ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

2-2003-39

На правах рукописи
УДК 531.51; 530.145; 524.882; 536.75

ФУРСАЕВ
Дмитрий Владимирович

МЕТОДЫ КОНЕЧНОТЕМПЕРАТУРНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В ГРАВИТАЦИИ И ПРОБЛЕМА ЭНТРОПИИ ЧЕРНЫХ ДЫР

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2003

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики имени Н.Н.Боголюбова Объединенного института ядерных исследований

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук — А.О. Барвинский

доктор физико-математических наук
профессор — И.Л. Бухбиндер

доктор физико-математических наук — А.Ю. Каменщик

Ведущее научно-исследовательское учреждение: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва

Защита состоится "_____" _________________________ 2003 г. в ________ час. на заседании диссертационного Совета Д 720.001.01 при Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований по адресу: 141980, Московская обл., г.Дубна, ЛТФ ОИЯИ

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ОИЯИ.

Автореферат разослан "_____" _________________________ 2003 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук — С.В. Голоскоков

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы.

Явления при конечной температуре играют фундаментальную роль во многих областях физики высоких энергий – от космологии и астрофизики до экспериментов на ускорителях будущего поколения. Более того, в настоящее время наступает период новых наблюдательных данных о явлениях, связанных с существованием материи в экстремальных условиях, т.е. при очень большой температуре, плотности, а также при наличии сильной гравитации.

Ключевую роль в получении новой информации будут играть эксперименты на ускорителе RHIC и эксперимент ALICE на будущем адронном ускорителе LHC. Одна из целей этих проектов – исследование возможных проявлений кварк-глюонной плазмы в столкновениях тяжелых ионов. Источником информации о материи в экстремальных условиях являются также астрофизические исследования, получившие мощный толчок благодаря новому поколению прецизионных приборов (телескопы Hubble, Chandra и др).

Другим примером, где учет гравитационных фоновых полей в теории при конечной температуре играет ключевую роль, является проблема статистической интерпретации термодинамики черных дыр. Черные дыры являются специфическими решениями гравитации Эйнштейна, которые описывают области пространства со столь сильным гравитационным полем, что никакое вещество не может выйти за их пределы.

В настоящий момент черные дыры представляют объект интенсивных астрофизических исследований. Не меньший интерес вызывает также и физика микроскопических черных дыр. Если, как предсказывается в некоторых сценариях с дополнительными измерениями фундаментальный планковский масштаб имеет порядок 1 Tev, черные дыры с массой в несколько Tev могут рождаться при столкновении частиц на ускорителях будущего поколения или в атмосфере Земли при прохождении сквозь нее высокоэнергетичных космических лучей. Таким образом, обсуждение черных дыр в рамках экспериментальных программ на ускорителях становится фактом.

Черные дыры обладают внутренней энтропией $S^{BH} = \frac{1}{4G}\mathcal{A}$ (энтропией Бекенштейна-Хокинга), которая определяется площадью поверхности горизонта черной дыры $\mathcal{A}$. Термодинамика и статистическая механика черных дыр одна из наиболее удивительных областей теоретической физики. Фундаментальная проблема здесь связана с тем, что в теории гравитации Эйнштейна энтропия черной дыры является чисто геометрической величиной, а энтропия обычных термодинамических систем определяется микроскопическими состояниями. Возникает вопрос: обладает ли черная дыра степенями свободы, подсчет которых воспроизводит энтропию Бекенштейна-Хокинга?

Заметим, что в классической теории черная дыра есть просто пустое пространство с сильным гравитационным полем и ничего более. Таким образом, энтропия черных дыр это одна из тех проблем, разрешение которых требует отхода от классической теории и должно основываться на квантовой гравитации. Более того, воспроизведение S^{BH} методом статистической механики следует рассматривать как очень нетривиальную проверку любой теории, претендующей на роль квантовой гравитации.

Диссертация имеет две цели:

1) развитие методов и анализ особенностей конечнотемпературной квантовой теории поля в стационарных калибровочных и гравитационных фоновых полях общего вида, включая случай пространств с горизонтом Киллинга;

2) использование этих методов для последовательного статистическо-механического обоснования энтропии черных дыр в теориях, где гравитация возникает целиком за счет квантовых эффектов.

Научная новизна и практическая ценность диссертации

Центральным результатом диссертации является проверка гипотезы о том, что энтропия черной дыры имеет микроскопическое объяснение в тех теориях, где уравнения Эйнштейна целиком возникают как следствие эффектов поляризации вакуума. Идею о гравитации, индуцированной квантовыми эффектами, сформулировал А.Д. Сахаров еще в 1968 г., а на возможность использовать эту идею для объяснения энтропии S^{BH} указал Т. Джекобсон в неопубликованной заметке.

Достижение представленных в диссертации работ состоит в том, что эти общие соображения были реализованы в конкретных квантовополевых моделях, позволивших проверить гипотезу о происхождении S^{BH} самосогласованным образом. Ключевым и новым моментом в проведенных исследованиях было требование сокращения ультрафиолетовых расходимостей в индуцированной гравитационной постоянной G_{ind}. Это дало возможность определить G_{ind} в терминах микроскопических характеристик конституентов – тех полей, с эффектами которых связано возникновение индуцированной гравитации.

