

P2-2003-226

Г. В. Ефимов

О СТАБИЛЬНОСТИ КЭД и КХД

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

1 Введение

В настоящее время общепринято считать, что конфайнмент связан с возникновением кварк-кваркового линейно растущего потенциала или кварк-антикварковой "струны" и может быть объяснен только вне рамок теории возмущений (см., например, последний обзор на эту тему [1]). При этом проблема конфайнмента одного изолированного кварка вообще не ставится и, по всей видимости, не может быть поставлена. Попытки аналитического описания конфайнмента встречаются отрицательное предубежденное отношение, и причина такого отношения, по моему мнению, состоит в том, что до сих пор не найдено простое и удобное аналитическое представление для пропагаторов кварков и глюонов в области конфайнмента, которое сделало бы вычисления с ними не столь громоздкими (см., например, [2]).

Наша базисная точка зрения состоит в том, что все явления адронной физики описываются в рамках квантовой теории поля. Это значит, что имеется КХД-лагранжиан кварков и глюонов, при этом эффективная константа связи должна быть малой и все расчеты можно проводить по теории возмущений, включая образование связанных состояний, которые должны описываться уравнениями типа уравнения Бете-Солпитера. Основной вопрос: какие пропагаторы должны быть использованы для описания кварков и глюонов в области конфайнмента? Ясно, что стандартные пропагаторы Дирака для кварков и Клейна-Гордона для глюонов, соответствующие плоским волнам, не дают правильного описания этих частиц в рассматриваемой области.

Главная проблема аналитического конфайнмента состоит в том, чтобы ответить на два вопроса: какой механизм ведет к возникновению аналитического конфайнмента и какими функциями описывать кварки и глюоны в области конфайнмента? Наша точка зрения состоит в том, что конфайнмент не связан с так называемым переходом к режиму сильной связи в КХД, т.е. конфайнмент не возникает в результате какого-то суммирования диаграмм теории возмущений.

Мы придерживаемся гипотезы, что самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью является хорошим кандидатом на роль вакуумного глюонного поля, поскольку оно удовлетворяет уравнениям Янга-Миллса и ведет к аналитическому конфайнменту, т.е. пропагаторы кварков в этом поле становятся целыми аналитическими функциями гауссовского типа в импульсном пространстве и кварки не могут существовать как обычные частицы.

Следует особо отметить, что гауссовский характер поведения пропагаторов приводит к реджевскому поведению спектра адронов - мезонов и барионов. В частности, было показано [3], что основные черты адронного спектра можно объяснить, предположив, что пропагаторы кварков

и глюонов являются просто гауссовскими экспонентами и адроны возникают как решения уравнения Бете-Солпитера. Была построена модель индуцированных кварковых токов (см. [4, 5]), основанная на предположении, что вакуум КХД реализуется самодуальным глюонным полем с постоянной напряженностью. Проведенные расчеты показали, что модель согласуется с имеющимися экспериментальными данными.

Конечно, как только мы произнесли: *имеется ненулевое глюонное поле, минимизирующее энергию вакуума*, - и даже еще ничего не сказали о его природе и явном виде, сразу возникает очевидная проблема. Любое ненулевое глюонное поле имеет какие-то направления в цветовом и конфигурационном пространствах. Естественно, энергия вакуума вырождена по этим направлениям. Однако возникает вопрос, как эти направления проявятся на физических наблюдаемых? Можно ли их наблюдать экспериментально или существует какой-либо эффективный механизм усреднения по этим направлениям. На эти вопросы еще предстоит ответить в будущем. Эта же проблема существует при введении инстантонов в физические амплитуды. Мне не известны попытки как-то экспериментально зарегистрировать направление инстантона, а вся техника вычислений с инстантонами предполагает усреднение матричных элементов по их направлениям. Именно поэтому идею использовать самодуальное поле многие считают бесперспективной, поскольку при простейшей интерпретации по прямой аналогии с теорией ферромагнетиков при понимании самодуального поля как механизма спонтанного нарушения симметрии в КХД мы получаем вакуум, который нарушает как калибровочную группу $SU_c(3)$, так и группу Лоренца, что, безусловно, противоречит всем современным представлениям. Однако в качестве паллиатива в теории S -матрицы эту проблему можно решить, вводя анзац, состоящий в требовании усреднения по направлениям вакуумного поля бесцветных кварковых петель, соединяющих бесцветные адронные состояния. В результате как калибровочная группа $SU_c(3)$, так и группа Лоренца восстанавливаются, а S -матрица унитарна на адронных состояниях (см. [6, 7]).

Основным аргументом в пользу серьезного отношения к самодуальным полям с постоянной напряженностью является тот факт, что эти поля, будучи точным решением уравнений Янга-Миллса, приводят к минимуму энергии глюонного вакуума при ненулевой напряженности поля [8, 9]. Однако самодуальное поле и в КЭД является решением уравнений Максвелла. Поэтому небезынтересно сравнить роль самодуального поля в КЭД и КХД, понять, в чем состоит принципиальная разница мира КЭД и мира КХД с точки зрения влияния самодуальных полей на стабильность систем частиц в этих двух мирах.

При теоретическом подходе к изучению поставленной задачи возни-

кают два основных вопроса:

1. какую систему частиц рассматривать и как вводить поле, которое реализует вакуум, в лагранжиан системы полей,
2. каким математическим аппаратом пользоваться при вычислении энергии вакуума.

В основных работах ([8, 9]), посвященных вычислению энергии вакуума в самодуальном поле, рассматривалась система, состоящая только из глюонов. Нам такой подход представляется недостаточным, поскольку кварки и глюоны составляют единую систему и находятся в едином вакууме. Поэтому в КХД физическая система состоит из кварков и глюонов, а в КЭД из всех заряженных частиц (фермионов и бозонов) плюс электромагнитное поле.

Обычно вакуумное поле рассматривается как внешнее поле, на практике это означает, что в полном лагранжиане производится замена $A \rightarrow A + B$, где B - внешнее, а A - квантованное поле, затем рассматривается получившийся лагранжиан, в который внешнее поле входит в комбинации ϵB . Мы же стоим на точке зрения, что если поле B реализует вакуум КЭД или КХД, то оно как бы внутренне присуще рассматриваемой системе частиц, т.е. оно не является внешним полем в обычном понимании и изначально должно быть введено в лагранжиан системы полей. При этом вакуумное поле непосредственно не связано с зарядом и величина напряженности вакуумного поля должна определяться минимумом энергии системы частиц, находящихся в этом вакууме. При этом это поле может быть отличным от нуля даже при равенстве нулю заряда $\epsilon = 0$ или константы связи $g = 0$, которые определяют силу взаимодействия частиц с фотонами или глюонами.

Теперь о способе вычислений. Мы считаем, что гамильтонов подход при вычислениях энергии вакуума не является наилучшим, поскольку, во-первых, гамильтониан в КТП не является хорошо определенным оператором (см., например, [10]), и, во-вторых, не ясно, а имеем ли мы гамильтонову систему при включении самодуального поля, поскольку лагранжиан оказывается явно зависящим от времени, а все вычисления проводятся в евклидовой метрике. Максимум, чего с математической точки зрения удалось достичь в КТП, это построить теорию S -матрицы или производящего функционала Z , т.е. сформулировать правила построения унитарного оператора на пространстве Фока или функций Грина, исходя из заданного лагранжиана системы полей. При этом регуляризация и способ вычислений плюс перенормировочная процедура с правилом построения необходимых контрчленов играют определяющую роль. Последнее обстоятельство еще раз говорит о том, что к гамильтонову методу в КТП надо относиться с большой осторожностью. Поэтому основным объектом наших вычислений будет производящий функционал.

Результаты, полученные в данной работе, можно сформулировать следующим образом. Как в КЭД, так и в КХД для глобальной стабильности (с ростом напряженности вакуумного поля энергия вакуума асимптотически стремится к плюс бесконечности) необходимо, чтобы в системе физических частиц фермионов было больше, чем бозонов, поскольку фермионы ведут к стабильности, а бозоны к нестабильности системы в самодуальном поле с постоянной напряженностью.

