Письма в ЭЧАЯ. 2009. Т. 6, № 7(156). С. 62–69

ПРИМЕНЕНИЕ 2-СПИНОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКИХ И ПОЛЕВЫХ РАСЧЕТАХ

Д. С. Кулябов [1], *А. Г. Ульянова* [2]

Российский университет дружбы народов, Москва

В статье описываются лоренцевы 2-спиноры и предлагается применять их в вычислениях, использующих дираковские 4-спиноры.

This paper describes the Lorentz 2-spinors and proposes to use them instead of Dirac 4-spinors and quaternions.

PACS: 03.67.Lx, 01.30.Cc, 03.67.-a

ВВЕДЕНИЕ

В физике достаточно интенсивно используются спиноры [1]. В основном применяются следующие спиноры:

- дираковские 4-спиноры;
- паулевские 3-спиноры;
- кватернионы.

При использовании дираковских 4-спиноров основную трудность вызывают γ-матрицы. По своей сути это объекты, служащие для связи спинорного и тензорного пространств и несущие, соответственно, два типа индексов: спинорные и тензорные. Логично было бы проводить вычисления лишь в одном из этих пространств.

Предлагается использовать полуспиноры дираковских спиноров — лоренцевы 2-спиноры [2] — как более простые объекты.

1. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ СПИНОРА

Определим спинор посредством уравнения Клиффорда–Дирака:

$$\gamma_{(a}\gamma_{b)} = -g_{ab}\mathbf{I} \tag{1}$$

[1] E-mail: yamadharma@gmail.com
[2] E-mail: jelly26@mail.ru

или, опуская спинорные индексы,

$$\gamma^{\sigma}_{a\rho}\gamma^{\tau}_{b\sigma} + \gamma^{\sigma}_{b\rho}\gamma^{\tau}_{a\sigma} = -2g_{ab}\delta^{\tau}_{\rho}. \tag{2}$$

Размерность спинорного пространства следующая:

$$\begin{cases} N = 2^{n/2} & \text{при четном } n; \\ N = 2^{n/2-1/2} & \text{при нечетном } n. \end{cases} \tag{3}$$

2. СВЯЗЬ 2-СПИНОРОВ С КВАТЕРНИОНАМИ

Положим

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Общий кватернион будет представлен матрицей

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}a + \mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{j}d = \begin{pmatrix} a + id & -c + ib \\ c + ib & a - id \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Сумма и произведение двух кватернионов получаются просто как матричная сумма и матричное произведение. Сопряженный кватернион $\mathbf{A}^*$ определяется соответствующей матричной операцией:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{I}a - (\mathbf{i}b + \mathbf{j}c + \mathbf{k}d). \tag{6}$$

Если матрица $\mathbf{A}$ (5) унимодулярна и унитарна, то она будет представлять собой унитарную спин-матрицу. Можно записать соотношения

$$\det \mathbf{A} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1, \tag{7}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{I}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = \mathbf{I}. \tag{8}$$

Таким образом, кватернион должен иметь единичную норму:

$$\|\mathbf{A}\| := a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \tag{9}$$

Следовательно, единичный кватернион может быть представлен унитарной спин-матрицей.

Несмотря на то, что унитарные спин-матрицы и единичные кватернионы представляют собой по существу одно и то же, в общем случае между кватернионами и спин-матрицами не существует такой тесной взаимосвязи. Дело в том, что кватернионы связаны с положительно определенными квадратичными формами, тогда как спин-матрицы и преобразования Лоренца характеризуются лоренцевой сигнатурой $(+, -, -, -)$.

3. СВЯЗЬ 2-СПИНОРОВ И ВЕКТОРОВ

При окончательных вычислениях возникает необходимость перевода абстрактных индексов в компонентную запись. Кроме того, зачастую результат удобнее формулировать в векторной форме. Для установления взаимосвязи между спинорным и векторным базисами служат символы Инфельда–ван дер Вердена:

$$\begin{aligned} g_{\mathbf{a}}{}^{\mathbf{A}\mathbf{A}'} &:= g_{\mathbf{a}}{}^{a}\varepsilon_{A}{}^{\mathbf{A}}\varepsilon_{A'}{}^{\mathbf{A}'}, \\ g^{\mathbf{a}}{}_{\mathbf{A}\mathbf{A}'} &:= g_{a}{}^{\mathbf{a}}\varepsilon_{\mathbf{A}}{}^{A}\varepsilon_{\mathbf{A}'}{}^{A'}, \end{aligned} \tag{10}$$

где свертка производится только по абстрактным индексам.

