

P5-2003-124

Л. В. Бобылева, Э. А. Перельштейн

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПУЧКОВ
МЕТОДОМ МОМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
СТЕПЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА**

Введение

В теории пучков заряженных частиц наиболее полно исследовано движение частиц в заданных внешних полях, когда собственными электромагнитными полями частиц пучка можно пренебречь (так называемое одночастичное приближение). В общем случае динамика пучков заряженных частиц описывается самосогласованной системой уравнений Власова. Решение такой системы сопряжено с большими вычислительными трудностями, поэтому на практике используется небольшое число точно решаемых моделей пучков. Учитывая современные задачи физики и техники сильноточных пучков (сильноточные ускорители протонов в проблемах термояда и электрояда, ионные пучки с небольшой энергией в ядерной физике и т. д.), необходимо использовать и разрабатывать новые математические методы моделирования динамики пучков с большим пространственным зарядом. В настоящее время чаще всего используются метод макрочастиц (или метод частиц в ячейках) /1/ и метод моментов /2, 3, 4/.

При исследовании пучков заряженных частиц практический интерес зачастую представляют усредненные характеристики, такие как плотность, средняя скорость, температура и т.д. Эту информацию можно получить, вычисляя моменты функции распределения частиц в фазовом пространстве. Движение пучка рассматривается как движение замкнутого фазового множества, что позволяет ввести моменты функции распределения по всей совокупности фазовых координат.

В настоящее время для анализа динамики пучков используются уравнения для моментов второго порядка, соответствующие эффективной линеаризации внешних и собственных электромагнитных полей по отклонениям от оси пучка /3,5/. Таким образом, опускаются нелинейные эффекты, в частности, изменение вида плотности пучка и среднеквадратичного эмиттанта пучка в нелинейных полях и др. Чтобы правильно учитывать эти важные для приложений явления, необходимо найти процедуру обрыва бесконечной системы зацепляющихся уравнений для моментов в высших порядках и выразить усредненные со степенными весами значения собственной силы Лоренца через используемые моменты.

Проблему обрыва цепочки можно просто решить, считая все моменты с порядком выше определенного нулевыми. Однако ограниченность такого подхода видна, например, для периодического движения частиц. Если в нерелятивистском одномерном движении частиц в постоянном внешнем поле пренебречь моментами высоких порядков в цепочке уравнений, то в решении появляются секулярные члены (со степенным ростом во времени)

точно так же, как при решении соответствующего нелинейного уравнения движения одной частицы методом последовательных приближений.

Задача о представлении степенных моментов собственной силы Лоренца через моменты низших порядков и задача обрыва цепочки рассматриваются в данной работе. Для решения проблемы используется полиномиальная аппроксимация плотности заряда пучка с круговым поперечным сечением. Собственное электрическое поле пучка восстанавливается по найденной плотности заряда и затем используется в системе дифференциальных уравнений для моментов. Для обрыва бесконечной зацепляющейся цепочки уравнений для моментов вводится соотношение между моментами высших и низших порядков, которое найдено из анализа асимптотических свойств моментов в методе макрочастиц, аналитической модели нелинейной динамики и в экспериментах с сильноточными пучками /6, 7, 8/.

На основе предложенного подхода численно решена задача о разлете сильноточного пучка в свободном пространстве и в частном случае проведено сравнение с известными результатами. Показано, что, в отличие от широко используемой известной модели для эволюции среднеквадратичных размеров (с использованием эффективной линеаризации электромагнитных полей), предлагаемая модель учитывает очень важные для теории и приложений нелинейные эффекты собственного поля пучков. К ним прежде всего относятся эффект изменения плотности, изменение эмиттанса и образование гало пучка.

Численная реализация новой модели с использованием степенной аппроксимации плотности заряда и выбранного в работе способа обрыва зацепляющейся цепочки уравнений для моментов функции распределения частиц используется для анализа динамики пучка в гладком фокусирующем канале с нелинейной силой.

1. Вычисление собственного электрического поля пучка путем восстановления плотности заряда по первым моментам

Ограничимся здесь естественным для физики пучков классом ограниченных в пространстве распределений заряда. Рассмотрим задачу восстановления плотности заряда по известным моментам функции распределения в простом случае кругового сечения пучка радиуса a . В случае круговой симметрии уравнение для напряженности электрического поля имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \cdot E_r) = 4\pi\rho(r), \quad E_r(r=0) = 0.$$

Получим выражение для напряженности электрического поля :

$$E_r = \frac{4\pi}{r} \int_0^r \rho(r) r dr. \quad (1)$$

Пусть нам известны первые m моментов $M^{0,0}, M^{1,0}, \dots, M^{m,0}$ распределения нормированной плотности заряда $\rho(r)$ ($\int_0^a \rho(r) r dr = 1$). Моменты функции распределения

плотности заряда $\rho(r)$ имеют вид

$$\int_0^a r^n \rho(r) r dr = M^{n,0}, \quad n = 0, 1, \dots, m.$$

Будем искать приближение функции распределения плотности заряда $\rho(r)$ с помощью степенного ряда по радиусу

$$\rho(r) = \sum_{i=0}^m \alpha_i r^i. \quad (2)$$

При этом как меру точности приближения используем величину

$$I_m(\alpha_m) = \int_0^a \left(\rho(r) - \sum_{i=0}^m \alpha_i r^i \right)^2 r dr,$$

которая представляет собой норму функции $\left(\rho(r) - \sum_{i=0}^m \alpha_i r^i \right)$ в классе L_w^2 с весом $w = r/9!$.