В квантовой электродинамике система заряженных фермионов и бозонов стабильна, т.е. минимум энергии вакуума реализуется при нулевом электромагнитном самодуальном поле с постоянной напряженностью, если, во-первых, число бозонов меньше удвоенного числа фермионов и, во-вторых, наилегчайшими частицами в системе являются фермионы. Именно эту ситуацию мы наблюдаем в Природе: практически все стабильные частицы (электрон и протон) являются фермионами, фермионов явно больше, чем бозонов, и легчайшей заряженной частицей является электрон, масса которого существенно меньше масс остальных заряженных частиц. Таким образом, ненулевое самодуальное поле с постоянной напряженностью не может реализовать электромагнитный вакуум в имеющейся в Природе системе заряженных фермионов и бозонов.

Если же мы предположим, что существует гипотетический мир КЭД, состоящий из фермионов и бозонов, причем число заряженных фермионов больше числа заряженных бозонов, но массы бозонов меньше массы фермионов, тогда такой мир глобально стабилен, но вакуум КЭД в этом гипотетическом мире реализуется при ненулевом самодуальном поле. Наличие ненулевого поля ведет к возникновению конфайнмента заряженных фермионов и бозонов, и вместо заряженных частиц возникают нейтральные связанные состояния. Этот пример качественно правильно передает ситуацию в КХД, где роль заряженного бозона с малой массой играют самодействующие безмассовые глюоны.

В квантовой хромодинамике в глюонном самодуальном поле с постоянной напряженностью кварк-глюонная система глобально стабильна, если число независимых кварков, т.е. кварков с различными ароматами, равно или больше двух. Напрашивается вывод, что именно это обстоятельство объясняет выделенность изотопической группы $SU_f(2)$ и практическое равенство масс u - и d -кварков. Существование безмассового самодействующего бозона - глюона приводит к тому, что возможен минимум энергии вакуума при конечной напряженности Λ глюонного самодуального поля, величина которой определяется соотношением между хромодинамической шкалой Λ_{QCD} и массами кварков M_f . Наличие ненулевого вакуумного самодуального поля ведет к аналитическому конфайнменту кварков и глюонов и возникновению стабильных состояний - адронов. Параметр Λ определяет масштаб области конфайнмента и

напрямую связан с наклоном реджевских траекторий в спектре адронов.

Сформулируем главный вывод данной работы:

Причина конфайнмента - неустойчивость бозонов в самодуальном вакуумном поле. Для глобальной устойчивости системы, состоящей из фермионов и бозонов, необходимо, чтобы фермионов было "достаточно" много. Конфайнмент не возникает в случае, когда наименьшую массу в системе частиц имеет фермион (электрон в КЭД), и возникает, когда наименьшую массу имеет бозон (глюон в КХД).

Работа поддержана грантом РФФИ 01-02-17200.

2 Квантовая электродинамика - КЭД

Рассмотрим электромагнитные взаимодействия системы заряженных фермионов $\{\psi_F\}$ и бозонов $\{\phi_B\}$ с ненулевыми массами и одинаковым зарядом e . Наша конечная цель состоит в том, чтобы понять, что происходит в хромодинамике кварков и глюонов, поэтому фермионы и бозоны будем рассматривать как систему частиц с одинаковым зарядом.

Все вычисления будем проводить в евклидовой метрике. Система описывается стандартным лагранжианом (см., например, [11]):

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(x) + \sum_F \mathcal{L}_F(A|x) + \sum_B \mathcal{L}_B(A|x), \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F(A|x) &= (\bar{\psi}_F(x)[\gamma_\mu(\partial_\mu + ieA_\mu(x)) - M_F]\psi_F(x)), \\ \mathcal{L}_B(A|x) &= -((\partial_\mu + ieA_\mu(x))\phi_B(x))^* (\partial_\mu + ieA_\mu(x))\phi_B(x) \\ &\quad - m_B^2\phi_B^*(x)\phi_B(x) \end{aligned}$$

Напряженность электромагнитного поля определяется обычным образом:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x).$$

Калибровочная группа $U(1)$ определяется преобразованиями

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu f(x), \\ \psi(x) &\rightarrow e^{ief(x)}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-ief(x)}, \\ \phi(x) &\rightarrow e^{ief(x)}\phi(x), \quad \phi^*(x) \rightarrow \phi^*(x)e^{-ief(x)}. \end{aligned} \quad (2)$$

2.1 Самодуальное электромагнитное поле с постоянной напряженностью

Одним из решений уравнения Максвелла в пустоте

$$\partial_\mu F_{\mu\nu}(x) = 0$$

является самодуальное поле с постоянной напряженностью

$$B_\mu(x) = \Lambda^2 b_{\mu\nu} x_\nu, \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) = -2\Lambda^2 b_{\mu\nu}, \quad (3)$$

где Λ характеризует напряженность самодуального поля и

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}, \quad b_{\mu\rho} b_{\rho\nu} = -\delta_{\mu\nu}, \quad \tilde{b}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} b_{\alpha\beta} = \pm b_{\mu\nu}.$$

Само- или антисамодуальный тензор $b_{\mu\nu}$ характеризуется некоторым направлением $\mathbf{n}_j = b_{j0}$ в конфигурационном трехмерном пространстве.

2.2 Лагранжиан КЭД в самодуальном поле с постоянной напряженностью

Предположим, что рассматриваемая система заряженных фермионов и бозонов находится в самодуальном поле $B_\mu(x)$ (3), которое реализует электромагнитный вакуум.

Возникает вопрос, как записать лагранжиан заряженных частиц в этом вакуумном поле. Стандартная общепринятая процедура состоит в следующем. Поле $B_\mu(x)$ рассматривается как внешнее. Это означает, что надо произвести замену

$$A_\mu(x) \Rightarrow A_\mu(x) + B_\mu(x), \quad (4)$$

в результате лагранжиан (1) принимает вид

$$\mathcal{L}(x) = -4\Lambda^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2(x) + \mathcal{L}_F(B + A|x) + \mathcal{L}_B(B + A|x). \quad (5)$$

Таким образом, внешнее поле входит в лагранжиан в комбинации eB_μ и при вычислениях по теории возмущений мы с необходимостью должны раскладывать по заряду e . Кроме того, постоянному слагаемому $4\Lambda^4$ в (5) придается физический смысл плотности энергии внешнего поля.

Мы считаем, что такая процедура может быть справедливой только для внешнего поля, создаваемого какими-то реально существующими внешними источниками. Если же поле реализует вакуум КЭД, то оно как бы внутренне присуще КЭД, т.е. оно не является внешним полем в обычном понимании. При этом вакуумное поле не связано с зарядом e и

энергия вакуума без частиц равна нулю, т.е. не зависит от напряженности Λ . Величина параметра Λ должна определяться минимумом энергии системы частиц, находящихся в этом вакууме, а заряд e определяет силу взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем фотонов. Таким образом, лагранжиан системы заряженных частиц должен получаться не как результат замены (4), а просто постулироваться в форме

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2(x) + \mathcal{L}_F(B, A|x) + \mathcal{L}_B(B, A|x). \quad (6)$$

Здесь лагранжиан для некоторого фермиона с массой M записывается

$$\mathcal{L}_F(A, B|x) = \mathcal{L}_{F0}(B|x) + \mathcal{L}_{FI}(A|x), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{F0}(B|x) &= (\bar{\psi}(x)[\hat{\nabla}(x) - M]\psi(x)), & \hat{\nabla}(x) &= \gamma_\mu \nabla_\mu(x), \\ \mathcal{L}_{FI}(A|x) &= e(\bar{\psi}(x)i\hat{A}(x)\psi(x)). \end{aligned}$$

Ковариантная производная имеет вид

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(x) &= \partial_\mu + iB_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda^2 b_{\mu\nu}x_\nu, \\ [\nabla_\mu(x), \nabla_\nu(x)] &= -2i\Lambda^2 b_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (8)$$

Лагранжиан для некоторого бозона с массой m записывается

$$\mathcal{L}_B(A, B|x) = \mathcal{L}_{B0}(B|x) + \mathcal{L}_{BI}(A|x), \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{B0}(B|x) &= -\phi^*(x) [-\nabla^2(x) + m^2] \phi(x), \\ \mathcal{L}_{BI}(A|x) &= -ie [(\nabla_\mu(x)\phi(x))^* \phi(x) - \phi^*(x)\nabla_\mu(x)\phi(x)] A_\mu(x), \\ &\quad - \epsilon^2 \phi^*(x)\phi(x)A_\mu(x)A_\mu(x). \end{aligned}$$

При этом калибровочная группа $U(1)$ в (2) дополняется преобразованием

$$B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x),$$

т.е. поле $B_\mu(x)$ не меняется при калибровочных преобразованиях.

