когда R значительно превышает как r, так и характерные параметры источника $GM/2c^2$ и поля A и $1/k_0$, в (44) можно использовать приближенное равенство $|\mathbf{R}+\mathbf{r}| \approx R + \mathbf{nr}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{R}$. Разлагая поле (44) в ряд по малым параметрам $GM/2c^2R$ и A/R, удерживая только линейные члены разложения и опуская в начальную фазу $k_0R + \alpha$, для потенциала U находим приближенное выражение

$$U(\mathbf{r},t) = 1 - \frac{GM}{2c^2R} + U_0\cos\left(\mathbf{k}r - \omega t\right), \tag{45}$$

где введены обозначения $\mathbf{k} = k_0\mathbf{n}$ для волнового вектора и $U_0 = A/R$ для амплитуды переменной части потенциала.

Как видим, переменную часть поля U на далеком от источника расстоянии R в окрестности $r \ll R$ можно рассматривать как плоскую волну. Из (45) в том же приближении и дополнительно с учетом малости параметра U_0 находим поле потенциала $\Phi = 2c^2 \ln U$

$$\Phi(\mathbf{r},t) = -\frac{GM}{R} + 2c^2U_0\cos\left(\mathbf{kr} - \omega t\right), \tag{46}$$

и затем поле 4-вектора напряженности $g_\mu = -\partial_\mu\Phi$ плоской монохроматической волны

$$g_\mu(x) = 2c^2k_\mu U_0\sin\left(kx\right). \tag{47}$$

Здесь $kx = k_\mu x_\mu$, $(k_\mu) = (\mathbf{k}, ik_0)$ — волновой 4-вектор нулевой длины: $k_\mu^2 = 0$.

В силу того, что 4-вектор напряженности (47) также имеет нулевую длину: $g_\mu^2 = 0$, скалярное уравнение поля (16) для плоских монохроматических гравитационных волн линеаризуется:

$$\partial_\mu g_\mu = 0 \tag{48}$$

и вместе с тензорным уравнением (12) составляет систему линейных уравнений.

9. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ

Как мы могли убедиться выше, при решении задачи излучения гравитационных волн в свободное пространство возникает необходимость рассмотрения их распространения в сплошной среде самого источника. Исследуем этот вопрос более подробно на примере плоских волн, распространяющихся в неподвижной среде с постоянной плотностью μ. Оставляя в стороне вопрос о статическом поле тяготения, порождаемом самой средой, исследуем поле плоских гравитационных волн, испущенных удаленным источником. В соответствии с общим уравнением (15) потенциал U поля гравитационных волн в среде должен удовлетворять линейному уравнению Клейна–Фока

$$\left(\Box - \frac{\Omega^2}{c^2}\right) U = 0, \tag{49}$$

где введено обозначение

$$\Omega = \sqrt{2\pi G\mu}. \tag{50}$$

Волновую составляющую решения уравнения (49), которая соответствует полю плоской монохроматической волны в сплошной среде, будем искать в комплексной форме, сохраняя физический смысл, как обычно, за ее вещественной частью:

$$U\left(\mathbf{r}, t\right) = U_0\, \mathrm{e}^{i(\mathbf{k}r - \omega t)}. \tag{51}$$

Подставляя (51) в (49), получаем однородное алгебраическое уравнение

$$\left(\omega^2 - \Omega^2 - c^2\mathbf{k}^2\right) U = 0. \tag{52}$$

Уравнение (52) имеет нетривиальные решения при выполнении условия

$$\omega^2 - \Omega^2 - c^2\mathbf{k}^2 = 0, \tag{53}$$

которое может рассматриваться как аналог известного в электродинамике сплошных сред дисперсионного уравнения, определяющего зависимость волнового вектора от частоты. Из (53) находим

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}\mathbf{n}, \tag{54}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор волновой нормали.

Для гравитационной волны, частота которой удовлетворяет неравенству $\omega > \Omega$, то есть при вещественном волновом векторе $\mathbf{k}$, можно определить фазовую скорость $v_{\text{phase}} = \omega/k$. В соответствии с выражением (54) фазовая скорость гравитационной волны в однородной сплошной среде оказывается равной

$$v_{\text{phase}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \Omega^2/\omega^2}}. \tag{55}$$

По аналогии с электромагнитными волнами в оптике определим *показатель преломления гравитационных волн* в сплошной среде как отношение их скорости распространения в свободном пространстве (скорости света c) к фазовой скорости в среде: $n = c/v_{\text{phase}}$. Из (55) следует

$$n = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}. \tag{56}$$

Зависимость n от частоты означает, что при распространении гравитационных волн в сплошной среде имеет место *частотная дисперсия*[1].