Чтобы получить минимальное отклонение, следует минимизировать функцию $I_m(\alpha_m) = I_m(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ по всем коэффициентам $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$. Необходимым условием минимума функции многих переменных является равенство нулю всех ее частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (I_m(\alpha_m)) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, m, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\int_0^a \left(\rho(r) - \sum_{i=0}^m \alpha_i r^i \right)^2 r dr \right) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

Дифференцируя уравнения (3) и используя определение для моментов, получим

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \int_0^a r^{j+i+1} dr = M^{j,0}, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Вычисляя внутренние интегралы, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов степенного ряда α_i , $i = 0, 1, \dots, m$:

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \frac{a^{j+i+2}}{j+i+2} = M^{j,0}, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (4)$$

Таким образом, зная радиус круга a и первые m моментов $M^{0,0}, M^{1,0}, \dots, M^{m,0}$ функции распределения плотности заряда, можно найти коэффициенты α_i , $i = 0, 1, \dots, m$, как решение системы линейных алгебраических уравнений (4).

Для того, чтобы учитывать изменение радиуса пучка со временем, будем рассматривать систему уравнений (4) при $j = 0, 1, \dots, m+1$ как систему относительно неизвестных коэффициентов α_i , $i = 0, 1, \dots, m$, и радиуса a :

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \frac{a^{j+i+2}}{j+i+2} = M^{j,0}, \quad j = 0, 1, \dots, m+1. \quad (5)$$

Система (5), очевидно, является *нелинейной* системой алгебраических уравнений. Решая эту систему, вычисляем значения коэффициентов α_i , $i = 0, 1, \dots, m$, по которым восстанавливаем функцию распределения плотности заряда $\rho(r)$. Подставляя восстановленную функцию

распределения $\rho(r) = \sum_{i=0}^m \alpha_i r^i$ в (1), получим выражение для напряженности электрического

поля :

$$E_r = \frac{4\pi}{r} \int \left(\sum_{i=0}^m \alpha_i r^i \right) r dr = \frac{4\pi}{r} \sum_{i=0}^m \alpha_i \int r^{i+1} dr = \frac{4\pi}{r} \sum_{i=0}^m \alpha_i \left(\frac{r^{i+2}}{i+2} \right) = 4\pi \sum_{i=0}^m \alpha_i \left(\frac{r^{i+1}}{i+2} \right).$$

Таким образом, мы получили степенное разложение для напряженности собственного электрического поля пучка $E_r = \sum_{k=0}^m \beta_k r^k$, где $\beta_k = 4\pi \left(\frac{\alpha_{k-1}}{k+1} \right)$.

Рассмотрим решение задачи восстановления функции распределения плотности заряда в простейших случаях.

1) Пусть плотность заряда $\rho(r, z) = \alpha_0(z)$, т.е. $m = 0$. В этом случае система уравнений

(5) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{a^2}{2} &= M^{0,0}, \\ \alpha_0 \frac{a^4}{4} &= M^{2,0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решая систему (6), получим $\alpha_0 = \frac{(M^{0,0})^2}{M^{2,0}}$, $a = \sqrt{\frac{2M^{2,0}}{M^{0,0}}}$. Следовательно, плотность заряда $\rho(r) = \alpha_0 = \frac{(M^{0,0})^2}{M^{2,0}}$.

2) Пусть плотность заряда $\rho(r, z) = \alpha_0(z) + \alpha_2(z) \cdot r^2$, т.е. $m = 2$. В этом случае система уравнений (5) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \alpha_0 \frac{a^2}{2} + \alpha_2 \frac{a^4}{4} &= M^{0,0}, \\ \alpha_0 \frac{a^4}{4} + \alpha_2 \frac{a^6}{6} &= M^{2,0}, \\ \alpha_0 \frac{a^6}{6} + \alpha_2 \frac{a^8}{8} &= M^{4,0}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система нелинейных уравнений (7) легко решается. Первые два уравнения являются линейными относительно коэффициентов α_0 , α_1 . Решая эти уравнения, получим

$$\alpha_0 = \frac{8M^{0,0}}{a^2} - \frac{12M^{2,0}}{a^4}, \quad \alpha_1 = -\frac{12M^{0,0}}{a^4} + \frac{24M^{2,0}}{a^6}. \quad (8)$$

Подставляя значения (8) коэффициентов α_0 , α_1 в третье уравнение системы (7), получим биквадратное уравнение относительно a :

$$-\frac{a^4 M^{0,0}}{6} + a^2 M^{2,0} = M^{4,0}. \quad (9)$$

Найдем нужный корень a в соответствии с начальными условиями задачи. Подставляя полученное a в соотношения (8), найдем значения коэффициентов α_0 , α_1 . Таким образом, для восстановления функции распределения плотности заряда $\rho(r) = \alpha_0 + \alpha_2 r^2$ и радиуса пучка a достаточно знать значения моментов $M^{0,0}$, $M^{2,0}$, $M^{4,0}$.