В результате мы имеем два независимых параметра Λ и e . Поскольку в лагранжианах (7) и (9) полностью "расщеплена" зависимость от этих независимых параметров. Любой матричный элемент может быть представлен рядом

$$A(e, \Lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} e^n A_n(\Lambda).$$

Другими словами, если считать константу взаимодействия e достаточно малой, все вычисления можно проводить по теории возмущений, в то время как напряженность поля Λ может принимать произвольные значения, при этом функции $A_n(\Lambda)$ могут быть точно вычислены. Таким образом, зависимость матричных элементов от напряженности поля Λ можно изучать в каждом порядке теории возмущений по e .

Другое существенное замечание состоит в том, что самодуальное поле $B_\mu(x)$ не привносит никаких новых ультрафиолетовых расходимостей в теорию, поэтому появление ультрафиолетовых расходимостей связано только с разложением по заряду e и имеет ту же структуру всех перенормировочных членов, что и при стандартном варианте перенормировки в квантовой электродинамике. Кроме того, пропагаторы фермионов и бозонов в самодуальном поле $B_\mu(x)$ могут быть вычислены в явной форме. Таким образом, стандартные методы построения перенормированной S -матрицы в квантовой электродинамике полностью переносятся на данный случай.

Таким образом, лагранжиан (6) описывает взаимодействие заряженных фермионов и бозонов, находящихся в вакуумном поле $B_\mu(x)$. Естественно возникает вопрос, какова напряженность этого поля Λ ? Поскольку мы предполагаем константу электромагнитного взаимодействия $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ малой, напряженность Λ должна быть выбрана из условия минимума энергии основного состояния - вакуума. Поэтому объектом нашего исследования будет производящий функционал

$$\mathcal{Z}_V = \iint d\sigma_F d\sigma_B \int DA e^{\int_V dx \mathcal{L}(x)} \quad (10)$$

$$= \iint d\sigma_F d\sigma_B \int DA e^{-\frac{1}{4} \int_V dx F_{\mu\nu}^2(x) + \int_V dx \mathcal{L}_F(x) + \int_V dx \mathcal{L}_B(x)}$$

$$d\sigma_F = \prod_F \frac{D\psi_F D\bar{\psi}_F}{N_F}, \quad d\sigma_B = \prod_B \frac{D\phi_B D\phi_B^*}{N_B}. \quad (11)$$

Нормировка функционального интеграла здесь выбрана таким образом, что при $\Lambda = 0$ и $e = 0$ производящий функционал равен единице $Z = 1$.

Целью нашего исследования является энергия вакуума в самодуальном поле $B_\mu(x)$:

$$E(\Lambda) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z}_V. \quad (12)$$

Функциональный интеграл в (10) в низшем приближении теории возмущений при $e = 0$ вычисляется в явном виде:

$$\mathcal{Z}_V^{(0)} = \int d\sigma_F e^{\sum_F (\bar{\psi}_F (-\hat{\nabla} + M_F) \psi_F)} \int d\sigma_B e^{-\sum_B (\phi_B^* (-\nabla^2 + m_B^2) \phi)}$$

$$= \prod_F \text{Det} \left[\frac{-\hat{\nabla}(x) + M_F}{-\hat{\partial} + M_F} \right] \cdot \prod_B \text{Det} \left[\frac{-\square + m_B^2}{-\nabla^2 + m_B^2} \right] \quad (13)$$

и соответственно для энергии вакуума имеем

$$E_0(\Lambda) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z}_V^{(0)} = E_F(\Lambda) + E_B(\Lambda). \quad (14)$$

Представление (13) ясно показывает, что поведение $E_F(\Lambda)$ и $E_B(\Lambda)$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ с необходимостью должно быть противоположного знака, т.е. если одна функция растет, то другая убывает.

Вклад в энергию вакуума заряженного фермиона массы M (см. Приложение А) равен

$$\begin{aligned} E_F(\Lambda) &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_F \text{Tr} \ln \left[\frac{-\hat{\nabla}(x) + M}{-\hat{\partial} + M} \right] \\ &= 4\Lambda^4 \left\{ \frac{2}{(4\pi)^2} W(X_M) + \frac{4}{3} Z(M) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $X_M = \frac{2\Lambda^2}{M^2}$. Функция $W(X)$ определена формулой (46) Приложения А. Это монотонно возрастающая положительная функция и ее асимптотическое поведение при малых и больших X записывается

$$W(X) = \begin{cases} \frac{1}{15} X^2 + O(X^4), & \text{для } X \rightarrow 0, \\ \frac{1}{3} \ln X + O(1), & \text{для } X \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (16)$$

Бесконечная константа определена как

$$Z(M) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s}.$$

Вклад в энергию вакуума заряженного бозона массы m (см. Приложение А) равен

$$\begin{aligned} E_B(\Lambda) &= + \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_B \text{Tr} \ln \left[\frac{-\nabla^2(x) + m^2}{-\square + m^2} \right] \\ &= 4\Lambda^4 \left\{ -\frac{1}{(4\pi)^2} W(X_m) + \frac{1}{3} Z(m) \right\}, \end{aligned} \quad (17)$$

где $X_m = \frac{2\Lambda^2}{m^2}$ и функция $W(X_m)$ дается формулой (46) Приложения А.

2.3 Энергия вакуума в КЭД

Подставив формулы для $E_F(\Lambda, M)$ и $E_B(\Lambda, m)$ в (36), получим

$$E_0(\Lambda) = 4\Lambda^4 Z + E_{vac}(\Lambda).$$

Перенормировка энергии вакуума определяется естественным условием

$$\left. \frac{E_{vac}(\Lambda)}{\Lambda^4} \right|_{\Lambda=0} = 0.$$

Таким образом бесконечная константа

$$Z = \frac{4}{3} \sum_F Z(M_F) + \frac{1}{3} \sum_B Z(m_B)$$

может быть отброшена и окончательно энергия вакуума системы заряженных фермионов и бозонов в КЭД имеет вид

$$E_{vac}(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[\sum_F 2W\left(\frac{2\Lambda^2}{M_F^2}\right) - \sum_B W\left(\frac{2\Lambda^2}{m_B^2}\right) \right]. \quad (18)$$

Асимптотическое поведение энергии вакуума $E_{vac}(\Lambda)$ при малых и больших Λ задается формулами

$$E_{vac}(\Lambda) = \begin{cases} \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{15} \left[\sum_F 2 \left(\frac{2\Lambda^2}{M_F^2} \right)^2 - \sum_B \left(\frac{2\Lambda^2}{m_B^2} \right)^2 \right] & \text{при } \Lambda \rightarrow 0; \\ \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left[\sum_F 2 \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{M_F^2} \right) - \sum_B \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{m_B^2} \right) \right] & \text{при } \Lambda \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (19)$$

На основании полученных формул для энергии вакуума (18) и (19) можно заключить: в электромагнитном самодуальном поле с постоянной напряженностью

- система, состоящая только из заряженных фермионов, глобально стабильна;
- система, состоящая только из заряженных бозонов, глобально нестабильна;
- система заряженных фермионов и бозонов стабильна, если выполнены условия:

1. число бозонов меньше удвоенного числа фермионов

$$2N_F > N_B, \quad (20)$$

2. наименее легчайшими частицами являются фермионы, так как должно выполняться

$$\sum_F \frac{2}{M_F^2} > \sum_B \frac{1}{m_B^2}, \quad (21)$$

в этом случае минимум энергии вакуума реализуется при

$$\Lambda = 0. \quad (22)$$

Именно эту ситуацию мы наблюдаем в Природе: практически все стабильные частицы являются фермионами (электроны и протоны), фермионов явно больше, чем бозонов, и легчайшей заряженной частицей является электрон, масса которого существенно меньше остальных заряженных частиц. Таким образом, ненулевое самодуальное поле с постоянной напряженностью не может реализовать электромагнитный вакуум в системе заряженных фермионов и бозонов, имеющих в Природе.