В диссертации установлено, что механизм возникновения энтропии для всех рассмотренных моделей имеет универсальный характер и, что важно, не зависит от типа черной дыры (ее заряда или углового момента). Важно отметить, что все основные черты моделей индуцированной гравитации присутствуют и в теории струн. К ним относится сама идея получения уравнений гравитационного поля за счет квантовых эффектов, а также требование сокращения ультрафиолетовых расходимостей. Аналогия между возникновением энтропии S^{BH} в индуцированной гравитации и в теории открытых струн недавно отмечалась Хокингом, Мальдасеной и Строминджером. Таким образом, полученные в диссертации результаты могут иметь достаточно общий характер.

Вычисление энтропии квантовых полей вблизи черной дыры является задачей, требующей, во-первых, распространения методов конечнотемпературной теории поля на случай стационарных гравитационных и других фоновых полей общего вида, а во-вторых, учета новых особенностей, связанных с присутствием горизонта.

Нетривиальность первой проблемы в том, что в самом общем случае задача на спектр ω одночастичных возбуждений, который требуется для определения свободной энергии в однопетлевом приближении, является существенно нелинейной. Эта задача относится к теории полиномиальных операторных пучков, основы которой были заложены в работах М.В. Келдыша. Задачи такого типа имеют многочисленные приложения и в других областях, например, при описании осцилляций вязкой жидкости или в теории рассеяния с потенциалом, зависящим от энергии.

Для квадратичных операторных полиномов специального вида в диссертации разработан новый подход, отличный от известных ранее методов, который позволяет анализировать воздействие фоновых полей на спектр в области больших ω. Проведенный нами анализ показывает, что такое понятие как "спектральная геометрия" применимо и к данному классу нелинейных спектральных задач, причем результаты можно получать опираясь на теорию эллиптических операторов. В приложениях это позволяет исследовать поведение свободной энергии в режиме высоких температур для достаточно сложных физических моделей без явного нахождения спектра. К примеру, в калибровочных теориях можно легко описывать эффекты экранировки в плазме, а в гравитации – эффекты, связанные с локальным вращением системы отсчета.

Наличие горизонта Киллинга приводит к возникновению дополнительных расходимостей в конечнотемпературной теории поля. В частности, расходимости появляются из-за конических сингулярностей при попытке использовать методы евклидовой теории. Поэтому одним из направлений исследований в диссертации является изучение классических и квантовых аспектов гравитации на многообразиях с коническими сингулярностями. (Конические сингулярности фигурируют и в других приложениях, например, в задачах, связанных с космическими струнами). Основной результат диссертации в этой области – вычисление на многообразиях с коническими сингулярностями коэффициентов асимптотического разложения операторов теплопроводности. Вычисление касается полей разных спинов и впервые дает все коэффициенты, определяющие структуру однопетлевых расходимостей в эффективном действии. На этой основе доказывается важное свойство перенормировки расходимостей от квантовых поправок к энтропии Бекенштейна-Хокинга, что является отправной точкой в статистическом обосновании S^{BH}.

На защиту выдвигаются следующие результаты

1. Развит новый подход к исследованию класса нелинейных спектральных задач – квадратичных операторных полиномов, имеющих вид $(\omega^2 - L(\omega))\phi_\omega = 0$, где ϕ_ω – волновая функция, ω – спектральный параметр и $L(\omega)$ – положительный эллиптический оператор второго порядка, действующий в векторных расслоениях и зависящий квадратично от ω. Введено понятие псевдоследа – функции $K(t) = \sum e^{-t\omega^2}$, где $t > 0$, и суммирование идет по вещественной части спектра. Показано, что при малых t асимптотика $K(t)$ имеет вид $K(t) \sim \sum_n t^{n-d/2} a_n$, где a_n определяются коэффициентами $a_n(\omega)$ асимптотического разложения следа $\mathrm{Tr}\, e^{-tL(\omega)} \sim \sum_n t^{n-d/2} a_n(\omega)$.

2. Развит новый подход к конечнотемпературной квантовой теории поля на стационарных фоновых полях общего вида. Для случая калибровочных и гравитационных фоновых полей получена высокотемпературная асимптотика свободной энергии F. Эта асимптотика определяется коэффициентами a_n разложения псевдоследа $K(t)$.

3. Показано, что расходимости в энтропии квантовых полей вблизи горизонта черной дыры полностью устраняются стандартной перенормировкой постоянной Ньютона и других констант в эффективном гравитационном действии. Данный результат справедлив, если поля не имеют неминимальной связи с кривизной.

4. Построен ряд моделей индуцированной гравитации в пространствах размерности $D = 2, 3, 4$. На их примере показано, что механизм возникновения энтропии неэкстремальных черных дыр имеет универсальный характер: он не зависит от конкретно выбранной модели, т.е., от вида конституентов и их параметров, не зависит от типа черной дыры, ее углового момента и электрического заряда, не зависит от размерности пространства-времени. Энтропия Бекенштейна-Хокинга S^{BH} в индуцированной гравитации всегда имеет вид $S^{BH} = S - Q$, где S – тепловая энтропия конституентов вблизи горизонта дыры, а Q – нетеровский заряд, связанный с наличием в действии конституентов слагаемых с неминимальной связью.