2. Эволюция моментов функции распределения в степенном приближении собственного поля

Изменение моментов функции распределения плотности заряда при движении пучка заряженных частиц определяется уравнениями для моментов /4/:

$$\frac{dM^{p,q}}{dz} = pM^{p-1,q+1} + q \sum_k a_k(z) M^{p+k,q-1},$$

где $a_k(z) = \beta_k + \gamma_k$. Внешнее поле представлено в виде $E_{ext} = \sum_{k=0}^n \gamma_k r^k$.

Запишем уравнения для моментов в развернутом виде:

$$\begin{aligned} \frac{dM^{0,0}}{dz} &= 0, \\ \frac{dM^{1,0}}{dz} &= M^{0,1}, \\ \frac{dM^{0,1}}{dz} &= \sum_k a_k(z)M^{k,0}, \\ \frac{dM^{2,0}}{dz} &= M^{1,1}, \\ \frac{dM^{1,1}}{dz} &= M^{0,2} + \sum_k a_k(z)M^{k+1,0}, \\ \frac{dM^{0,2}}{dz} &= 2 \sum_k a_k(z)M^{k,1}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Для интегрирования уравнений для моментов была выбрана симметричная схема Эйлера /10/ второго порядка точности по h (h – шаг интегрирования). Согласно этому методу

исходное уравнение $\frac{dY}{dz} = F(Y, z)$ заменяется разностным уравнением

$$\frac{Y_{n+1} - Y_n}{h} - \frac{1}{2}(F(Y_n, z_n) + F(Y_{n+1}, z_{n+1})) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad Y_0 = Y(z_0).$$

Метод является неявным, новое значение Y_{n+1} определяется по найденному ранее Y_n путем решения уравнения

$$Y_{n+1} - \frac{1}{2}hF(Y_{n+1}, z_{n+1}) = Y_n + \frac{1}{2}hF(Y_n, z_n).$$

Этот метод был выбран потому, что он является *консервативным*, что очень важно в рассматриваемых задачах.

Зная в начальный момент времени радиус круга a и первые m моментов $M^{0,0}, M^{1,0}, \dots, M^{m,0}$ функции распределения плотности заряда, восстанавливаем саму функцию распределения $\rho(r)$ и находим степенное разложение для напряженности электрического поля $E_r = \sum_{k=0}^m \beta_k r^k$. Затем интегрируем уравнения для моментов и находим значения моментов $M^{0,0}, M^{1,0}, \dots, M^{m,0}$ в следующий момент времени. По найденным моментам снова восстанавливаем функцию распределения $\rho(r)$ и напряженность электрического поля и т.д. Такой подход обеспечивает решение самосогласованной задачи динамики пучка, поскольку макрочастицы движутся с учетом собственного поля, которое

определяется движением всех частиц пучка. Математическая модель реализована в пакете «Mathematica 4.2».

3. Решение самосогласованной задачи о свободном разлете пучка с пространственным зарядом в модели степенного приближения плотности заряда

Известные решения самосогласованной задачи о свободном разлете пучка с пространственным зарядом используют модели с однородной плотностью заряда по сечению кругового пучка. Использование степенного приближения плотности заряда в модели моментов позволяет исследовать нелинейные эффекты, которые отсутствуют в модели с однородной плотностью заряда. Рассмотрим здесь задачу о разлете пучка кругового пучка с радиально-однородной и неоднородной плотностью.

В случае пучка с однородной плотностью в развитом выше подходе разлет описывается системой уравнений для плотности $\rho(r) = \alpha_0$ и радиуса пучка a

$$\alpha_0 \frac{a^2}{2} = M^{0,0},$$

$$\alpha_0 \frac{a^4}{4} = M^{2,0}$$

и системой уравнений для моментов второго порядка

$$\frac{dM^{0,0}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dM^{2,0}}{dz} = M^{1,1},$$

$$\frac{dM^{1,1}}{dz} = M^{0,2} + \beta_1 M^{2,0},$$

$$\frac{dM^{0,2}}{dz} = 2\beta_1 M^{1,1},$$

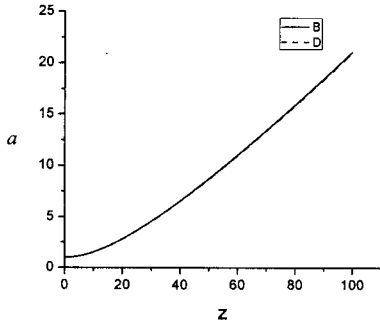
где $\beta_1 = 4\pi \left(\frac{\alpha_0}{2} \right)$, $E_r = \beta_1 r$ - напряженность линейного собственного электрического поля пучка. Начальные условия для моментов соответствуют однородной плотности внутри круга единичного радиуса и $M_{z=0}^{1,1} = 0$, $M_{z=0}^{0,2} = 0.000028$.