2.4 Гипотетический мир КЭД

Для того чтобы лучше понять условие стабильности, рассмотрим гипотетический мир, состоящий из двух сортов заряженных частиц: фермионов с массой M и бозонов с массой m , причем масса бозона меньше массы фермиона. Тогда энергия вакуума в самодуальном поле с постоянной напряженностью (18) запишется

$$E_{vac}(\Lambda) \approx \frac{4\Lambda^4}{6(4\pi)^2} \left[2 \ln \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{2\Lambda^2}{M_F^2} \right) - \ln \left(1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{2\Lambda^2}{m_B^2} \right) \right], \quad (23)$$

где мы для простоты использовали приближенное выражение (47) для функции $W(X)$.

Наш гипотетический мир глобально стабилен, поскольку энергия вакуума

$$E_{vac}(\Lambda) \rightarrow \frac{4\Lambda^4 \ln \Lambda^2}{6(4\pi)^2} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \Lambda \rightarrow \infty.$$

Однако если масса бозона мала $m_B^2 < \frac{1}{2} M_F^2$, тогда функция $E_{vac}(\Lambda)$ имеет отрицательный минимум при конечных $\Lambda > 0$. Таким образом, вакуум КЭД в нашем гипотетическом мире реализуется при ненулевом самодуальном поле. На рис. 1 показано поведение функции $E_{vac}(\Lambda)$ при различных соотношениях M_F и m_B . Наличие ненулевого поля $B_\mu(x)$ ведет к возникновению конфайнмента заряженных фермионов и бозонов, поскольку их пропагаторы становятся целыми аналитическими функциями в импульсном пространстве. Вместо заряженных частиц возникают

нейтральные связанные состояния, массы которых можно вычислить, используя соответствующие уравнения Бете-Солпитера.

Этот пример качественно правильно передает ситуацию в КХД, где роль заряженного бозона с малой массой играют самодействующие безмассовые глюоны.

3 Квантовая хромодинамика

3.1 Лагранжиан

Квантовая хромодинамика описывает кварки и глюоны, динамическое взаимодействие которых определяется лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \check{G}_{\mu\nu}(x) \check{G}_{\mu\nu}(x) + \sum_f (\bar{q}_f(x) [\gamma_\mu (\partial_\mu - ig \check{A}_\mu(x)) - M_f] q_f(x)). \quad (24)$$

Кварковое поле имеет следующие степени свободы

$$q_f(x) = q_{\alpha f}^a(x) = q_{\text{spin flavour}}^{\text{color}}(x).$$

Глюоны описываются полями

$$\begin{aligned} \check{G}_{\mu\nu}(x) &= \check{F}_{\mu\nu}(x) - ig [\check{A}_\mu(x), \check{A}_\nu(x)], \\ \check{F}_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu \check{A}_\nu(x) - \partial_\nu \check{A}_\mu(x), \quad \check{A}_\mu(x) = A_\mu^a(x) t^a, \end{aligned}$$

где $t^a = \frac{1}{2} \lambda^a$ - матрицы цветовой группы $SU_c(3)$.

Лагранжиан (24) инвариантен относительно калибровочных преобразований цветовой группы $SU_c(3)$

$$\begin{aligned} q_f(x) &\rightarrow U(x) q_f(x), \quad \bar{q}_f(x) \rightarrow \bar{q}_f(x) U^\dagger(x), \\ \check{A}_\mu(x) &\rightarrow U(x) \check{A}_\mu(x) U^\dagger(x) - \frac{i}{g} U_\mu(x) U^\dagger(x), \quad U_\mu(x) = \partial_\mu U(x), \\ \check{G}_{\mu\nu}(x) &\rightarrow U(x) \check{G}_{\mu\nu}(x) U^\dagger(x). \end{aligned}$$

3.2 Самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью

Рассмотрим самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью:

$$\begin{aligned} \check{B}_\mu(x) &= B_\mu^a(x) t^a, \quad B_\mu^a(x) = \Lambda^2 n^a b_{\mu\nu} x_\nu, \\ B_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu^a(x) - \partial_\nu B_\mu^a(x) = -2\Lambda^2 n^a b_{\mu\nu}, \\ [\check{B}_\mu(x), \check{B}_\nu(x)] &= 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$b_{\mu\nu} = -b_{\nu\mu}, \quad b_{\mu\rho}b_{\rho\nu} = -\delta_{\mu\nu}, \quad \check{b}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\mu\alpha\beta}b_{\alpha\beta} = \pm b_{\mu\nu}.$$

Само- или антисамодуальный тензор $b_{\mu\nu}$ характеризуется некоторым направлением $\mathbf{n}_j = b_{j0}$ в конфигурационном трехмерном пространстве. Постоянный вектор n^a характеризуется двумя инвариантными параметрами $(n^a n^a) = 1$ и $(n^a n^b n^c d^{abc})$ и определяет некоторое направление в цветовом пространстве $SU_c(3)$ (см. Приложение Б). Параметр Λ характеризует напряженность самодуального поля.

Поле $\check{B}_\mu(x)$ является решением уравнений Янга-Миллса в пустоте

$$\nabla_\mu \check{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \check{F}_{\mu\nu} - ig[\check{A}_\mu(x), \check{G}_{\mu\nu}(x)] = 0. \quad (26)$$

Как и в случае хромодинамики, мы предполагаем, что рассматриваемая система кварков и глюонов находится в самодуальном поле $\check{B}_\mu(x)$, которое реализует хромодинамический вакуум.

Лагранжиан кварк-глюонной системы (24) в вакуумном самодуальном поле запишется

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_g(x) + \mathcal{L}_q(x). \quad (27)$$

Кварковая часть лагранжиана КХД имеет вид

$$\mathcal{L}_q(x) = \sum_f \mathcal{L}_f(x),$$

где лагранжиан для кварка с массой M записывается

$$\mathcal{L}_f(x) = \mathcal{L}_{f0}(x) + \mathcal{L}_{fI}(x), \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{f0}(x) &= (\bar{q}_f(x)[\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) - M_f]q_f(x)), \\ \mathcal{L}_{fI}(x) &= g(\bar{q}_f(x)i\gamma_\mu t^a q_f(x))A_\mu^a(x). \end{aligned}$$

Ковариантная производная имеет вид

$$\begin{aligned} \check{\nabla}_\mu(x) &= \partial_\mu + i\check{B}_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu} x_\nu, \\ [\check{\nabla}_\mu(x), \check{\nabla}_\nu(x)] &= -2i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu}, \quad \check{n} = n^a t^a. \end{aligned} \quad (29)$$

Глюонная часть лагранжиана после некоторых преобразований, связанных с выделением квадратичной по полю глюона части лагранжиана, приобретает вид

$$\mathcal{L}_g(x) = \mathcal{L}_{g0}(x) + \mathcal{L}_{gI}(x), \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{g0}(x) &= -\frac{1}{2}\text{Tr} \left[\check{F}_{\mu\nu}(x)\check{F}_{\mu\nu}(x) + 2\check{B}_{\mu\nu}\check{A}_\mu(x)\check{A}_\nu(x) \right] \\ &= -\frac{1}{2}(A_\mu(x)[- \check{\nabla}^2(x)\delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda^2\check{n}b_{\mu\nu}]A_\nu(x))\end{aligned}$$

с учетом калибровки

$$(\check{\nabla}_\mu A(x)_\mu(x)) = 0, \quad \text{или} \quad (\check{\nabla}_\mu)^{ab}(x)A_\mu^b(x) = 0.$$

Ковариантные производные в присоединенном представлении определены как

$$\nabla_\mu^{ab}(x) = \delta^{ab}\partial_\mu + f^{acb}B_\mu^c(x) = \delta^{ab}\partial_\mu + \Lambda^2 f^{acb}n^c b_{\mu\nu}x_\nu,$$

или

$$\check{\nabla}_\mu(x) = \partial_\mu \check{I} + i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu} x_\nu, \quad \check{n}^{ab} = -if^{acb}n^c, \quad \check{n}^+ = \check{n}.$$