5. Предложены две возможные дополняющие друг друга интерпретации энтропии Бекенштейна-Хокинга S^{BH}: i) S^{BH} может быть связана с вырождением спектра масс черной дыры при условии, что полная масса системы на бесконечности фиксирована; ii) S^{BH} может служить мерой потери информации о конституентах индуцированной гравитации внутри горизонта черной дыры.

6. Исследованы классические и квантовые свойства гравитации на многообразиях с коническими сингулярностями. В частности, сформулирован способ определения координатно-инвариантных функционалов от метрики; построены новые нетривиальные решения с коническими сингулярностями; определена геометрическая форма однопетлевых расходимостей вблизи конических сингулярностей для полей разных спинов.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ, в Физическом институте им. П.Н. Лебедева РАН, в Институте Ядерных Исследований РАН (г. Москва), в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН (г. Москва), в Обсерватории Парижа (Медон, Франция), в университетах в городах Ереван (Армения), Едмонтон, Виктория, Виннипег, Ватерлоо (Канада), Тур (Франция), Неаполь, Тренто (Италия), Мюнхен (Германия). Также по результатам диссертации были представлены доклады на следующих международных конференциях и совещаниях: канадская конференция по космологии и астрофизике (Калгари, 1997), "Black Holes: Theory and Mathematical Aspects" (Банф, 1997), "Quantum Field Theory under Influence of External Conditions" (Лейпциг, 1998), "Quantum Gravity and Constrained Dynamics" (Сардиния, 1999), "Quantization, Gauge Theory, and Strings" (Москва, 2000), "Квантовая гравитация и суперструны" (Дубна, 2001), 3я Международная сахаровская конференция по физике (Москва, 2002). Автором был прочитан цикл лекций на Международной конференции "Quantum Gravity and Spectral Geometry" (Неаполь, 2001).

Публикации. По материалам исследований, представленных в диссертации, опубликовано 28 работ.

Структура и объем работы. Диссертациия состоит из введения, 6 глав и заключения. Объем работы составляет 198 страниц, включает 2 таблицы, 5 иллюстраций и библиографический список из 217 наименований.

Содержание работы

Во введении дается обоснование целей диссертации, обзор литературы по ее теме и излагается план работы.

В первой главе рассматривается квантовая теория на стационарном фоне и описывается новый метод исследования волновых уравнений для одночастичных возбуждений. Основная цель этой главы – изучение свойств спектров в пределе больших энергий. В разделе 1.2 даны определения и примеры задач.

Сам метод и спектральные асимптотики излагаются в разделе 1.3. Здесь изучается класс волновых уравнений,

$$\left[\partial_0^2 + L(i\partial_0)\right] \phi(x^0, x) = 0, \tag{1}$$

которые при подстановке $\phi(x^0, x) = e^{-i\omega x^0}\phi_\omega(x)$ сводятся к нелинейной спектральной задаче (квадратичному операторному пучку)

$$\left[\omega^2 - L(\omega)\right] \phi_\omega(x) = 0, \tag{2}$$

$$L(\omega) = -(\nabla_k + iA_k + i\omega a_k)(\nabla^k + iA^k + i\omega a^k) + \omega B + V \quad . \tag{3}$$

Оператор $L(\omega)$ действует на векторном расслоении над некоторым компактным d-мерным многообразием $\mathcal{M}^d$ с метрикой h_{ik}. Индекс k в (2) поднимается и опускается с помощью метрического тензора h_{ik}, ∇_k – связности Леви-Чивита на $\mathcal{M}^d$, а A_k, a_k, B и V – некоторые (матрично-значные) функции. Для формулировки условий задачи вводится функция на спектре

$$\chi'(\omega_k) = \partial_\omega \chi(\omega_k, \Lambda_k), \quad \text{где} \quad \omega_k^2 = \Lambda_k(\omega_k) \quad , \tag{4}$$

$$\chi(\omega, \Lambda_k) = \omega^2 - \Lambda_k(\omega) \ . \tag{5}$$

$\Lambda_k(\omega)$ – набор собственных значений оператора $L(\omega)$.

Пусть i) $L(\omega)$ – оператор типа (3), определенный на многообразии $\mathcal{M}^d$ с положительной сигнатурой метрики; ii) спектр $L_2 = L(0)$ строго положителен; iii) функция $\chi'(\omega_k)$ является положительной (отрицательной) для положительных (отрицательных) собственных значений ω_k.

Для формулировки результата вводится псевдослед – функция

$$K(t) = \frac{1}{2}\sum_\omega e^{-t\omega^2}, \quad t > 0, \tag{6}$$

построенная на вещественных собственных значениях (2). Очевидно, что поведение $K(t)$ при малых t связано с распределением больших собственных значений $|\omega|$.