Известное модельное уравнение, которое определяет огибающую $a(z)$ вдоль оси движения пучка z , имеет вид /11/

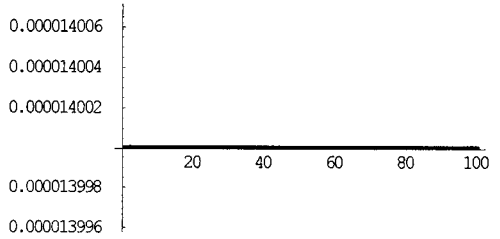
$$\frac{d^2 a}{dz^2} = \frac{\varepsilon^2}{a^3} + \frac{2ZI_0}{A\beta^3 I_A} \frac{1}{a} \quad (10)$$

Результаты вычислений зависимостей огибающих пучка от продольной координаты z (см) при свободном разлете по модели моментов ($a_{\text{выч}}$ – линия D) и по данному уравнению ($a_{\text{матем}}$ – линия B) приведены на рис. 1а. Совпадение этих решений позволяет сделать вывод о хорошей точности счета.

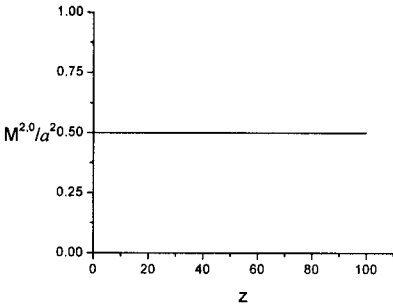
Рис. 1б показывает сохранение эмиттанса с точностью 10^{-6} . Рис. 1в иллюстрирует сохранение однородной плотности, для которой отношение $M^{2,0}/a^2 = 0.5$.



а)



б)



в)

Рис. 1. Изменение огибающей (а), среднеквадратичного эмиттанса (б) и относительного среднеквадратичного размера (в) пучка с однородной плотностью при свободном разлете

В случае пучка с неоднородной плотностью в развитом выше подходе разлет описывается системой уравнений для плотности $\rho(r) = \alpha_0 + \alpha_2 r^2$ и радиуса пучка a

$$\alpha_0 \frac{a^2}{2} + \alpha_2 \frac{a^4}{4} = M^{0,0},$$

$$\alpha_0 \frac{a^4}{4} + \alpha_2 \frac{a^6}{6} = M^{2,0},$$

$$\alpha_0 \frac{a^6}{6} + \alpha_2 \frac{a^8}{8} = M^{4,0}$$

и системой уравнений для моментов второго порядка

$$\frac{dM^{0,0}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dM^{2,0}}{dz} = M^{1,1},$$

$$\frac{dM^{1,1}}{dz} = M^{0,2} + \beta_1 M^{2,0} + \beta_3 M^{4,0},$$

$$\frac{dM^{0,2}}{dz} = 2\beta_1 M^{1,1} + \beta_3 M^{3,1},$$

где $\beta_k = 4\pi \left(\frac{\alpha_{k-1}}{k+1} \right)$, $E_r = \beta_1 r + \beta_3 r^3$ - напряженность нелинейного собственного электрического поля пучка. Начальные условия для моментов соответствуют неоднородной плотности $\rho(r) = 1 - 0.9r^2$ внутри круга единичного радиуса и $M_{z=0}^{1,1} = 0$, $M_{z=0}^{0,2} = 0.000028$.

Для замыкания цепочки моментов было использовано соотношение

$$M^{4,0} = kM \cdot (M^{2,0})^2,$$

$$kM = kM_0 + (kM_\infty - kM_0) \cdot \left(1 - \text{Exp} \left(- \frac{kE \cdot z}{z \max} \right) \right),$$

где коэффициент $kM_0 = \frac{M^{4,0}}{(M^{2,0})^2}$ - в начальный момент времени, коэффициент kM_∞

соответствует асимптотическим значениям этого отношения (в данной работе $kM_\infty = 1.33$).

Параметр kE выбирается из условий задачи, в нашем расчете $kE = 10$. Значения для

момента $M^{3,1}$ вычислялись из дифференциального уравнения $M^{3,1} = \frac{dM^{4,0}}{dz}$.

Результаты численного решения задачи иллюстрируются на рис. 2а, б, в. Как видно из рис. 2а, огибающая пучка с неоднородной плотностью мало отличается от огибающей пучка для случая однородной плотности. Для контроля точности расчета на рис. 2а приведены огибающие пучка, соответствующие двум значениям шага интегрирования ($h = 0.025$, $h = 0.0125$). На рис. 2б показан рост эмиттанса при свободном разлете пучка с неоднородной плотностью. На рис. 2в показано изменение величины $M^{2,0}/a^2$. В отличие от предыдущего

случая видно, что нелинейность собственного поля пучка нарушает постоянство этой величины и асимптотический выход на новое стационарное значение.