Формула (56) указывает, что каждая среда характеризуется определенной критической частотой гравитационных волн $\omega = \Omega$, при которой показатель преломления обращается в нуль. Следовательно, волновой процесс для гравитационного потенциала (51) вырождается в однородное по всему объему среды колебание $U(t) = U_0 \exp(-i\omega t)$. В отношении многих свойств такие вырожденные гравитационные волны вполне аналогичны известным в электродинамике сплошных сред плазменным колебаниям в электродинамике. Они не переносят энергию, поскольку у них $\nabla U(t) = 0$, и вектор плотности потока энергии обращается в нуль.

Для частот $\omega < \Omega$ показатель преломления (56) становится чисто мнимой величиной $n = in''$. При этом для потенциала (51) будем иметь выражение

$$U(\mathbf{r}, t) = U_0 \exp\left(-\frac{\omega}{c} n'' \mathbf{n} r\right) \exp(-i\omega t). \tag{57}$$

Как видим, поведение поля в данном случае носит характер колебаний, амплитуда которых экспоненциально затухает по мере проникновения в среду. Это означает, что среда будет экранировать поле гравитационных волн в указанном диапазоне частот.

В области частот, превышающих критическую частоту, фазовая скорость нормальных гравитационных волн оказывается больше скорости света c. В то же время для *групповой скорости гравитационных волн* $v_{\text{group}} = d\omega/dk$ получаем значение

$$v_{\text{group}} = c\sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}, \tag{58}$$

которое, как и должно быть, не превышает значение скорости света в вакууме.

Сформулируем закон сохранения энергии гравитационных волн в сплошной среде. С этой целью умножим волновое уравнение (49) на выражение $-(c^4/\pi G)\partial U/\partial t$ (вернувшись, разумеется, к вещественному U) и полученному соотношению придадим форму уравнения непрерывности:

$$\nabla\left(-\frac{c^4}{\pi G}\frac{\partial U}{\partial t}\nabla U\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{c^4}{2\pi G}\left((\nabla U)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{c^2}U^2\right)\right\} = 0. \tag{59}$$

Первый член в этом уравнении есть дивергенция входящей в тензор энергии-импульса (17) плотности потока энергии поля $S_i = -icT_{i4}$, а выражение

$$w = \frac{c^4}{2\pi G}\left\{(\nabla U)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{c^2}U^2\right\} \tag{60}$$

следует рассматривать как плотность энергии, связанной с распространяющейся в среде гравитационной волной. С учетом обозначений (50) и (4), (5) эту величину можно записать в виде суммы плотности энергии (21) собственно гравитационного поля и плотности

[1] Интересно отметить одинаковый характер дисперсии гравитационных волн в сплошной среде и дисперсии электромагнитных волн в плазме свободных электронов [24].

релятивистской энергии (6) самой среды:

$$w = \frac{1}{8\pi G}\left(g^2 + \eta^2\right) \mathrm{e}^{\Phi/c^2} + \mu c^2 \, \mathrm{e}^{\Phi/c^2}. \tag{61}$$

Таким образом, гравитационная волна в данном случае представляет процесс, в энергетику которого вовлечено не только поле, но и среда. При этом плотность энергии (61) замкнутой системы, состоящей из гравитационной волны в среде и самой среды, остается положительно определенной величиной.

Отделяя в формуле (51) для потенциала U вещественную часть и подставляя ее затем в (60), получим плотность энергии поля распространяющейся в среде плоской монохроматической гравитационной волны

$$w = \frac{c^4 U_0^2}{2\pi G}\left\{\left(k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\sin^2\left(\mathbf{k}r - \omega t\right) + \frac{\Omega^2}{c^2}\cos^2\left(\mathbf{k}r - \omega t\right)\right\}. \tag{62}$$

Отсюда с учетом (53) находим среднее по периоду колебаний поля значение плотности энергии

$$\langle w \rangle = \frac{c^2\omega^2}{2\pi G} U_0^2. \tag{63}$$

Аналогично получим усредненный по периоду вектор плотности потока энергии

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c^3\omega^2}{2\pi G} U_0^2 \sqrt{1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}}\,\mathbf{n}. \tag{64}$$

Из (63), (64), (58) следует соотношение

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle w \rangle \, v_{\text{group}} \mathbf{n}, \tag{65}$$

означающее, что гравитационная волна в сплошной среде переносит энергию поля с групповой скоростью, которая, как было установлено, не превышает скорости света.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итог, отметим, что кроме соображений простоты предлагаемая теория привлекательна прежде всего тем, что ее полевые уравнения не связаны с идеями искривления пространства-времени, и поэтому в полном соответствии с теоремой Нётер в ней реализуется корректная формулировка законов сохранения при *положительно определенной плотности энергии гравитационного поля*. Из данной модели равенство инертной и активной гравитационной массы статических систем следует как теорема, а не как постулат. Теория гравитационных волн в ней развивается на основе линейных дифференциальных уравнений.