Результатом работы является установление в рамках условий (i)–(iii) следующего асимптотического разложения, справедливого при малых t,

$$K(t) \sim \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n t^n + b_n t^{n+1/2}\right], \tag{7}$$

где коэффициенты a_n и b_n могут быть вычислены с помощью известной асимптотики

$$K_\omega(t) = \mathrm{Tr}\; e^{-tL(\omega)} \sim \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n(\omega) t^n + b_n(\omega) t^{n+1/2}\right]. \tag{8}$$

Учитывая, что

$$a_n(\omega) = \sum_{m=0}^{n} a_{m,n}\omega^m, \quad b_n(\omega) = \sum_{m=0}^{n} b_{m,n}\omega^m \tag{9}$$

можно доказать, что при сформулированных условиях

$$a_n = \sum_{m=n}^{2n} (-1)^{n-m} \frac{\Gamma\left(-\frac{d}{2}+m\right)}{\Gamma\left(-\frac{d}{2}+n\right)} a_{2(m-n),m}, \tag{10}$$

$$b_n = \sum_{m=n}^{2n} (-1)^{n-m} \frac{\Gamma\left(-\frac{d-1}{2}+m\right)}{\Gamma\left(-\frac{d-1}{2}+n\right)} b_{2(m-n),m}, \tag{11}$$

причем a_0 пропорционален объему пространства $\mathcal{M}^d$, а другие коэффициенты a_n, b_n являются локальными функционалами внешних фоновых полей. b_n отличны от нуля только при наличии границы у $\mathcal{M}^d$.

В разделе 1.4. обсуждается, как нелинейные спектральные задачи вида (2) с условиями (i)–(iii) возникают в случае частиц спина 1/2, а также в неабелевой калибровочной теории.

В последнем разделе изучается связь между спектральной геометрией квадратичных операторных пучков и ультрафиолетовыми расходимостями в соответствующей квантовой теории поля в пространстве-времени $\mathcal{M}^{d+1}$, где формулируется задача (1).

Вторая глава посвящена конечнотемпературной теории поля на стационарном фоне. В разделе 2.2 результаты первой главы используются для получения асимптотического вида свободной энергии $F(\beta)$ как функционала фоновых полей в пределе больших температур $T = \beta^{-1}$. Для задач, одночастичный спектр которых определяется уравнением (2), асимптотика в размерности $D = 4$ имеет вид

$$F(\beta) \sim c_0 a_0\, \beta^{-4} + c_{1/2} b_0\, \beta^{-3} + c_1 a_1\, \beta^{-2} + c_{3/2} b_1\, \beta^{-1} + c_2 a_2\, \ln\beta + O(\beta) \tag{12}$$

Здесь a_n и b_n – те же коэффициенты, что присутствуют в разложении псевдоследа (7), а c_k – известные численные константы.

Эффективность метода иллюстрируется в двух наиболее характерных случаях: в гравитации (для учета эффектов, связанных с вращением системы) и в калибровочных теориях (для описания эффектов экранировки в электрон-позитронной плазме).

В разделе 2.3 исследуется евклидов подход к теории при конечной температуре. Основное внимание уделено трудностям виковского разворота который, устанавливает связь между каноническим определением свободной энергии в статистической механике, и определением в терминах эффективного действия евклидовой теории. Сформулированы требования на спектр, при которых виковский разворот возможен, а сама процедура разворота в явном виде исследована в пределе больших температур.

В разделе 2.4 дано общее определение энергии вакуума на стационарном фоне и исследуются ее свойства.

Третья глава посвящена изучению классических и квантовых аспектов гравитации на классе многообразий с коническими сингулярностями, которые для краткости в тексте диссертации называются торнифолдами. Вблизи сингулярностей торнифолды имеют структуру $C_\beta \times \Sigma$, где C_β – двумерный конус с дефицитом угла $2\pi - \beta$, а Σ – некоторое гладкое многообразие.

В разделе 3.2 излагается способ определения на торнифолдах координатно-инвариантных функционалов от метрики, зависящих полиномиально от кривизны. Метод основан на процедуре сглаживания конических сингулярностей. Он позволяет аккуратно учесть сингулярный характер кривизны и имеет различные приложения. Одно из них – описание топологических характеристик торнифолдов. В качестве примера, можно привести полученное выражение для эйлеровой характеристики $d = 2p-$ мерного замкнутого торнифолда $\mathcal{M}_\beta$

$$\chi[\mathcal{M}_\beta] = c_p \int_{\mathcal{M}_\beta/\Sigma} \mathcal{L}_p + (2\pi)^{-1} \sum_i (2\pi - \beta_i)\chi[\Sigma_i] \quad , \tag{13}$$

где $\chi[\Sigma_i]$ – числа Эйлера поверхностей конических сингулярностей Σ_i и

$$\mathcal{L}_p = \epsilon_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_{2p-1}\mu_{2p}} \epsilon^{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{2p-1}\nu_{2p}} R^{\mu_1\mu_2}_{\ \ \ \nu_1\nu_2} \ldots R^{\mu_{2p-1}\mu_{2p}}_{\ \ \ \nu_{2p-1}\nu_{2p}} \quad , \tag{14}$$

$$c_p = \frac{1}{2^{2(p+1)}\pi^p p!} \quad . \tag{15}$$

Интегрирование в (13) ведется только по регулярной области $\mathcal{M}_\beta/\Sigma$. В качестве другого приложения данного метода в разделе 3.2 проводится вычисление энтропии черных дыр в теориях гравитации с высшими производными. Конкретные формулы содержатся в тексте и согласуются с расчетами в других подходах.