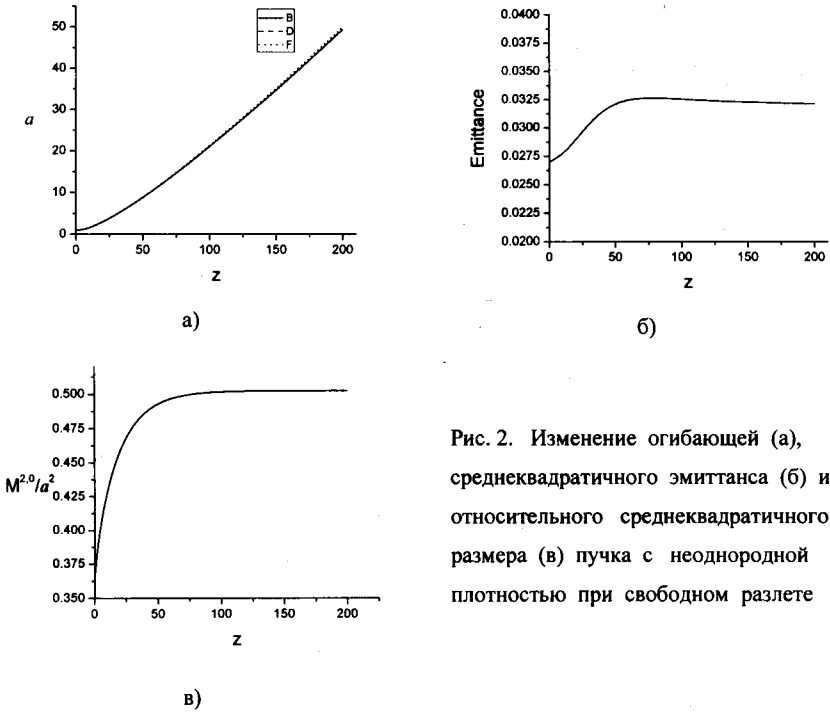


Рис. 2. Изменение огибающей (а), среднеквадратичного эмиттansa (б) и относительного среднеквадратичного размера (в) пучка с неоднородной плотностью при свободном разлете

Относительная ошибка вычисления огибающей пучка $\frac{\delta a}{a} = \max_{0 \leq z \leq z_{\max}} \left(\frac{a_{\text{mod}} - a}{a} \right) \approx 1\%$,

где a_{mod} - огибающая пучка, вычисленная с помощью модельной программы, a - огибающая пучка как решение известного дифференциального уравнения (10).

Изменение плотности пучка показано на рис. 3, где представлены последовательные графики плотности через $\Delta z = 2.5$ см. Линия F — плотность распределения заряда при $z = 0$, линия H — при $z = 2.5$, J — $z = 5$, L — $z = 7.5$, В — $z = 10$, N — $z = 12.5$, P — $z = 15$.

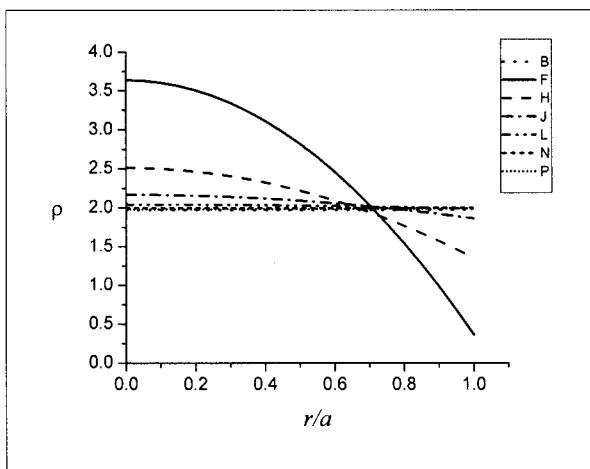


Рис. 3. Изменение плотности заряда для пучка с неоднородной плотностью при свободном разлете

4. Решение задачи о динамике пучка в гладком фокусирующем канале в модели степенного приближения плотности заряда

Динамика кругового пучка с радиально-однородной плотностью в гладком фокусирующем канале с кубической нелинейностью описывается системой уравнений для моментов второго порядка

$$\begin{aligned} \frac{dM^{0,0}}{dz} &= 0, \\ \frac{dM^{2,0}}{dz} &= M^{1,1}, \\ \frac{dM^{1,1}}{dz} &= M^{0,2} + \gamma_1 M^{2,0} + \gamma_3 M^{4,0}, \\ \frac{dM^{0,2}}{dz} &= 2(\gamma_1 M^{1,1} + \gamma_3 M^{3,1}). \end{aligned}$$

Рассмотрим для примера задачу, когда начальные условия для моментов соответствуют однородной плотности внутри круга единичного радиуса и $M_{z=0}^{1,1} = 0$, $M_{z=0}^{0,2} = 0.000028$. Внешняя нелинейная фокусирующая сила имеет вид $F_{ext} = -r + 0.2r^3$ ($\gamma_1 = -1$, $\gamma_3 = 0.2$).