Эрмитова матрица \check{n} взята в присоединенном представлении цветовой группы $SU_c(3)$. Ковариантные производные удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\check{\nabla}_\mu, \check{\nabla}_\nu] = \check{B}_{\mu\nu} = -2i\Lambda^2 \check{n} b_{\mu\nu}.$$

Самодействие глюонов описывается лагранжианом

$$\mathcal{L}_{gI} = -\frac{g}{2}f^{abc}F_{\mu\nu}^a A_\mu^b A_\nu^c - \frac{g^2}{4} \left[(A_\mu^a A_\mu^a)(A_\nu^b A_\nu^b) - (A_\mu^a A_\nu^a)(A_\mu^b A_\nu^b) \right].$$

В случае хромодинамики остаются справедливыми замечания, сделанные для электродинамики. Повторим их. Во-первых, самодуальное поле $\check{B}_\mu(x)$ не привносит никаких новых ультрафиолетовых расходимостей в теорию, поэтому появление ультрафиолетовых расходимостей связано только с разложением по заряду g и имеет ту же структуру всех перенормировочных членов, что и при стандартном варианте перенормировки в квантовой хромодинамике. Кроме того, пропагаторы кварков и глюонов в самодуальном поле $\check{B}_\mu(x)$ могут быть вычислены в явной форме. Таким образом, стандартные методы построения перенормированной S -матрицы в квантовой хромодинамике полностью переносятся на данный случай.

Во-вторых, в лагранжиане (27) полностью "расщеплена" зависимость от независимых параметров g и Λ в любых матричных элементах, т.е. для любого матричного элемента мы получаем выражения вида

$$A(g, \Lambda) = \sum_{n=n_0}^{\infty} g^n A_n(\Lambda).$$

Другими словами, если считать константу взаимодействия g достаточно малой, все вычисления можно проводить по теории возмущений, в то время как напряженность поля Λ может принимать произвольные значения, при этом функции $A_n(\Lambda)$ могут быть точно вычислены. Таким образом, зависимость матричных элементов от напряженности поля Λ можно изучать в каждом порядке теории возмущений по g .

Перед тем как перейти к вычислениям, нам представляется интересным сделать качественное предсказание поведения энергии вакуума в самодуальном поле с постоянной напряженностью в хромодинамике, исходя из полученного результата в квантовой электродинамике. Итак, что мы можем извлечь из формул (18) и (19)? Во-первых, вклад кварков в энергию вакуума качественно совпадает с вкладом электронов в КЭД, т.е. кварки обеспечивают стабильность квантовой системы. В КХД "бозонов" нет, их роль играют глюоны благодаря их самодействию, чего не было у фотонов в КЭД. Поскольку глюоны являются бозонами, качественное поведение глюонного вклада в энергию вакуума описывается формулами, близкими к бозонному вкладу в КЭД с учетом нулевой массы глюонов. Эта зависимость от Λ должна быть вида $\sim -\Lambda^4 \ln \Lambda^2$, другими словами, глюоны ведут к нестабильности вакуума КХД. Следует обратить особое внимание на знак минус этого вклада, в противоположность имеющимся в литературе формулам (см. [9]). Поскольку поведение при больших Λ и у кваркового и у глюонного вкладов в вакуумную энергию функционально одинаково $\sim \Lambda^4 \ln \Lambda^2$, то различных типов кварков должно быть "достаточно много", чтобы обеспечить глобальную стабильность кварк-глюонной системы. Ниже мы вычислим, сколько кварков с необходимостью должно быть.

Итак, в КХД в отличие от КЭД глюон играет роль легчайшего бозона (см. (19)). При малых Λ имеется как положительный вклад от кварков, так и отрицательный вклад от глюонов. Только аккуратное вычисление должно показать, реализуется или нет минимум энергии вакуума при ненулевых Λ . Если вакуум имеет минимум при $\Lambda = 0$, т.е. самодуальное поле отсутствует, то это означает, что кварки и глюоны существуют как обычные частицы и описываются свободными уравнениями. Если же вакуум имеет минимум при ненулевых Λ , то это означает, что самодуальное глюонное поле с постоянной напряженностью реализует вакуум кварк-глюонной системы, кварки и глюоны находятся в этом поле и возникает конфайнмент кварков, т.е. реализуется так называемый *аналитический конфайнмент*. К анализу этой ситуации мы сейчас и перейдем.

Объектом нашего исследования будет производящий функционал

$$Z_V = \int d\sigma_q \int d\sigma_A e^{\int dx \mathcal{L}(x)} \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
&= \int d\sigma_q \int d\sigma_A e^{-\frac{1}{V} \int dx \text{Tr} \mathcal{G}_{\mu\nu}^2(x) + \int_V dx \mathcal{L}_q(x)}, \\
& d\sigma_q = \prod_f \frac{D\psi_f D\bar{\psi}_f}{N_f}, \quad d\sigma_A = \frac{1}{N_A} DA \delta(\nabla A) \Delta(A).
\end{aligned}$$

Нормировка функционального интеграла выбрана таким образом, что при $\Lambda = 0$ и $g = 0$ производящий функционал равен единице $Z = 1$.

Целью нашего исследования является энергия вакуума в самодуальном поле $\check{B}_\mu(x)$:

$$E(\Lambda) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z}_V. \quad (32)$$

Мы будем вычислять энергию вакуума в низшем порядке теории возмущений $g = 0$. В этом приближении имеем для производящего функционала

$$\mathcal{Z}_V^{(0)} = \mathcal{Z}_{V_q}^{(0)} \cdot \mathcal{Z}_{V_g}^{(0)}. \quad (33)$$

Функциональные интегралы могут быть вычислены (см. Приложения Д и Е)

$$\mathcal{Z}_{V_q}^{(0)} = \int d\sigma_q e^{\int_V dx \mathcal{L}_q(x)} = \prod_f \text{Det} \left[\frac{\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) - M_f}{\gamma_\mu \partial_\mu - M_f} \right] \quad (34)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{V_g}^{(0)} &= \frac{1}{N_A} \int DA \delta(\nabla A) \Delta(A) e^{-\frac{1}{V} \int_V dx (A_\mu [-\check{\nabla}^2 \delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda^2 \check{n}b_{\mu\nu}] A_\nu)} \\
&= \text{Det} \left[\frac{-\square}{-\nabla^2 + 4\Lambda_g^2} \right] \cdot \text{Det} \left[\frac{-\square}{-\nabla^2 - 4\Lambda_g^2} \right].
\end{aligned} \quad (35)$$

Соответственно для энергии вакуума имеем

$$E_0(\Lambda) = E_q(\Lambda) + E_g(\Lambda). \quad (36)$$

Сделаем качественную оценку поведения при больших Λ кваркового и глюонного вкладов в вакуумную энергию. Во-первых, из формул (15) и (58) следует, что поведение при больших Λ и u кваркового и глюонного вкладов в вакуумную энергию должно быть функционально одинаково $\sim \Lambda^4 \ln \Lambda^2$. Во-вторых, сравнение формул для глюонного вклада (62) в КХД и бозонного вклада (17) в КЭД показывает, что их поведение при больших Λ также должно быть функционально одинаково $\sim \Lambda^4 \ln \Lambda^2$, но противоположного знака по сравнению с кварковым и фермионным вкладами.

Кварковый вклад в энергию вакуума равен (см. Приложение Д)

$$\begin{aligned}
 E_q(\Lambda) &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \sum_f \text{Tr} \ln \left[\frac{\gamma_\mu \overset{\vee}{\nabla}_\mu(x) - M_f}{\gamma_\mu \partial_\mu - M_f} \right] \\
 &= 4\Lambda^4 \left\{ \frac{1}{(4\pi)^2} W_q(X) + \frac{2}{3} Z(M) \right\}, \tag{37}
 \end{aligned}$$

где $X = \frac{2\Lambda^2}{M^2}$ и

$$\begin{aligned}
 W_q(X) &= \frac{1}{3} \left[W\left(\frac{X}{2\sqrt{3}}\right) + 2W\left(\frac{X}{\sqrt{3}}\right) \right] \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{60} X^2 + O(X^3) & \text{при } X \rightarrow 0, \\ \frac{1}{3} \ln X + O(1) & \text{при } X \rightarrow \infty. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Функция $W(X)$ определена в (46).