В целом с принятием предлагаемой модели закрывается проблема теории классических и квантованных полей о невостребованности теории линейного скалярного безмассового поля. При этом важно отметить, что лагранжиан, а вместе с ним и тензор энергии-импульса представляют обычные в теории линейных классических полей квадратичные комбинации компонент четырехмерного градиента волновой функции U. То, что при этих условиях гарантирована осуществимость точного квантования поля без ожидаемых осложнений, указывает на перспективность развития на основе предлагаемой модели квантовой теории гравитации.

Одновременно предлагаемая модель тяготения допускает перспективное расширение в форме объединенной калибровочно-инвариантной теории двух связанных классических полей — электромагнитного и гравитационного [25].

В течение нескольких последних лет Игорь Леонидович Соловцов поддерживал настоящее исследование, ободряя и внушая надежду. Его светлой памяти я посвящаю эту работу.

Приложение 1
СРАВНЕНИЕ С ТЕОРИЕЙ НОРДСТРЁМА

<table>
<tr><th>Характеристика</th><th>Калибровочно-инвариантная теория</th><th>Теория Нордстрёма</th></tr>
<tr><td>Лагранжиан</td><td>$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{2\pi G}(\partial_\mu U)^2 - \mu c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;U^2$
$U = \mathrm{e}^{\Phi/2c^2}$</td><td>$\mathcal{L} = -\frac{c^4}{8\pi G}(\partial_\mu \phi)^2 - \mu c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\phi$
$\phi = \mathrm{e}^{\Phi/c^2}$</td></tr>
<tr><td>Уравнение движения частицы</td><td colspan="2">$\frac{d}{d\tau}(mu_\mu) = \frac{m}{c^2}(u_\mu g_\nu - u_\nu g_\mu)u_\nu$</td></tr>
<tr><td>Наблюдаемые</td><td colspan="2">$g_\mu = -\partial_\mu\Phi; (g_\mu) = (\mathbf{g}, i\eta)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Калибровочные преобразования</td><td colspan="2">$\Phi \to \Phi' = \Phi + \lambda$</td></tr>
<tr><td>$U \to U' = U\mathrm{e}^{\lambda/2c^2}$
$\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}\,\mathrm{e}^{\lambda/c^2}$</td><td>$\phi \to \phi' = \phi\,\mathrm{e}^{\lambda/c^2}$
—</td></tr>
<tr><td>Уравнение для потенциала</td><td>$\left(\Box - \frac{2\pi G}{c^2}\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)U = 0$</td><td>$\Box\phi = \frac{4\pi G}{c^2}\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$</td></tr>
<tr><td>Уравнения для напряженности</td><td>$\partial_\mu g_\mu - \frac{1}{2c^2}g_\mu^2 = -4\pi G\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$</td><td>$\partial_\mu g_\mu - \frac{1}{c^2}g_\mu^2 =$
$= -4\pi G\mu\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\;\mathrm{e}^{-\Phi/c^2}$</td></tr>
<tr><td>Энергия частицы в поле тяготения</td><td colspan="2">$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}\,\mathrm{e}^{\Phi/c^2}}$</td></tr>
<tr><td>Плотность энергии поля</td><td>$w = \frac{1}{8\pi G}\left(\mathbf{g}^2 + \eta^2\right)\mathrm{e}^{\Phi/c^2}$</td><td>$w = \frac{1}{8\pi G}\left(\mathbf{g}^2 + \eta^2\right)\mathrm{e}^{2\Phi/c^2}$</td></tr>
</table>

Приложение 2
ПРЕДПОСЫЛКИ СКАЛЯРНОГО ПОДХОДА В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ

Гравитационный потенциал — почему скаляр? Серьезным аргументом в пользу такого выбора может служить то, что при определении для гравитационного потенциала тензорной размерности скаляра в плоском пространстве-времени удается автоматически обеспечить для энергии материальных частиц сохранение ее обычных трансформационных свойств временно́й компоненты 4-вектора и при наличии поля тяготения.