Для замыкания цепочки моментных уравнений, так же как в задаче о свободном разлете пучка, используем соотношение

$$M^{4,0} = kM \cdot (M^{2,0})^2,$$

$$kM = kM_0 + (kM_\infty - kM_0) \cdot \left(1 - \text{Exp}\left(-\frac{kE \cdot z}{z \max}\right)\right),$$

где коэффициент $kM_0 = \frac{M^{4,0}}{(M^{2,0})^2}$ — в начальный момент времени, коэффициент kM_∞

соответствует асимптотическим значениям этого отношения ($kM_\infty = 1.33$) Параметр kE

выбирается из условий задачи и в нашем расчете $kE = 10$. Значения для момента $M^{3,1}$

вычислялись из дифференциального уравнения $M^{3,1} = \frac{dM^{4,0}}{dz}$.

Результаты численного решения задачи представлены на рис. 4, 5. На рис. 4 показано изменение величины $M^{2,0}$. В отличие от предыдущего случая видно, что для параметров пучка, близких к стационарным в линейном внешнем поле, нелинейность внешнего поля пучка нарушает постоянство этой величины и приводит к асимптотическому выходу на новое стационарное значение. На рис. 5 показан рост эмиттанса пучка, обусловленный нелинейностью внешнего фокусирующего поля.

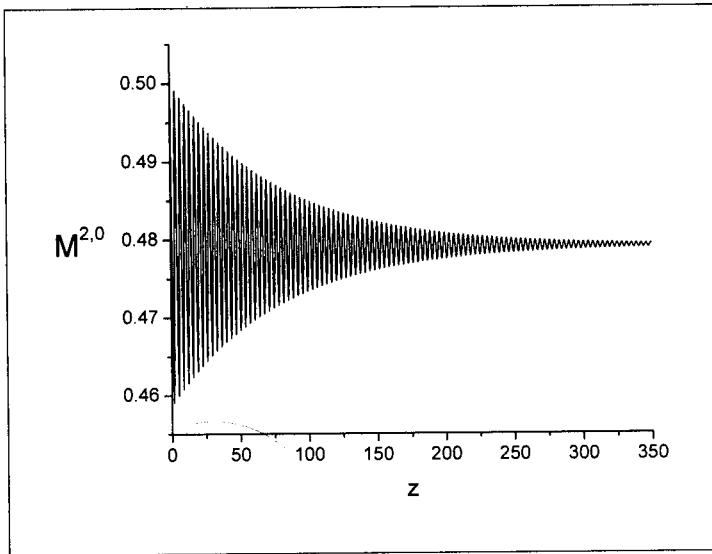


Рис. 4. Изменение среднеквадратичного размера пучка с однородной плотностью в гладком фокусирующем канале с кубической нелинейностью

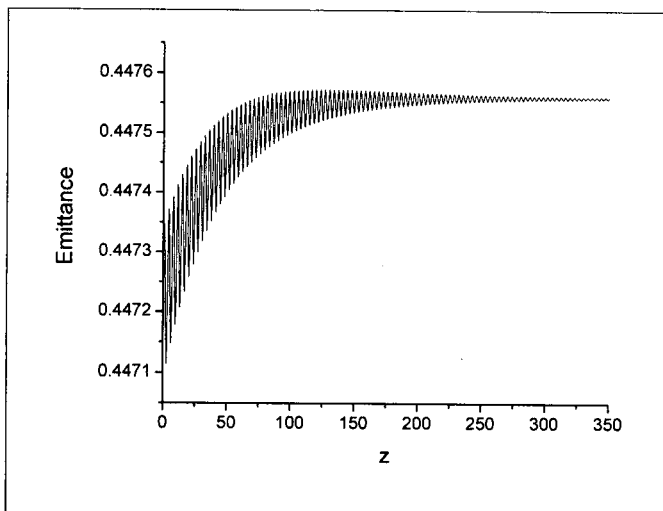


Рис. 5. Изменение эмиттанса пучка с однородной плотностью в гладком фокусирующем канале с кубической нелинейностью

В случае пучка с неоднородной плотностью в развитом выше подходе динамика пучка в нелинейном внешнем поле описывается системой уравнений для плотности

$\rho(r) = \alpha_0 + \alpha_2 r^2$ и радиуса пучка a

$$\alpha_0 \frac{a^2}{2} + \alpha_2 \frac{a^4}{4} = M^{0,0},$$

$$\alpha_0 \frac{a^4}{4} + \alpha_2 \frac{a^6}{6} = M^{2,0},$$

$$\alpha_0 \frac{a^6}{6} + \alpha_2 \frac{a^8}{8} = M^{4,0}$$

и системой уравнений для моментов

$$\frac{dM^{0,0}}{dz} = 0,$$

$$\frac{dM^{2,0}}{dz} = M^{1,1},$$

$$\frac{dM^{1,1}}{dz} = M^{0,2} + \gamma_1 M^{2,0} + \gamma_3 M^{4,0},$$

$$\frac{dM^{0,2}}{dz} = 2(\gamma_1 M^{1,1} + \gamma_3 M^{3,1}).$$

Внешняя нелинейная фокусирующая сила имеет вид $F_{ext} = -r + 0.2r^3$ ($\gamma_1 = -1$, $\gamma_3 = 0.2$).