Для стандартной тетрады Минковского и спиновой системы отсчета получим

$$\begin{aligned} g_0{}^{\mathbf{AB}'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = g^0_{\mathbf{AB}'}, \qquad g_1{}^{\mathbf{AB}'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = g^1_{\mathbf{AB}'}, \\ g_2{}^{\mathbf{AB}'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix} = -g^2_{\mathbf{AB}'}, \quad g_3{}^{\mathbf{AB}'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = g^3_{\mathbf{AB}'}. \end{aligned} \tag{11}$$

4. ДИРАКОВСКИЕ 4-СПИНОРЫ И ЛОРЕНЦЕВЫ 2-СПИНОРЫ

В физических расчетах часто пользуются дираковскими 4-спинорами[1]. Однако операции с данными объектами крайне громоздки. Одним из главных недостатков этого формализма является явное использование γ-матриц, которые по сути своей являются объектами, служащими для связи векторного и спинорного пространств. Наши спинорные объекты «живут» как бы в двух пространствах: векторном и спинорном. Соответственно наблюдается стремление перейти к более единообразному формализму посредством отказа либо от спинорных, либо от тензорных индексов.

Рассмотрим переход к чисто спинорному формализму на основе лоренцевых 2-спиноров. Вначале сконструируем 4-спинорный объект на основе 2-спиноров. Далее продемонстрируем возможности данного формализма. Рассмотрим два примера: вывод инвариантных спинорных соотношений и вычисление матричных элементов.

4.1. Построение 4-спинорного формализма. Построим реализацию 4-спинорного формализма на основе лоренцевых 2-спиноров[2].

Будем обозначать строчными греческими буквами 4-спинорные индексы. Так же, как всегда, прописными латинскими буквами обозначим 2-спинорные индексы, а строчными латинскими — тензорные.

---

[1]Введение 4-спиноров можно, наверное, мотивировать желанием сконструировать объект, с помощью которого можно было бы удобно реализовать операцию пространственного отражения.

[2]Зачастую дираковский 4-спинор реализуют с помощью двух трехмерных спиноров (3-спиноров Паули). Формально это вполне возможно, поскольку структура пространств $\mathbb{S}_R$ и $\mathbb{S}_{R'}$ полуспиноров спинора размерности $n+1$ совпадает со структурой пространства S_ρ спиноров размерности n (n — нечетное).

Запишем дираковский 4-спинор как

$$\psi^\alpha = \begin{pmatrix} \varphi^A \\ \pi^{A'} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где φ^A и $\pi^{A'}$ — лоренцевы 2-спиноры.

Сопряженный спинор будет иметь вид

$$\overline{\psi^\alpha} = \bar{\psi}_\alpha = \left(\bar{\pi}_A, \bar{\varphi}_{A'}\right). \tag{13}$$

Определим оператор отражения:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \varphi^A \\ \pi^{A'} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \pi^{A'} \\ \varphi^A \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Будем использовать γ-матрицы в киральном представлении. Тогда запишем явный вид γ-матриц:

$$\gamma_{a\rho}{}^\sigma = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{A'R'}\varepsilon_A{}^S \\ \varepsilon_{AR}\varepsilon_{A'}{}^{S'} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta_\rho{}^\sigma = \begin{pmatrix} -i\varepsilon_R{}^S & 0 \\ 0 & i\varepsilon_{R'}{}^{S'} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

кроме того,

$$\gamma_{ab\rho}{}^\sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon_{A'B'}\varepsilon_{R(A}\varepsilon_{B)}{}^S & 0 \\ 0 & \varepsilon_{AB}\varepsilon_{R'(A'}\varepsilon_{B')}{}^{S'} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Введем также обозначение $\gamma_5 := i\eta$.

С помощью определенной нами структуры дираковских 4-спиноров можно построить инвариантные соотношения. Мы будем оперировать парой спинор — сопряженный 4-спинор (ψ и $\bar{\psi}$) и, соответственно, четырьмя 2-спинорами (φ^A, $\bar{\varphi}_{A'}$, $\pi^{A'}$ и $\bar{\pi}_A$).