Глюонный вклад в энергию вакуума равен (см. Приложение Е)

$$\begin{aligned}
 E_g(\Lambda) &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z}_V^{(0)} \\
 &= - \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{H^2}{2s_0} \right). \tag{38}
 \end{aligned}$$

Неопределенный параметр H должен быть связан с хромодинамической энергетической шкалой Λ_{QCD} .

3.3 Энергия вакуума в КХД

Подставив формулы для $E_q(\Lambda, M)$ и $E_g(\Lambda)$ в (36), получим

$$\begin{aligned}
 E_{vac}(\Lambda) &= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + \sum_f W_q(X_f) \right] \\
 &= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + \sum_f W_q \left(\frac{2\Lambda^2}{M_f^2} \right) \right]. \tag{39}
 \end{aligned}$$

Здесь проведена перенормировка энергии вакуума, определяемая естественным условием

$$\left. \frac{E_{vac}(\Lambda)}{\Lambda^4} \right|_{\Lambda=0} = 0,$$

и соответствующим контрчленом удалена бесконечная константа

$$Z = 4\Lambda^4 \left[\frac{1}{2(4\pi)^2} \ln \left(\frac{H^2}{2s_0} \right) + \frac{2}{3} \sum_F Z(M_F) \right].$$

Асимптотическое поведение энергии вакуума при больших Λ

$$\mathcal{E}_{vac}(\Lambda) \rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}N_q\right) \frac{\Lambda^4 \ln \Lambda^2}{(2\pi)^2}, \quad (40)$$

где $N_q = \sum_f$ - число кварков.

На основании полученных формул для энергии вакуума (39) и (40) можно заключить:

- В глюонном самодуальном поле с постоянной напряженностью кварк-глюонная система глобально стабильна, если число независимых кварков больше двух

$$N_q \geq 2. \quad (41)$$

Не это ли обстоятельство объясняет выделенность изотопической группы $SU_f(2)$ и практическое равенство масс u - и d -кварков?

- Минимум энергии вакуума в (39) определяется соотношением между напряженностью самодуального поля Λ , постоянной H , связанной с хромодинамической шкалой Λ_{QCD} , и массами кварков M_f . Параметр Λ определяет масштаб области конфайнмента и напрямую связан с наклоном реджевских траекторий в спектре адронов. На рис. 2 и 3 показано поведение функции $E_{vac}(\Lambda)$ при различных соотношениях параметров.

В случае изотопической группы $SU_f(2)$ энергия вакуума имеет вид

$$E_{vac}(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + 2W_q \left(\frac{2\Lambda^2}{M_u^2} \right) \right]. \quad (42)$$

В случае изотопической группы $SU_f(3)$ энергия вакуума имеет вид

$$E_{vac}(\Lambda) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \left[-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + 2W_q \left(\frac{2\Lambda^2}{M_u^2} \right) + W_q \left(\frac{2\Lambda^2}{M_s^2} \right) \right]. \quad (43)$$

На рис. 2 и 3 показано поведение этих функций при различных параметрах. Видно, что существуют наборы параметров, для которых минимум вакуумной энергии реализуется при ненулевом самодуальном поле, так что в рассматриваемой системе возникает конфайнмент кварков. Следующей задачей является согласование параметров с основными экспериментальными данными: наклоном реджевских траекторий, массой адронов, ширинами распадов и другими характеристиками адронной физики.

4 Приложение А. Функция Грина

Наши вычисления основаны на следующих формулах

$$\begin{aligned} G(x, \Lambda, v) &= \frac{1}{-\square + \Lambda^4 x^2 + v} \delta(x) \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^2} \left(\frac{2\Lambda^2 s}{\sinh(2\Lambda^2 s)} \right)^2 e^{-vs - \frac{\Lambda^2 x^2}{2 \tanh(2\Lambda^2 s)}}. \end{aligned} \quad (44)$$

Параметр s_0 определяет регуляризацию по "собственному времени".

Пусть $A, B > -4\Lambda^2$

$$\begin{aligned} W_{s_0}(\Lambda, A, B) &= \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 x^2 + A}{-\square + B} \right] \\ &= \int \frac{dx}{V} \int_0^{\infty} dv \left[\frac{1}{-\square + B + v} - \frac{1}{-\square + \Lambda^4 y^2 + A + v} \right] \delta(x - x')|_{x=x'} \\ &= \int_0^{\infty} dv [G(0, 0, B + v) - G(0, \Lambda, A + v)] \\ &= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \left[\frac{e^{-Bs}}{(2\Lambda^2 s)^2} - \frac{e^{-As}}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} \right]. \end{aligned} \quad (45)$$

При $A = B$

$$\begin{aligned} W_{s_0}(\Lambda, A) &= -\frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-As} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{(2\Lambda^2 s)^2} + \frac{1}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} \right] \\ &+ \frac{4\Lambda^4}{3(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-As} = 4\Lambda^4 \left[-\frac{1}{(4\pi)^2} W(X) + \frac{1}{3} Z(A) \right]. \end{aligned}$$

Здесь $X = \frac{2\Lambda^2}{A}$ и

$$\begin{aligned} W(X) &= \int_0^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-As} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{(2\Lambda^2 s)^2} + \frac{1}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} \right] = \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} e^{-t} w(Xt) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{15} \cdot X^2 + O(X^3) & \text{при } X \rightarrow 0, \\ \frac{1}{3} \cdot \ln(X) + O(1) & \text{при } X \rightarrow \infty, \end{cases} \end{aligned} \quad (46)$$

$$w(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{t^2} + \frac{1}{\sinh^2 t} = \frac{t^2}{15} + O(t^4).$$

Для качественных рассуждений удобно ввести приближенную функцию

$$W(X) \approx W_a(X) = \frac{1}{6} \ln \left(1 + \frac{2}{5} X^2 \right), \quad (47)$$

имеющую то же самое асимптотическое поведение при малых и больших X , что и $W(x)$.

Ультрафиолетовая расходимость параметризована константой

$$Z(A) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-As},$$

определяющей нормировку регуляризованного выражения $W(0) = 0$.

4.1 Фермионная энергия вакуума

Вычислим фермионную часть энергии вакуума в (15), имеем

$$\begin{aligned} E_F(\Lambda, M) &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\hat{\nabla}(x) + M}{-\hat{\partial} + M} \right] \\ &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{2V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\hat{\nabla}^2(x) + M^2}{-\square + M^2} \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Ковариантная производная входит в форме

$$\hat{\nabla}^2(y) = \nabla^2(y) - 4\Lambda^2 \mathcal{P}, \quad (49)$$

где матрица \mathcal{P} обладает свойствами

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{i}{4}(\gamma b \gamma) = \frac{i}{4}(\gamma_\mu b_{\mu\nu} \gamma_\nu), \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \\ \mathcal{P}^2 &= \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5), \quad \mathcal{P}^3 = \mathcal{P}, \quad \text{Tr } \mathcal{P} = 0, \quad \text{Tr } \mathcal{P}^2 = 2. \end{aligned} \quad (50)$$

Удобно ввести проекционные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(0)} &= I - \mathcal{P}^2, \quad \mathcal{R}_{(\pm)} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^2 \pm \mathcal{P}), \\ \mathcal{R}_{(j)} \mathcal{R}_{(j')} &= \delta_{jj'} \mathcal{R}_{(j)}, \quad (j, j' = -, 0, +), \\ \text{tr } \mathcal{R}_{(0)} &= 2, \quad \text{tr } \mathcal{R}_{(\pm)} = 1. \end{aligned} \quad (51)$$

Разложим оператор (49) по этим проекционным операторам

$$\begin{aligned} -\hat{\nabla}^2(x) + M^2 &= -\square + \Lambda^4 x^2 + M^2 + 4\Lambda^2 \mathcal{P} \\ &= (-\square + \Lambda^4 x^2 + M^2) \mathcal{R}_{(0)} \\ &+ (-\square + \Lambda^4 x^2 + M^2 + 4\Lambda^2) \mathcal{R}_{(+)} + (-\square + \Lambda^4 x^2 + M^2 - 4\Lambda^2) \mathcal{R}_{(-)}. \end{aligned}$$