В разделе 3.3 на примере торнисфер (компактных сферических поверхностей с конечным числом изолированных конических сингулярностей) изучаются глобальные свойства замкнутых торнифолдов. Показано, что величины конических дефектов и расположение конических сингулярностей для торнисферы должны удовлетворять определенному ограничению так, чтобы произведение голономий H_k вокруг струн, исходящих радиально из сингулярных точек, было тривиальным, т.е.

$$H_1 H_2 H_3 \cdots H_{n-1} H_n = I. \tag{16}$$

В пределе малых дефицитов углов это условие сводится к простому геометрическому соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = 0, \quad \mathbf{F}_k = \mu_k \mathbf{n}_k, \tag{17}$$

где $\mu_k = 2\pi - \beta_k$ ($\mu_k > 0$) и $\mathbf{n}_k$ – единичные вектора, которые характеризуют положение сингулярностей торнисферы при ее вложении в 3-мерное евклидово пространство. Если кривизна торнифолда не является постоянной, то в правой части (17) появляется дополнительное слагаемое. Используя данные результаты, можно построить обобщение любого сферически-симметричного решения уравнений Эйнштейна (например, решения Шварцшильда), на случай, когда присутствуют идеальные космические струны, направленные радиально.

В разделе 3.4 изучаются однопетлевые расходимости в квантовой теории на торнифолдах. Геометрическая структура расходимостей в размерности $D = 4$ полностью установлена для полей спина 0, 1/2 и 1. Для этой цели рассматриваются эллиптические операторы на $\mathcal{M}_\beta$ вида

$$P_E^{(0)} = -\nabla^2 + \xi R \ , \ P_E^{(1/2)} = -\nabla^2 + \frac{1}{4} R \ , \ (P_E^{(1)})^\mu_\nu = -\nabla^2 \delta^\mu_\nu + R^\mu_\nu \ . \tag{18}$$

Показано, что асимптотика соответствующих операторов теплопроводности на замкнутых торнифолдах имеет вид

$$\mathrm{Tr}\ e^{-tP_E} \sim \frac{1}{(4\pi t)^{D/2}} \sum_{n=0}^{\infty} B_n t^n \quad , \tag{19}$$

с коэффициентами разложения

$$B_k = A_k + A_{\beta,k} \quad . \tag{20}$$

$$A_1 = d_1 \int_{\mathcal{M}_\beta/\Sigma} R \ , \tag{21}$$

$$A_2 = \frac{1}{180} \int_{\mathcal{M}_\beta - \Sigma} \left(q_1 R^{\mu\nu\lambda\rho} R_{\mu\nu\lambda\rho} + q_2 R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + q_3 R^2 \right) \ , \tag{22}$$

$$A_{\beta,1} = \frac{\pi}{3\gamma} \left(f_1(\gamma^2 - 1) + f_2(\gamma - 1) \right) \mathcal{A} \ , \tag{23}$$

$$A_{\beta,2} = \frac{\pi}{3\gamma} \int_\Sigma \left[(\gamma^4 - 1) p_1 \mathcal{P} + (\gamma^2 - 1)(p_2 R + p_3 \mathcal{Q}) + \right.$$
$$\left. (\gamma - 1)(p_4 \mathcal{P} + p_5 R + p_6 \mathcal{Q}) \right] \ , \tag{24}$$

$$\mathcal{P} = 2R_{ijij} - R_{ii} \ , \ \mathcal{Q} = R_{ii}. \tag{25}$$

Здесь $\gamma = \frac{2\pi}{\beta}$ и $r = r(D)$-размерность спинорного представления. Величины R_{ijij}, R_{ii} определяются на Σ с помощью тензора Римана гладкого многообразия ($\beta = 2\pi$)

$$R_{ijij} = R_{\mu\nu\lambda\rho} n_i^\mu n_i^\lambda n_j^\nu n_j^\rho \ , \ R_{ii} = R_{\mu\nu} n_i^\mu n_i^\nu \ , \tag{26}$$

Таблица 1.

spin	d_1	q_1	q_2	q_3
0	$\frac{1}{6}-\xi$	1	-1	$\frac{5}{2}(1-6\xi)^2$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}r$	$-\frac{7}{8}r$	$-r$	$\frac{5}{8}r$
1	$\frac{D}{6}-1$	$D-15$	$90-D$	$\frac{5D}{2}-30$

Таблица 2.

spin	f_1	f_2	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
0	1	0	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{6}-\xi$	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}r$	0	$-\frac{7}{480}r$	$\frac{1}{24}r$	$-\frac{1}{16}r$	0	0	0
1	D	-12	$\frac{D}{60}$	$\frac{D}{6}-1$	1	-1	-2	3

где n_i^μ – два ортонормированных единичных вектора ортогональных к Σ. Конкретные значения для констант d_1, q_i, f_i и p_i приведены в таблицах.

В этом же разделе на примере полей со спином 3/2 и 2 изучаются особенностей теории с высшими спинами на торнифолдах. Установлено, что при наличии конических сингулярностей в квантовой теории таких спинов предельный переход, когда дефицит угла исчезает, не существует. Это связано с тем, что вблизи конических сингулярностей часть локальных изометрий нарушается, что приводит к появлению дополнительных состояний в спектре соответствующих операторов Лапласа.

Третья глава завершается разделом 3.4, в котором рассматривается вопрос об извлечении энергии черной дыры при помощи космических струн. Эта (стоящая несколько в стороне от основной темы диссертации) проблема непосредственно связана с результатами раздела 3.3. Основной вывод здесь состоит в том, что черная дыра, внутрь которой радиально входит космическая струна, теряет энергию, возбуждая колебания струны. Можно показать, что отток энергии вдоль струны сопоставим с потерей энергии за счет квантового испарения черной дыры. Поэтому, когда количество струн велико (например, 10^3 для теории Великого Объединения или 10^{31} для электрослабой теории), связанный с ними эффект намного превышает эффект Хокинга.