Не вдаваясь в детали вывода, связанные с учетом дефекта массы при гравитационном взаимодействии (см., например, [12, 19]), воспользуемся готовым выражением $\mathcal{E} = mc^2\,\mathrm{e}^{\Phi/c^2}$ для энергии пробной частицы с затравочной массой m и равной нулю скоростью в потенциальном поле тяготения $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla\Phi(\mathbf{r})$ и запишем ее 4-импульс

$$P_\mu^{(0)} = m\,\mathrm{e}^{\Phi/c^2} u_\mu^{(0)}. \tag{66}$$

Здесь $(u_\mu^{(0)}) = (0, 0, 0, ic)$ — 4-скорость частицы. Соотношение между компонентами P'_μ и u'_μ этих же 4-векторов в любой другой инерциальной системе отсчета, связанной с исходной системой, в которой скорость частицы равна нулю, лоренцевским преобразованием координат события $x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}x_\nu$ в силу линейности соотношений $P'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}P_\nu^{(0)}$ и $u'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}u_\nu^{(0)}$ сохранит линейную форму (66):

$$P'_\mu = m\,\mathrm{e}^{\Phi'/c^2} u'_\mu. \tag{67}$$

Через Φ' в (67) обозначена полевая функция четырехмерных координат x'_μ, в которую трансформируется статический потенциал $\Phi(\mathbf{r})$, определенный в системе покоя частицы. По существу $\Phi' = \Phi'(\mathbf{r}', t')$ в (67) представляет динамическое обобщение потенциала статического поля тяготения в системе отсчета, где поле тяготения является переменным во времени вследствие перемещения формирующих его масс. Векторный характер соотношения (67) налагает жесткое требование: потенциал переменного гравитационного поля должен обладать трансформационными свойствами скалярного поля в плоском псевдоевклидовом пространстве-времени, так что в общем случае

$$\Phi'(x') = \Phi(x). \tag{68}$$

Мультипликативное подключение гравитационного поля к лагранжиану. Такой способ описания гравитационного взаимодействия прямо связан с определением (68) тензорной размерности потенциала. Вначале при составлении лоренц-инвариантного интеграла действия для частицы в гравитационном поле можно руководствоваться стандартными правилами, когда к функции Лагранжа свободной частицы

$$L_0 = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{69}$$

добавляется слагаемое, описывающее ее взаимодействие с полем. Следуя этой схеме, но не связывая себя рамками линейной зависимости лагранжиана взаимодействия от потенциала (как, например, в электродинамике), дополним (69) выражением

$$L_{\text{int}} = mc^2\zeta(\Phi)\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \tag{70}$$

включив в него четырехмерный скаляр $\zeta = \zeta(\Phi)$ — некоторую функцию гравитационного потенциала, явный вид которой в дальнейшем подлежит определению. Множитель $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ с необходимостью включен в формулу (70), чтобы обеспечить лоренц-инвариантность полного интеграла действия.

Учитывая во многом схожий вид двух составляющих функции Лагранжа (69) и (70), их сумму $L = L_0 + L_{\text{int}}$ можно записать как единое выражение в удобной для рассмотрения форме (2), приняв обозначение $U^2 = 1 - \zeta$.

Компактная форма (2) функции Лагранжа подсказывает идею описания взаимодействия массивной частицы с гравитационным полем посредством мультипликативного подключения некоторой скалярной полевой функции $\phi = U^2$ к функции Лагранжа свободной частицы (69). В настоящей работе эта идея трансформируется нами в принцип локального масштабного преобразования лагранжиана, позволяющий включать гравитационное взаимодействие фактически в любую физическую систему.

Условие простоты и требование калибровочной инвариантности теории предопределяют единственность выбора полевой части лагранжиана в виде (14). Калибровочное преобразование потенциала (10) порождает глобальное масштабное преобразование $\mathcal{L} \to \mathcal{L}' = \mathcal{L}\,\mathrm{e}^{\lambda/c^2}$ полного лагранжиана (13), при котором уравнения движения частиц и поля не меняются.

Плотность энергии поля тяготения. Зависимость массы материальных частиц от гравитационного потенциала является важным обстоятельством, прежде ускользавшим от внимания при анализе энергетики гравитирующих систем. Принципиальную необходимость учета гравитационного дефекта массы тел наглядно демонстрирует подсчет баланса энергии простейших систем при изменении их конфигурации. В частности, полный анализ изменения энергетического состояния бесконечно тонкой гравитирующей сферической оболочки при ее расширении под действием внешних сил позволяет найти правильное значение плотности энергии поля тяготения и установить факт ее положительной определенности.