Начальные условия для моментов соответствуют неоднородной плотности

$\rho(r) = 3.6 \cdot (1 - 0.9r^2)$ внутри круга единичного радиуса и $M_{z=0}^{1,1} = 0$, $M_{z=0}^{0,2} = 0.000028$. Для замыкания цепочки моментов используются те же соотношения, что и в предыдущем примере с однородной плотностью заряда.

Результаты численного решения задачи представлены на рис. 6 — 8.

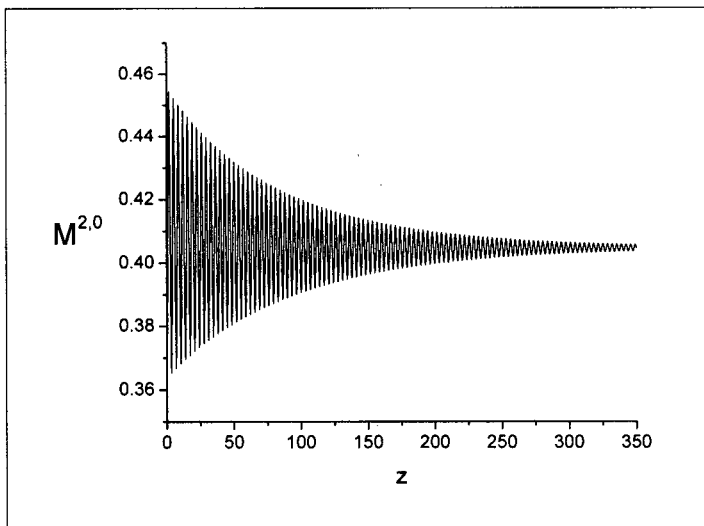


Рис. 6. Изменение среднеквадратичного размера пучка с неоднородной плотностью в гладком фокусирующем канале с кубической нелинейностью

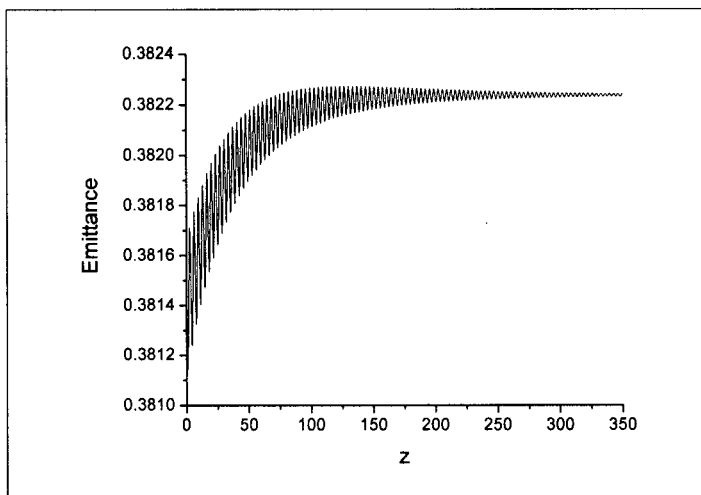


Рис. 7. Изменение эмиттанса пучка с неоднородной плотностью в гладком фокусирующем канале с кубической нелинейностью

На рис. 6 показано изменение величины $M^{2,0}$ вдоль оси пучка. Так же, как и в предыдущем примере, из рисунка видно, что для параметров пучка, близких к стационарным в линейном внешнем поле, нелинейность поля пучка нарушает постоянство этой величины и приводит к асимптотическому выходу на новое стационарное значение. На рис. 7 показан рост эмиттанса пучка, обусловленный нелинейностью внешнего фокусирующего поля.

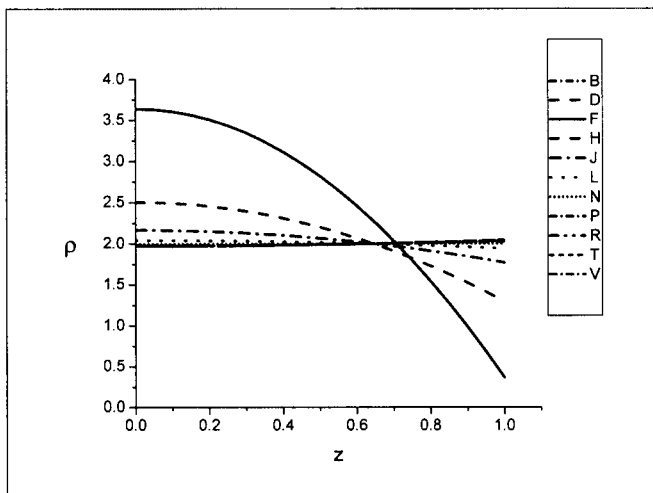


Рис. 8. Изменение плотности заряда для пучка с неоднородной плотностью в гладком фокусирующем канале с кубической нелинейностью

На рис. 8 показано изменение плотности пучка вдоль оси и стремление плотности к предельному профилю. Линия F — плотность распределения заряда при $z = 0$, линия H — при $z = 2.5$, J — $z = 5$, L — $z = 7.5$, B — $z = 10$, N — $z = 12.5$, P — $z = 15$.