Четвертая глава касается непосредственно конечнотемпературной теории в пространствах с горизонтом Киллинга. В разделе 4.2 обсуждаются общие свойства одночастичных возбуждений в таких пространствах.

В разделах 4.3 и 4.4 представлены два способа регуляризации расходимостей спектральной плотности одночастичных спектров. В разделе 4.3 используется регуляризация инфракрасного типа, когда ограничивается объем ультрастатического пространства, что эквивалентно введению обрезания на некотором расстоянии вблизи горизонта.

В разделе 4.4 показано, что расходимости также можно устранить в размерной регуляризации и в регуляризации Паули-Вилларса. Для скалярных и спинорных полей геометрическая структура этих расходимостей получена в явном виде для произвольного стационарного гравитационного поля с горизонтом Киллинга и ненулевой поверхностной гравитацией.

На основе этих результатов и результатов третьей главы в разделе 4.5 установлено, что расходимости в энтропии полей низших спинов, вычисленные с применением регуляризации ультрафиолетового типа, полностью эквивалентны расходимостям, возникающим за счет конических сингулярностей в евклидовой теории. Тем самым установлено соответствие между каноническим определением в рамках статистической механики при наличии горизонта Киллинга и определением в евклидовой теории. Данное свойство позволяет относиться к расходимостям энтропии квантовых полей вблизи черной дыры как к расходимостям ультрафиолетового типа.

В разделе 4.6 доказывается общее утверждение, что для полей, не имеющих неминимальной связи с кривизной, расходимости в их энтропии полностью устраняются перенормировкой констант в эффективном гравитационном действии.

Проблема энтропии черных дыр в теории индуцированной гравитации рассматривается в пятой главе. В разделе 5.2 представлены модели индуцированной гравитации, где действие Эйнштейна целиком возникает за счет эффектов поляризации вакуума свободными массивными полями (конституентами) со спинами 0, 1/2 и 1. Индуцированное гравитационное действие $\Gamma[g]$ определяется по формуле

$$e^{i\Gamma[g]} = \int [D\Phi] \exp(iI[\Phi, g]), \tag{27}$$

где интегрирование ведется по всем конституентным полям, которые обозначены коллективным символом Φ, а $I[\Phi, g]$ есть их классическое действие. В пределе малой кривизны лидирующий вклад в $\Gamma[g]$ имеет вид классического действия

$$\Gamma[g] \simeq \frac{1}{16\pi G_{\text{ind}}} \int \sqrt{g} d^4x (R(g) - 2\Lambda_{\text{ind}}). \tag{28}$$

Здесь G_{ind} и Λ_{ind} суть индуцированные гравитационная и космологическая постоянные. Поскольку G_{ind} и Λ_{ind} не содержат ультрафиолетовых расходимостей, они являются вычисляемыми величинами. Важная особенность всех исследованных моделей состоит в неизбежном наличии конституентов, имеющих в действии неминимальную связь с кривизной фоновой метрики. Например, простейшая теория такого типа включает N_s свободных неминимально связанных скалярных полей ϕ_i с массами $m_{s,i}$ и N_d свободных дираковских фермионов ψ_j с массами $m_{d,j}$. Постоянная Ньютона в ней определяется по формуле

$$\frac{1}{G_{\mathrm{ind}}}=\frac{1}{12\pi}\left(\sum_{i=1}^{N_s}(1-6\xi_i)\ m_{s,i}^2\ln m_{s,i}^2+2\sum_{j=1}^{N_d}m_{d,j}^2\ln m_{d,j}^2\right)\quad . \tag{29}$$

Другой класс рассмотренных моделей содержит векторные конституенты, в которых неминимальные связи имеют геометрическое происхождение.

В следующих двух разделах доказывается, что в пределе, когда кривизна пространства мала по сравнению с массами конституентов, энтропия Бекенштейна-Хокинга черной дыры дается формулой

$$S^{BH}=\frac{\mathcal{A}}{4G_{\mathrm{ind}}}=S-Q\ . \tag{30}$$

Здесь S – суммарная тепловая энтропия всех конституентов вблизи горизонта черной дыры, а Q – среднее значения нетеровского заряда на горизонте, отвечающее неминимальным связям конституентов. Для теории (29)

$$Q=2\pi\sum_{i=1}^{N_s}\xi_i\int_\Sigma\sqrt{\gamma}d^2x<\hat{\phi}_i^2>\ \ , \tag{31}$$

где интегрирование ведется по поверхности горизонта Σ, а среднее операторов вычисляется в вакууме Хартла-Хокинга.

Формула (30) является центральным результатом диссертации. Она универсальна, поскольку не зависит от модели конституентов и справедлива для неэкстремальных вращающихся и заряженных черных дыр.

Случай заряженных черных дыр подробно изучается в разделе 5.4 на примере индуцированной теории в трех измерениях, действие которой в низкоэнергетическом пределе соответствует теории Эйнштейна-Максвелла. В трех измерениях можно добиться полного сокращения всех ультрафиолетовых расходимостей, что позволяет провести строгую проверку уравнения (30). Результаты затем обобщаются на четырехмерный случай.