4.2. Скаляры. Свертки $\bar{\pi}_A\varphi^A$ и $\bar{\varphi}_{A'}\pi_{A'}$ имеют смысл скаляров. Их сумма будет вести себя как скаляр, а разность как псевдоскаляр:

$$s = \bar{\pi}_A\varphi^A + \bar{\varphi}_{A'}\pi^{A'} = \bar{\psi}_\alpha\psi^\alpha, \tag{17}$$

$$p = i(\bar{\pi}_A\varphi^A - \bar{\varphi}_{A'}\pi^{A'}) = i\bar{\psi}_\alpha\gamma_{5\beta}{}^\alpha\psi^\beta. \tag{18}$$

4.3. Векторы. Комбинации $\bar{\pi}^A\pi^{A'}$ и $\varphi^A\bar{\varphi}^{A'}$ имеют смысл вектора. Их сумма ведет себя как вектор, разность — как псевдовектор:

$$j^a = \sqrt{2}(\bar{\pi}^A\pi^{A'} + \varphi^A\bar{\varphi}^{A'}) = \bar{\psi}_\alpha\gamma_\beta^{a\alpha}\psi^\beta, \tag{19}$$

$$\tilde{j}^a = \sqrt{2}(\bar{\pi}^A\pi^{A'} - \varphi^A\bar{\varphi}^{A'}) = \bar{\psi}_\alpha\gamma_\beta^{a\alpha}\gamma_{5\delta}{}^\beta\psi^\delta. \tag{20}$$

4.4. Тензоры. Действительный кососимметричный тензор можно построить следующим образом:

$$a^{ab} = i(\varphi^{(A}\bar{\pi}^{B)}\varepsilon^{A'B'} - \bar{\varphi}^{(A'}\pi^{B')}\varepsilon^{AB}) = \bar{\psi}_\alpha\sigma^{ab}{}_\beta{}^\alpha\psi^\beta. \tag{21}$$

Эти соотношения нам представляются более простыми, нежели исходные.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для расчета матричных элементов в квантовой теории обычно применяют «фейнмановский трюк», заключающийся в преобразовании произведения спиноров в след; в результате получают квадрат матричного элемента. Соответственно возрастает сложность вычислений — количество вычисляемых членов пропорционально n^2. Кроме того, если полный матричный элемент вычисляется как сумма многих диаграмм или важна информация о фазе, данный метод неприменим.

Как альтернатива предлагается вычислять сам матричный элемент. Рассмотрим два пути: применение 2-спиноров (отказ от тензорных индексов) и применение векторного формализма (отказ от спинорных индексов).

Для ликвидации основного препятствия — сложных соотношений для γ-матриц — предлагается использовать 2-спинорный формализм.

Введем вспомогательную нотацию, базирующуюся на знаке в проекторе $1 \pm \gamma_5$ [3]:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Соответственно γ-матрицы запишутся в виде (см. (15)):

$$\gamma_a = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{a+} \\ \gamma_{a-} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{p}_+ \\ \hat{p}_- & 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где $\hat{p} := p^a \gamma_a$.

Применение 2-спиноров особенно оправданно в случае наличия проекторов $(1 \pm \gamma_5)$. Поэтому рассмотрим упрощение вычислений в случае членов вида

$$\bar{\psi}_f \gamma^{a_1} \hat{p}_{(a)} \gamma^{a_2} \hat{p}_{(b)} \cdots \gamma^{a_n} \left[\frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5) \right] \psi_i. \tag{24}$$

Можно выделить два случая — четное и нечетное количество γ-матриц:

$$\begin{cases} \bar{\psi}_{f\pm} \gamma^{a_1}_{\mp} \hat{p}_{(a)\pm} \gamma^{a_2}_{\mp} \hat{p}_{(b)\pm} \cdots \gamma^{a_n}_{\pm} \psi_{i\pm} & \text{(нечетное)}, \\ \bar{\psi}_{f\mp} \gamma^{a_1}_{\pm} \hat{p}_{(a)\mp} \gamma^{a_2}_{\pm} \hat{p}_{(b)\mp} \cdots \gamma^{a_n}_{\mp} \psi_{i\pm} & \text{(четное)}. \end{cases} \tag{25}$$