В ньютоновской теории тяготения напряженность поля, создаваемого бесконечно тонкой однородной сферической оболочкой, задается формулой [11, 19]

$$\mathbf{g}\,(\mathbf{r}) = \begin{cases} \quad 0 & \text{для } r < R, \\[2ex] -\dfrac{Gm}{2R^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r} & \text{для } r = R, \\[2ex] -\dfrac{Gm}{r^2}\dfrac{\mathbf{r}}{r} & \text{для } r > R, \end{cases} \tag{71}$$

где R — радиус оболочки; $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора точки наблюдения поля. Полю напряженности (71), терпящему разрыв на оболочке при $r = R$, соответствует потенциал

$$\Phi\,(r) = \begin{cases} -\dfrac{Gm}{R} & \text{для } r \leqslant R, \\[2ex] -\dfrac{Gm}{r} & \text{для } r \geqslant R, \end{cases} \tag{72}$$

непрерывный во всем пространстве.

Согласно (71), на элементарный участок оболочки ds с эффективной массой

$$dM = \frac{m\,\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}}{4\pi R^2}ds,$$

расположенный в окрестности точки с радиусом-вектором $\mathbf{R}$, со стороны остальной части оболочки действует сила

$$d\mathbf{F} = \frac{Gm}{2R^2}\frac{\mathbf{R}}{R}\frac{m\,\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}}{4\pi R^2}ds.$$

Отсюда следует, что оболочка испытывает со стороны поля сжимающее давление

$$\mathcal{P} = \frac{Gm^2\,\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}}{8\pi R^4}.$$

Элементарное изменение объема оболочки при изменении ее радиуса на Δr составляет величину $\Delta V = 4\pi R^2\Delta r$. Следовательно, элементарная работа $\Delta A = \mathcal{P}\Delta V$, выполняемая против сил тяготения при увеличении радиуса оболочки на Δr, равна

$$\Delta A = \frac{Gm^2\,\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}}{2R^2}\Delta r. \tag{73}$$

Результатом расширения оболочки будет вытеснение поля $\mathbf{g}$ из элементарного объема $\Delta V = 4\pi R^2\Delta r$. В связи с этим энергия поля уменьшится на величину

$$\Delta\mathcal{E}_g = w_g 4\pi R^2\Delta r. \tag{74}$$

Здесь через w_g обозначена плотность энергии гравитационного поля вне оболочки в ее непосредственной окрестности.

При определении энергии системы в новой конфигурации учет только этого изменения энергии поля недостаточен. Следует также иметь в виду гравитационный дефект массы частиц, составляющих оболочку. При расширении оболочки частицы переносятся со сферы с потенциалом $\Phi(R)$ на сферу с потенциалом $\Phi(R+\Delta r)$, в результате чего изменяется их эффективная масса (энергия). В соответствии с (70) приращение энергии частиц при таком перемещении составит величину

$$\Delta\mathcal{E}_p = mc^2\,\mathrm{e}^{\Phi(R+\Delta r)/c^2} - mc^2\,\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2} = \lim_{r\to R+0}\frac{d\Phi(r)}{dr}m\,\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}\Delta r.$$

Для потенциала оболочки (72) имеем

$$\lim_{r\to R+0}\frac{d\Phi(r)}{dr} = \frac{Gm}{R^2},$$

так что

$$\Delta\mathcal{E}_p = \frac{Gm^2}{R^2}\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}\Delta r. \tag{75}$$

Выполненная работа и энергия вытесненного поля в сумме должны составить приращение энергии частиц оболочки: $\Delta\mathcal{A} + \Delta\mathcal{E}_g = \Delta\mathcal{E}_p$. Таким образом, с учетом (73)–(75) имеем

$$\frac{Gm^2}{2R^2}\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}\Delta r + w_g 4\pi R^2\Delta r = \frac{Gm^2}{R^2}\mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}\Delta r,$$

откуда находим значение плотности энергии гравитационного поля, *локализованной* в элементарном шаровом слое, непосредственно прилегающем к оболочке:

$$w_g = \frac{Gm^2}{8\pi R^4} \mathrm{e}^{\Phi(R)/c^2}. \tag{76}$$

Выразив (76) через напряженность $g = Gm/R^2$ и потенциал $\Phi = Gm/R$ ньютоновского поля тяготения, приходим к положительно определенной плотности энергии этого поля

$$w_g = \frac{\mathbf{g}^2}{8\pi G} \mathrm{e}^{\Phi/c^2}, \tag{77}$$

результату, который следует из общей формулы (21) в статическом случае. При этом можно убедиться (см. приложение 1), что теория Нордстрёма дает результат, отличный от (77)[1].