Тогда справедлива формула

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\hat{\nabla}^2 + M^2}{-\square + M^2} \right] &= \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 y^2 + M^2}{-\square + M^2} \right] \\ + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 y^2 + M^2 + 4\Lambda^2}{-\square + M^2} \right] &+ \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^4 y^2 + M^2 - 4\Lambda^2}{-\square + M^2} \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами (45), получим

$$\begin{aligned} E_F(\Lambda, M) &= -\frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s} \left[\frac{2}{(2\Lambda^2 s)^2} - \frac{1 + \cosh(4\Lambda^2 s)}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} \right] \\ &= -\frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} 2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s} \left[\frac{1}{(2\Lambda^2 s)^2} - \frac{1}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} - 1 \right] \\ &= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} 2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s} \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2\Lambda^2 s)^2} + \frac{1}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} \right) \right] \\ &= 4\Lambda^4 \left\{ \frac{2}{(4\pi)^2} W(X_M) + \frac{4}{3} Z(M) \right\}, \end{aligned}$$

где $X_M = \frac{2\Lambda^2}{M^2}$. Функция $W(X)$ определена формулой (46), она положительна и ее асимптотическое поведение при малых и больших X записывается

$$W(X) = \begin{cases} \frac{1}{15} X^2 + O(X^4) & \text{для } X \rightarrow 0, \\ \frac{1}{3} \ln X + O(1) & \text{для } X \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (52)$$

Бесконечная константа определена как

$$Z(M) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s}.$$

4.2 Бозонная энергия вакуума

Вклад в энергию вакуума заряженного бозона массы m согласно формуле (17) равен

$$\begin{aligned} E_B(\Lambda, m) &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\nabla^2 + m^2}{-\square + m^2} \right] = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-\square + \Lambda^2 x^2 + m^2}{-\square + m^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s^3} e^{-m^2 s} \left[1 - \left(\frac{2\Lambda^2 s}{\sinh(2\Lambda^2 s)} \right)^2 \right] \\
&= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-m^2 s} \left[\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2\Lambda^2 s)^2} + \frac{1}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} \right) \right] \\
&= 4\Lambda^4 \left\{ -\frac{1}{(4\pi)^2} W(X_m) + \frac{1}{3} Z(m) \right\},
\end{aligned}$$

где $X_m = \frac{2\Lambda^2}{m^2}$ и функция $W(X_m)$ дается формулой (46).

Полученные нами формулы совпадают с вычислениями Швингера [12].

5 Приложение Б. Матрицы \check{n} и $\check{\eta}$

Пусть в группе $SU_c(3)$ задан некоторый постоянный вектор n^a . Он характеризуется двумя групповыми инвариантами

$$(nn) = (n^a n^a) = 1, \quad (nnnd) = (n^a n^b n^c d^{abc}).$$

Существует система координат, где этот вектор имеет вид

$$n^a = \delta^{a3} n^3 + \delta^{a8} n^8 = \delta^{a3} \sin(\theta) + \delta^{a8} \cos(\theta)$$

и

$$(nnnd) = (n^a n^b n^c d^{abc}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^2(\theta) (3 \cos(\theta) - \sin(\theta)).$$

Вообще говоря, угол θ должен определяться условием минимума вакуумной энергии, однако мы поступим проще - выберем его равным нулю, т.е.

$$n^a = \delta^{a8}.$$

В кварковый лагранжиан входит постоянная 3×3 -матрица

$$\check{\eta} = (nt) = t^8 = \text{diag} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right),$$

где

$$\begin{aligned}
t^a &= \frac{1}{2} \lambda_a \quad (a = 1, \dots, 8), \\
[t^a, t^b] &= i f^{abc} t^c, \quad \text{Tr } t^a t^b = \frac{1}{2} \delta^{ab}.
\end{aligned}$$

Постоянная 8×8 -матрица в присоединенном представлении имеет вид

$$\tilde{n} : \quad \tilde{n}^{ac} = -i f^{abc} \tilde{n}^b,$$

которая эрмитова и в диагональной форме имеет вид

$$\tilde{n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{diag}(1, 1, -1, -1, 0, 0, 0, 0).$$

6 Приложение В. Ковариантная производная

Ковариантная производная определяется

$$\nabla_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu} x_\nu, \quad [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = -2i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}.$$

Справедливы соотношения:

$$[\nabla_\mu, \nabla^2] = -4i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu} \nabla_\nu, \quad \nabla_\mu b_{\mu\nu} \nabla_\nu = -4i\Lambda_g^2,$$

$$\nabla_\mu \nabla^2 \nabla_\mu = (\nabla^2)^2 + (4\Lambda_g^2)^2, \quad \nabla_\mu \frac{1}{\nabla^2} \nabla_\mu = 1.$$

$$e^{-s\nabla^2} \nabla_\mu e^{s\nabla^2} = [\delta_{\mu\nu} \cosh(4\Lambda_g^2 s) - i b_{\mu\nu} \sinh(4\Lambda_g^2 s)] \nabla_\nu.$$

Пусть

$$R_{\mu\nu} = -\nabla^2 \delta_{\mu\nu} + i4\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu}^{-1} = \frac{-\nabla^2 \delta_{\mu\nu} - i4\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}}{\nabla^4 - (4\Lambda_g^2)^2},$$

тогда

$$(\nabla R^{-1} \nabla) = \nabla_\mu R_{\mu\nu}^{-1} \nabla_\nu = 1.$$

7 Приложение Г. Нулевые моды

Задача ставится следующим образом. Имеется оператор R , в нашем случае

$$R = -\square + \Lambda^4 x^2 - 4\Lambda^2, \quad (53)$$

который имеет нулевые собственные значения, т.е.

$$RU_n = \lambda_n U_n, \quad U_n \in \mathbf{L}^2, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_n > 0 \quad \text{при} \quad n > 0.$$

Формулируется проблема: найти функцию Грина (обратный оператор), которая в случае отсутствия нулевых мод ($\lambda_n > 0$, $n \geq 0$) может быть представлена как

$$G = \frac{1}{R} = \sum_n |U_n\rangle \frac{1}{\lambda_n} \langle U_n| = |U_0\rangle \frac{1}{\lambda_0} \langle U_0| + \sum_{n>0} |U_n\rangle \frac{1}{\lambda_n} \langle U_n|.$$

Очевидно, это представление не имеет смысла в случае существования нулевых собственных значений $\lambda_0 = 0$.

Построение функции Грина, т.е. обратного оператора $G = \frac{1}{R}$, эквивалентно решению задачи: найти решение уравнения

$$R\Phi = J \tag{54}$$

с подходящими краевыми условиями. В квантовой теории поля требуется, чтобы решение было квадратично интегрируемо, т.е. $\Phi \in \mathbf{L}^2$, если $J \in \mathbf{L}^2$.

Уравнение (54) решим следующим образом. Поскольку собственные функции $\{U_n\}$ оператора R образуют полную систему, разложим функцию J в ряд

$$J = \sum_{n=0}^{\infty} j_n U_n,$$

а функцию Φ будем искать в виде

$$\Phi = j_0 \phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n.$$

Подставив это разложение в уравнение (54), получим $c_n = \frac{j_n}{\lambda_n}$ для $n > 0$ и уравнение на функцию ϕ_0 :

$$R\phi_0 = U_0.$$

Это уравнение имеет решение, следовательно, для функции Грина получим

$$G = \frac{1}{R} = |\phi_0\rangle \langle U_0| + |U_0\rangle \langle \phi_0| + \sum_{n>0} |U_n\rangle \frac{1}{\lambda_n} \langle U_n|. \tag{55}$$

Эта функция Грина удовлетворяет уравнению

$$RG = |U_0\rangle \langle U_0| + \sum_{n>0} |U_n\rangle \langle U_n| = I,$$

т.е. действительно является функцией Грина оператора R , обладающего нулевыми собственными значениями.