Используя 2-спинорное представление γ-матриц, получаем следующие соотношения:

$$\gamma_{a\alpha}{}^{\beta}_{+} \gamma^{a\delta}_{\gamma -} = 2\delta_{\alpha}{}^{\delta} \delta_{\gamma}{}^{\beta}, \tag{26а}$$

$$\gamma_{a\alpha}{}^{\beta}_{\pm} \gamma^{a\delta}_{\gamma \pm} = 2\left(\delta_{\alpha}{}^{\beta} \delta_{\gamma}{}^{\delta} - \delta_{\alpha}{}^{\delta} \delta_{\gamma}{}^{\beta}\right). \tag{26б}$$

Для примера докажем (26а):

$$\varepsilon_{C'A'} \varepsilon_{C}{}^{B} \varepsilon^{C}{}_{G} \varepsilon^{C'D'} = 2\varepsilon_{A'}{}^{D'} \varepsilon_{G}{}^{B}. \tag{27}$$

Учитывая соответствия

$$\alpha \leftrightarrow A', \quad \beta \leftrightarrow B, \quad \gamma \leftrightarrow G, \quad \delta \leftrightarrow D',$$

получаем исходное выражение.

Таким образом, применяя последовательно (25) и (26), мы освобождаемся от γ-матриц и производим вычисления с 2-спинорами.

После вычислений получаются члены типа

$$u^{\dagger}_{f\pm}\hat{p}_{(a)\mp}\hat{p}_{(b)\pm}\ldots\hat{e}_{+\text{ or }-}\ldots u_{i\pm}, \tag{28}$$

где e — поляризация.

Для получения конкретного результата необходимо выбрать представление спинора. Например, можно использовать стандартное решение, полученное разложением по плоским волнам. Тогда в случае продольной поляризации получим

$$u_{\pm} = \left(\sqrt{E+\varepsilon m} \pm \varepsilon s\sqrt{E-\varepsilon m}\right)\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\varphi/2}\sqrt{1+s\cos\theta} \\ \mathrm{e}^{i\varphi/2}\sqrt{1-s\cos\theta} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где s — спиральность; ε — знак энергии.

5.1. Пример вычисления матричного элемента. Вычислим сечение реакции

$$\nu + n \to p + e^{-}, \tag{30}$$

матричный элемент которой в стандартной (V–A)-теории имеет вид

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\bar{\psi}_e\gamma_a(1+\gamma_5)\psi_\nu\right)\left(\bar{\psi}_p\gamma^a(g_V+g_A\gamma_5)\psi_n\right). \tag{31}$$

Используя (25) и (26), приведем (31) к виду:

$$\begin{aligned} M = {}& \frac{2G_F}{\sqrt{2}}\left(u^{\dagger}_{e\alpha+}\gamma_{a\beta-}{}^{\alpha}u^{\beta}_{\nu+}\right)\left[(g_A-g_V)\left(u^{\dagger}_{p\gamma+}\gamma^{a}_{\delta-}{}^{\gamma}u^{\delta}_{n+} + u^{\dagger}_{p\gamma-}\gamma^{a}_{\delta+}{}^{\gamma}u^{\delta}_{n-}\right)+\right. \\ & \left.+\,2g_A u^{\dagger}_{p\gamma+}\gamma^{a}_{\delta-}{}^{\gamma}u^{\delta}_{n+}\right] = \frac{2G_F}{\sqrt{2}}\left[(g_V-g_A)u^{\dagger}_{e\alpha+}\gamma_{a\beta-}{}^{\alpha}u^{\beta}_{\nu+}u^{\dagger}_{p\gamma-}\gamma^{a}_{\delta+}{}^{\gamma}u^{\delta}_{n-}+\right. \\ & \left.+\,(g_V+g_A)u^{\dagger}_{e\alpha+}\gamma_{a\beta-}{}^{\alpha}u^{\beta}_{\nu+}u^{\dagger}_{p\gamma+}\gamma^{a}_{\delta-}{}^{\gamma}u^{\delta}_{n+}\right] = \\ & = \frac{4G_F}{\sqrt{2}}\left[(g_V-g_A)u^{\dagger}_{e\alpha\,+}u^{\alpha}_{n\,-}u^{\dagger}_{p\beta\,-}u^{\beta}_{\nu\,+}+\right. \\ & \left.+\,(g_V+g_A)\left(u^{\dagger}_{e\alpha+}u^{\alpha}_{\nu+}u^{\dagger}_{p\beta+}u^{\beta}_{n+} - u^{\dagger}_{e\alpha+}u^{\alpha}_{n+}u^{\dagger}_{p\beta+}u^{\beta}_{\nu+}\right)\right]. \end{aligned} \tag{32}$$