ВЫВОДЫ: Из рассмотренных примеров следует, что предлагаемая модель позволяет учесть основные нелинейные эффекты динамики сильноточных пучков — рост эмиттанса, изменение плотности, увеличение плотности к краю сечения пучка. Эти эффекты наблюдаются в реальных и численных экспериментах.

Список литературы

1. *Рошаль А. С.* Моделирование заряженных пучков. М.: Атомиздат, 1979.
2. *Lapostolle P. M.* Possible emittance increase through filamentation due to space charge in continuous beams. // IEEE Trans. Nucl. Sci., 1971, NS-18, 3, p.1101.

3. *Sacherer F. J. RMS envelope equations with space charge. // IEEE Trans. Nucl. Sci., 1971, NS-18, 3, p.1105; CERN/SI/Int., 70-12, 1970.*
4. *Dymnikov A. D., Perelstein E. A. Moment method in dynamics of charged particle beams. // NIM 148, 1978, pp. 567-571.*
5. *Kazarinov N. Yu., Perelshtein E. A., Schevtsov V. F. Moment method in charged particle beam dynamics. // Particle Accelerators, 1980, v.10, p.1.*
6. *Bobyleva L. V., Perelstein E. A. On RMS Envelope Equation Problem for Nonlinear Motion. // EPAC96, 1996, Bristol and Philadelphia, V.2, p.1060-1063.*
7. *Bruhwiller P. L. and Batygin Y. K. Beam Transport for Uniform Irradiation: Nonlinear space charge forces and the effect of boundary conditions. // Proc. of the PAC 95, Dallas, 1995, p. 3254.*
8. *Raiser M. Theory and Design of Charged Particle Beams. Wiley, New York, 1994.*
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974, том 2.*
10. *Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. М.: Наука, 1989.*
11. *Karchinsky I.M., Vladimirsky V.V. // Proc. of the Internat. Conf. on High Energy Accelerat. and Instrum., CERN, Geneva, 1959, p. 274*

Получено 30 июня 2003 г.

Бобылева Л. В., Перельштейн Э. А.
Моделирование динамики пучков методом моментов
с использованием степенных разложений плотности заряда

P5-2003-124

Построена математическая модель пучков заряженных частиц на основе метода моментов функции распределения частиц в классе степенных разложений плотности заряда частиц, включающая нелинейные динамические эффекты, в том числе связанные с нелинейностью собственного поля пучка. Для восстановления плотности заряда используется степенная (полиномиальная) аппроксимация. По найденной плотности заряда находится собственное электрическое поле пучка. Для обрыва бесконечной цепочки уравнений для моментов наивысшие моменты выражаются через моменты низших порядков эвристическим путем с учетом асимптотического поведения моментов, известного из численных экспериментов, аналитической модели нелинейной динамики пучков и экспериментов с сильноточными пучками.

Модель численно реализована для пучков с доминирующим влиянием пространственного заряда и для анализа динамики пучка в гладком фокусирующем канале с нелинейной фокусирующей силой. Показано, что модель учитывает нелинейные эффекты электромагнитных полей.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных реакций им. Г. Н. Флерова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2003

Перевод авторов

Bobyleva L. V., Perelstein E. A.
Beam Dynamics Simulations on the Base of the Method of Moments
with the Polynomial Approximation of a Charge Density

P5-2003-124

The nonlinear beam simulation based on the method of moments of the particle distribution function is studied here. The polynomial approximation of a charge density of a beam with circular cross section has been found by using time varying moments. The proper electric field is deconstructed with the help of the density approximation and is used in the system of moment equations. To rupture the infinite chain of moment equations, the asymptotic behavior of moments known from analytical model, PIC simulations and experimental results was used. In such a way one obtains the approximate solutions of Vlasov self-consistent problem. The new simulation method is demonstrated on the examples of free expansions of beams with nonuniform space charge density and beam propagation through smooth nonlinear focusing channel. Nonlinear effects such as emittance growth, varying density profile, asymptotic behavior of a beam, etc. are under discussion.

The investigation has been performed at the Flerov Laboratory of Nuclear Reactions, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2003

Редактор *Е. В. Калининкова*
Макет *Е. В. Сабатовой*

Подписано в печать 11.07.2003.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,13. Уч.-изд. л. 1,26. Тираж 325 экз. Заказ № 54010.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/