В разделе 5.5 обсуждается возможность того, что в индуцированной теории при большом числе конституентов масштаб, где проявляются эффекты квантовой гравитации, может быть существенно ниже планковской шкалы.

Раздел 5.6 посвящен проблеме энтропии черных дыр в двух измерениях и моделям индуцированной гравитации в форме теории Лиувилля. Особенность этой теории состоит в том, что основную роль здесь играют безмассовые конституенты. Нетеровский заряд Q в (30) в таких моделях является константой, поэтому энтропия 2-мерной черной дыры полностью определяется энтропией безмассовых полей.

В отличие от S величина Q в (30) не имеет смысла энтропии. Поэтому в шестой главе интерпретация вычитания Q в уравнении (30) дана с точки зрения статистической механики. Прежде всего, в разделе 6.2 показано, что в пространстве с горизонтом Киллинга существует два определения энергии. Энергия может быть определена канонически, т.е. через гамильтониан системы $\mathcal{H}$, который является генератором сдвигов вдоль времени. Можно также определить энергию $\mathcal{E}$ в терминах тензора энергии-импульса, получаемого вариацией по метрике.

В разделе 6.2 доказываются два важных факта. 1) Величины $\mathcal{H}$ и $\mathcal{E}$ для системы во внешнем стационарном гравитационном поле отличаются на полную дивергенцию, которая сводится к поверхностному слагаемому на горизонте,

$$\mathcal{H} - \mathcal{E} = \frac{\kappa}{2\pi} Q \quad , \tag{32}$$

где κ – поверхностная гравитация. В обеих формулах, (30) и (32), Q есть одна и та же величина. В общем случае она имеет вид

$$Q = 8\pi \int_{\Sigma} \sqrt{\sigma} d^2 z E^{\mu\nu\lambda\rho} p_\mu l_\nu p_\lambda l_\rho, \tag{33}$$

$$E^{\mu\nu\lambda\rho} = \hat{X}^{\mu\nu\lambda\rho} L \quad , \tag{34}$$

$$\hat{X}^{\mu\nu\lambda\rho} \equiv \frac{\partial}{\partial R_{\mu\nu\lambda\rho}} - \nabla_{\gamma_1} \frac{\partial}{\partial \nabla_{\gamma_1} R_{\mu\nu\lambda\rho}} + \dots + (-1)^m \nabla_{(\gamma_1 \dots} \nabla_{\gamma_m)} \frac{\partial}{\partial \nabla_{(\gamma_1 \dots} \nabla_{\gamma_m)} R_{\mu\nu\lambda\rho}} \quad . \tag{35}$$

Здесь L лагранжиане полей материи в данной теории, а m – высший порядок производной тензора Римана в $L_{(m)}$. Величина Q есть нетеровский заряд, отвечающей изометрии по времени, и, как следует из (34), Q не равна нулю в теориях с неминимальной связью.

2) Вариации энергии $\mathcal{E}$ полей материи снаружи черной дыры входят в первый закон термодинамики черной дыры. Например, разница между значениями массы черный дыры, когда присутствует поле материи с энергией $\mathcal{E}$, и когда это поле отсутствует, дается формулой

$$\delta M = \frac{\kappa}{2\pi} \delta S_{(g)} + \mathcal{E} \quad , \tag{36}$$

в которой величина $S_{(g)}$ есть энтропия черной дыры для теории гравитации данного типа. В случае теории Эйнштейна $S_{(g)} = S^{BH}$.

Используя эти факты, в разделе 6.3 показано, что энтропию Бекенштейна-Хокинга в индуцированной гравитации можно связать с вырождением спектра масс черной дыры. В основе этого вывода лежит предположение, что квантовые возбуждения конституентов приводят к флуктуациям массы черной дыры. Если масса черной дыры

M на пространственной бесконечности фиксирована, то вариация массы $M_H = M - \mathcal{E}$ определяется изменением энергии $\mathcal{E}$ конституентов снаружи черной дыры. Таким образом, спектр масс черной дыры M_H эквивалентен спектру $\mathcal{E}$. Чтобы теперь перейти от распределения по энергиям к распределению, определяемому спектром канонической энергии $\mathcal{H}$, нужно учесть, что $\mathcal{E} = \mathcal{H} - T_H Q$. Это факт объясняет вычитание Q в (30).

Шестую главу завершает раздел 6.4, где представлена также другая точка зрения на формулу (30). Здесь энтропия черной дыры интерпретируется как entanglement entropy или мера потери информации о состояниях конституентов, скрытых под горизонтом. С учетом (36) вывод о том, что какой-либо процесс приводит к потере информации, должен следовать из анализа знака изменения энергии $\mathcal{E}$. Использование для этой цели канонической энергии $\mathcal{H}$ может привести к ошибке.

Тепловая энтропия конституентов S в (30) может рассматриваться как entanglement энтропия только в том случае, когда речь идет о корреляции состояний с определенной канонической энергией $\mathcal{H}$. Однако для правильного определения величины теряемой информации требуется изучить корреляции между наблюдаемыми и ненаблюдаемыми состояниями, которые имеют, соответственно, положительную и отрицательную энергии $\mathcal{E}$. Это и объясняет вычитание Q в (30).

Интерпретации, данные в разделах 6.3 и 6.4, не противоречат друг другу, поскольку в обоих случаях S^{BH} оказывается связанной с распределением по $\mathcal{E}$.