Выберем направляющие углы следующим образом: $\varphi_\nu = \varphi_n = \varphi_p = \varphi_e = 0$, $\theta_\nu = \theta_n = \pi/2$, θ_e и θ_p — произвольные.

Введем спиноры:

$$\begin{gathered} |s_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |s_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ |s_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta_p/2 \\ \sin\theta_p/2 \end{pmatrix}, \quad |s_3\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\theta_e/2 \\ \cos\theta_e/2 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{33}$$

Тогда можно записать [см. (29)]:

$$u_{\nu\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{E_\nu + m_\nu} \pm s_\nu \sqrt{E_\nu - m_\nu}\right)|s_0\rangle, \tag{34}$$

$$u_{n\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{E_n + m_n} \pm s_n \sqrt{E_n - m_n}\right)|s_1\rangle, \tag{35}$$

$$u_{p\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{E_p + m_p} \pm s_p \sqrt{E_p - m_p}\right)|s_2\rangle, \tag{36}$$

$$u_{e\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{E_e + m_e} \pm s_e \sqrt{E_e - m_e}\right)|s_3\rangle. \tag{37}$$

Из (32) получаем

$$\begin{aligned}
M = \frac{G_F}{\sqrt{2}}&\left(\sqrt{E_e + m_e} + s_e\sqrt{E_e - m_e}\right)\left(\sqrt{E_\nu + m_\nu} + s_\nu\sqrt{E_\nu - m_\nu}\right) \times \\
&\times \Big[(g_V - g_A)\left(\sqrt{E_n + m_n} - s_n\sqrt{E_n - m_n}\right)\left(\sqrt{E_p + m_p} - s_p\sqrt{E_p - m_p}\right) \times \\
&\times \langle s_3|s_1\rangle\langle s_2|s_0\rangle + (g_V + g_A)\left(\sqrt{E_n + m_n} + s_n\sqrt{E_n - m_n}\right) \times \\
&\times \left(\sqrt{E_p + m_p} + s_p\sqrt{E_p - m_p}\right)\left(\langle s_3|s_0\rangle\langle s_2|s_1\rangle - \langle s_3|s_1\rangle\langle s_2|s_0\rangle\right)\Big] = \\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{E_e + m_e} + s_e\sqrt{E_e - m_e}\right)\left(\sqrt{E_\nu + m_\nu} + s_\nu\sqrt{E_\nu - m_\nu}\right) \times \\
&\times \Big[(g_V - g_A)\left(\sqrt{E_n + m_n} - s_n\sqrt{E_n - m_n}\right)\left(\sqrt{E_p + m_p} - s_p\sqrt{E_p - m_p}\right) \times \\
&\times c\cos\theta_e/2\cos\theta_p/2 - (g_V + g_A)\left(\sqrt{E_n + m_n} + s_n\sqrt{E_n - m_n}\right) \times \\
&\times \left(\sqrt{E_p + m_p} + s_p\sqrt{E_p - m_p}\right)\left(\sin\theta_e/2\cos\theta_p/2 + \cos\theta_e/2\cos\theta_p/2\right)\Big].
\end{aligned} \tag{38}$$

Таким образом, мы получили существенное (порядок: n вместо n^2) сокращение количества вычисляемых членов, кроме того, все они имеют достаточно простой вид.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Полуспиноры более простые объекты, чем спиноры.
2. Предлагается использовать лоренцевы 2-спиноры вместо дираковских 4-спиноров.
3. При релятивистских расчетах аппарат 2-спиноров представляется более адекватным, чем аппарат кватернионов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cartan É.* The Theory of Spinors. Paris: Hermann, 1966.
2. *Penrose R., Rindler W.* Spinor and Space-Time. V. 1. Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields. Cambridge Univ. Press, 1984.
3. *Sirlin A.* // Nucl. Phys. B. 1981. V. 192. P. 93.