Оценим плотность энергии гравитационного поля непосредственно вблизи земной поверхности. Полагаем $\Phi = 0$ на бесконечности. При такой калибровке потенциала его отношение к квадрату скорости света $|\Phi|/c^2 = gR/c^2$ на поверхности Земли составит около $7{\cdot}10^{-10}$. Следовательно, значение экспоненты e^{Φ/c^2} будет ничтожно мало отличаться от единицы, так что вместо (77) можно ограничиться приближенной формулой

$$w_g \approx \frac{g^2}{8\pi G}.$$

Плотность энергии поля с напряженностью $g = 9{,}8$ м $\cdot$ с$^{-2}$, рассчитанная по этой формуле, равна $w_g = 5{,}7 \cdot 10^{10}$Дж $\cdot$ м$^{-3}$, так что вблизи земной поверхности энергия поля тяготения в 1 м^3 превышает энергию, выделяющуюся при взрыве 10 т тротила ($4{,}2{\cdot}10^{10}$ Дж).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heaviside O.* Electromagnetic Theory. London, 1951.

2. *Мицкевич Н. В.* Физические поля в общей теории относительности. М.: Наука, 1969. 326 с.

3. *Бриллюэн Л.* Новый взгляд на теорию относительности. М.: Мир, 1972. 142 с.

4. *Jefimenko O. D.* Causality Electromagnetic Induction and Gravitation. A Different Approach to the Theory of Electromagnetic and Gravitational Fields. West Virginia: Electret Sci. Company Star City, 1992. 180 p.

5. *Birkhoff G. D.* // Proc. Nat. Acad. Sci. 1944. V. 30, No. 10. P. 324–334.

6. *Thirring W. E.* // Ann. Phys. 1961. V. 16. P. 96–117.

[1] Отметим также, что аналогичный расчет, только без учета дефекта массы частиц оболочки в гравитационном поле, дал в [11] отрицательную плотность энергии поля. На этом основании в [11] в качестве возможного пути решения проблемы положительной определенности энергии поля тяготения названа возможная зависимость массы частиц от поля.

7. *Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989. 303 с.

8. *Герштейн С. С., Логунов А. А., Мествиришвили М. А.* Сообщение ИФВЭ 2005-25 ОТФ. Протвино, 2005. 3 с.

9. *Brans C., Dicke R. H.* // Phys. Rev. 1961. V. 124. P. 925–935.

10. *Will C.M., Nordvedt K. (Jr.)* // Astrophys. J. 1972. V. 177. P. 757.

11. *Соколов С. Н.* // Гравитация. 1995. Т. 1, № 1. С. 3–12.

12. *Nordström G.* // Phys. Zeitschrift. 1912. Bd. 13. S. 1126–1129.

13. *Nordström G.* // Ann. Phys. 1913. Bd. 40. S. 856–878.

14. *Nordström G.* // Ibid. Bd. 42. S. 533–554.

15. *Littltwood D. E.* // Proc. Cambridge Philosoph. Soc. 1953. V. 49. P. 90–96.

16. *Papapetrou A.* // Z. Phys. 1954. Bd. 139. S. 518.

17. *Bergman O.* // Am. J. Phys. 1956. V. 24. P. 38.

18. *Page C., Tupper B. O. J.* // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1968. V. 138. P. 67–72.

19. *Сердюков А. Н.* Калибровочная теория скалярного гравитационного поля. Гомель: Изд-во Гомельск. гос. ун-та, 2005. 257 с.

20. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. М.: Физматгиз, 1958. 206 с.

21. *Наймарк М. А.* Линейные представления группы Лоренца. М.: Физматгиз, 1961. 376 с.

22. *Эйнштейн А.* Собр. науч. тр.: В 4 т. Т. 1. М., 1965. Ст. 23. С. 273–298.

23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. М.: Физматгиз, 1960. 400 с.

24. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматгиз, 1959. 532 с.

25. *Сердюков А. Н.* // Тр. Междунар. семинара по современным вопросам физики элементарных частиц, посвященного памяти И. Л. Соловцова. Дубна, 2008. С. 218–227.

Получено 25 апреля 2008 г.