В заключении перечислены основные результаты, выносимые на защиту.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. D.V. Fursaev, *Spectral Asymptotics of Eigen-value Problems with Non-linear Dependence on the Spectral Parameter*, Class. Quantum Grav. **19** (2002) 3635-3652.

2. V.P. Frolov, D.V. Fursaev, and D.N. Page, *Thorny Spheres and Black Holes with Strings*, Phys. Rev. **D65** (2002) 104029.

3. D.V. Fursaev, *Statistical Mechanics, Gravity and Euclidean Theory,* Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **104** (2002) 33-62.

4. D.V. Fursaev, *Kaluza-Klein Method in Theory of Rotating Quantum Fields*, Nucl. Phys. **B596** (2001) 365-386.

5. D.V. Fursaev and A.I. Zelnikov, *Thermodynamics, Euclidean Gravity and Kaluza-Klein Reduction*, Class. Quantum Grav. **18** (2001) 3825-3842.

6. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Black Holes with Polyhedral Multistring Configurations*, Class. Quantum Grav. **18** (2001) 1535-1542.

7. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Mining Energy from a Black Hole by Strings*, Phys. Rev. **D63** (2001) 124010.

8. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Statistical Mechanics on Axially Symmetric Space-Times with the Killing Horizon and Entropy of Rotating Black Holes in Induced Gravity*, Phys. Rev. **D61** (2000) 024007.

9. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Statistical Mechanics of Charged Black Holes in Induced Einstein-Maxwell Gravity*, Phys. Rev. **D61** (2000) 064010.

10. D.V. Fursaev, *Black Hole Entropy in Induced Gravity and Information Loss*, Nucl. Phys. (Proc. Suppl.) **88** (2000) 277-280.

11. D.V. Fursaev, *Black Hole Thermodynamics, Induced Gravity and Gravity in Brane Worlds*, in "Quantization, Gauge Theory and Strings", Proceedings of the International Conference Dedicated to the Memory of Professor Efim Fradkin, Moscow, Russia, 5-10 Jun 2000, Eds A. Semikhatov et al, v.2, pp. 462-470.

12. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Plenty of Nothing: Black Hole Entropy in Induced Gravity*, J. Astrophys. Astr. **20** (1999) 121-129.

13. D.V. Fursaev, *Energy, Hamiltonian, Noether Charge and Black Holes*, Phys. Rev. **D59** (1999) 064020.

14. V.P. Frolov, D.V. Fursaev, J. Gegenberg, G. Kustatter, *Thermodynamics and Statistical Mechanics of Induced Liouville Gravity*, Phys. Rev. **D60** (1999) 024016.

15. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Thermal Fields, Entropy and Black Holes*, Class. Quantum Grav. **15** (1998) 2041-2074.

16. D.V. Fursaev, *Euclidean and Canonical Formulations of Statistical Mechanics in the Presence of Killing Horizons*, Nucl. Phys. **B524** (1998) 447-468.

17. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Black Hole Entropy in Induced Gravity: Reduction to 2D Quantum Field Theory on the Horizon*, Phys. Rev. **D58** (1998) 124009.

18. L. De Nardo, D.V. Fursaev and G. Miele, *Heat Kernel Coefficients and Spectra of the Vector Laplacians on Spherical Domains with Conical Singularities*, Class. Quantum Grav. **14** (1997) 1059-1078.

19. D.V. Fursaev and G. Miele, *Cones, Spins and Heat Kernels*, Nucl. Phys. **B844** (1997) 697-723.

20. V.P. Frolov, D.V. Fursaev and A.I. Zelnikov, *Statistical Origin of Black Hole Entropy in Induced Gravity*, Nucl. Phys. **B486** (1997) 339-352.

21. V.P. Frolov and D.V. Fursaev, *Mechanism of Generation of Black Hole Entropy in Sakharov's Induced Gravity*, Phys. Rev. **D56** (1997) 2212-2225.

22. V.P. Frolov, D.V. Fursaev and A.I. Zelnikov, *Black Hole Entropy: Statistical Mechanics, Thermodynamics and Subtraction Procedure*, Phys. Lett. **B382** (1996) 220-226.

23. V.P. Frolov, D.V. Fursaev and A.I. Zelnikov, *Black Hole Entropy: Off Shell versus On Shell*, Phys. Rev. **D54** (1996) 2711-2731.

24. D.V. Fursaev and S.N. Solodukhin, *On One-Loop Renormalization of Black-Hole Entropy*, Phys. Lett. **B365** (1996) 51-60.

25. D.V. Fursaev and S.N. Solodukhin, *Description of the Riemannian Geometry in the Presence of Conical Defects*, Phys. Rev. **D52** (1995) 2133-2144.

26. D.V. Fursaev, *Black Hole Thermodynamics and Renormalization*, Mod. Phys. Lett. **A10** (1995) 649-656.

27. D.V. Fursaev, *Temperature and Entropy of a Quantum Black Hole and Conformal Anomaly*, Phys. Rev. **D51** (1995) R5352-R5355.

28. D.V. Fursaev, *Spectral Geometry and One Loop Divergences on Manifolds with Conical Singularities*, Phys. Lett. **B334** (1994) 53-60.

Получено 28 февраля 2003 г.

Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 03.03.2003.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,16. Тираж 100 экз. Заказ № 53795.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/