Казалось бы, задача решена. Однако решение ϕ_0 не квадратично интегрируемо, т.е. $\phi_0 \notin \mathbf{L}^2$! В случае оператора (53)

$$\phi_0(x) \sim e^{+\frac{1}{2}\Lambda^2 x^2} \quad \text{при} \quad x^2 \rightarrow \infty.$$

Следовательно, решение не существует в пространстве \mathbf{L}^2 и $\Phi = GJ \notin \mathbf{L}^2$. Если мы теперь встанем на стандартную точку зрения квантовой механики - только квадратично интегрируемые функции имеют физический смысл - мы и должны поступить стандартным образом, т.е. исключить эти решения из допустимых функций, описывающих какое-либо физическое состояние.

Таким образом, в качестве функции Грина следует использовать

$$G_{reg} = \sum_{n>0} |U_n\rangle \frac{1}{\lambda_n} \langle U_n| \in \mathbf{L}^2. \quad (56)$$

Проще всего регуляризованную функцию Грина можно найти, воспользовавшись равенством

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{R+z}, & G_{reg}(z) &= G(z) - \frac{1}{z} \text{Res}_{\zeta=0} G(\zeta), \\ G_{reg} &= G_{reg}(0) = \sum_{n>0} |U_n\rangle \frac{1}{\lambda_n} \langle U_n| \in \mathbf{L}^2. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к функциональному интегралу

$$Z = \int D\Phi e^{-\frac{1}{2}(\Phi R \Phi) + gW[\Phi]} = e^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta\Phi} G \frac{\delta}{\delta\Phi})} e^{gW[\Phi]} = \sum_n \frac{g^n}{n!} Z_n.$$

Слагаемые Z_n состоят из членов вида

$$\left(\frac{\delta}{\delta\Phi} G \frac{\delta}{\delta\Phi} \right)^m (W[\Phi])^k,$$

которые не определены математически, поскольку при использовании функции Грина (55) интегралы, определяющие Z_n , расходятся при больших x . Мы определим функциональный интеграл как

$$Z \doteq \int D\Phi e^{-\frac{1}{2}(\Phi R_{reg} \Phi) + gW[\Phi]} = e^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{\delta\Phi} G_{reg} \frac{\delta}{\delta\Phi})} e^{gW[\Phi]},$$

где используется регуляризованная функция Грина (56).

Получим $G_{reg}(x)$ для оператора R (53), воспользовавшись формулами Приложения А,

$$G_{reg}(x) = \left(\frac{1}{-\square + \Lambda^4 x^2 - 4\Lambda^2 + z} \delta(x) \right)_{reg}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_0^\infty ds \left(\frac{e^{4\Lambda^2 s}}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} e^{-\frac{\Lambda^2 x^2}{2 \tanh(2\Lambda^2 s)}} - 4e^{-\frac{\Lambda^2 x^2}{2}} \right) \\
&= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_0^\infty ds \cdot \frac{2 - e^{-4\Lambda^2 s}}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} \cdot e^{-\frac{\Lambda^2 x^2}{2 \tanh(2\Lambda^2 s)}} \\
&+ \frac{8\Lambda^2}{(4\pi)^2} e^{-\frac{\Lambda^2 x^2}{2}} \int_0^\infty dt \left(e^{-\frac{\Lambda^2 x^2}{2}(\coth(t)-1)} - 1 \right). \tag{57}
\end{aligned}$$

В частности,

$$\begin{aligned}
G_{reg} &= G_{reg}(0) = \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_0^\infty ds \left(\frac{e^{4\Lambda^2 s}}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)} - 4 \right) \\
&= \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^\infty ds \cdot \frac{2 - e^{-4\Lambda^2 s}}{\sinh^2(2\Lambda^2 s)}.
\end{aligned}$$

Существенно, что при $\Lambda \rightarrow 0$ мы получаем правильный пропагатор без массового скалярного поля

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} G_{reg}(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\frac{x^2}{4s}} = \frac{1}{(2\pi)^2 x^2}.$$

8 Приложение Д. Кварковая энергия вакуума

Вычислим кварковый вклад $E_f(\Lambda)$ в энергию вакуума. Имеем

$$\begin{aligned}
E_q(\Lambda, M) &= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \ln \left[\frac{\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) - M}{\gamma_\mu \partial_\mu - M} \right] \\
&= - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{2V} \text{Tr} \ln \left[\frac{-(\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x))^2 + M^2}{-\square + M^2} \right], \tag{58}
\end{aligned}$$

В слагаемом с ковариантной производной

$$\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) = (\gamma \partial_x) + i\Lambda^2 \check{n}(\gamma b x)$$

цветовую матрицу \check{n} выберем в диагональной форме

$$\check{n} = \text{diag} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right).$$

Тогда и ковариантная производная будет диагональна в цветовом пространстве

$$\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x) = (\gamma \partial_x) + i\Lambda^2(\gamma b x),$$

где

$$\check{\Lambda}^2 = \text{diag} \left(\frac{\Lambda^2}{2\sqrt{3}}, \frac{\Lambda^2}{2\sqrt{3}}, -\frac{\Lambda^2}{\sqrt{3}} \right).$$

Далее имеем

$$(\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x))^2 = \nabla^2(y) - 4\check{\Lambda}^2 \mathcal{P}, \quad (59)$$

где матрица \mathcal{P} совпадает с (50). Введем проекционные операторы (51) и разложим оператор (59) по этим проекционным операторам

$$\begin{aligned} (\gamma_\mu \check{\nabla}_\mu(x))^2 + M^2 &= (-\square + \check{\Lambda}^4 x^2 + M^2) \mathcal{R}_{(0)} \\ &+ (-\square + \check{\Lambda}^4 x^2 + M^2 + 4\check{\Lambda}^2) \mathcal{R}_{(+)} + (-\square + \check{\Lambda}^4 x^2 + M^2 - 4\check{\Lambda}^2) \mathcal{R}_{(-)}. \end{aligned}$$

Тогда вакуумная энергия в (58) для каждого отдельного кварка может быть представлена в форме

$$\begin{aligned} E_q(\Lambda, M) &= -\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{-\square + \check{\Lambda}^4 y^2 + M^2}{-\square + M^2} \right] \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{-\square + \check{\Lambda}^4 y^2 + M^2 - 4\check{\Lambda}^2}{-\square + M^2} \right] + \frac{1}{2} \ln \left[\frac{-\square + \check{\Lambda}^4 y^2 + M^2 + 4\check{\Lambda}^2}{-\square + M^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулами Приложения А, получим

$$\begin{aligned} E_q(\Lambda, M) &= -\text{Tr} \left[\frac{4\check{\Lambda}^4}{(4\pi)^2} 2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s} \left(\frac{1}{(2\check{\Lambda}^2 s)^2} - \frac{1 + \cosh(4\check{\Lambda}^2 s)}{2 \sinh^2(2\check{\Lambda}^2 s)} \right) \right] \\ &= -\text{Tr} \left[\frac{4\check{\Lambda}^4}{(4\pi)^2} 2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s} \left(\frac{1}{(2\check{\Lambda}^2 s)^2} - \frac{1}{\sinh^2(2\check{\Lambda}^2 s)} - 1 \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\frac{4\check{\Lambda}^4}{(4\pi)^2} 2 \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-M^2 s} \left(\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2\check{\Lambda}^2 s)^2} + \frac{1}{\sinh^2(2\check{\Lambda}^2 s)} \right) \right) \right] \\ &= \text{Tr} 4\check{\Lambda}^4 \left\{ \frac{2}{(4\pi)^2} W \left(\frac{2\check{\Lambda}^2}{M^2} \right) + \frac{4}{3} Z(M) \right\} \\ &= 4\Lambda^4 \left\{ \frac{1}{(4\pi)^2} W_q(X) + \frac{2}{3} Z(M) \right\}, \end{aligned}$$

где $X = \frac{2\Lambda^2}{M^2}$ и

$$\begin{aligned} W_q(X) &= \frac{1}{3} \left[W \left(\frac{X}{2\sqrt{3}} \right) + 2W \left(\frac{X}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{60} X^2 + O(X^3) & \text{при } X \rightarrow 0, \\ \frac{1}{3} \ln X + O(1) & \text{при } X \rightarrow \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Функция $W(X)$ определена в (46).

8.1 Приложение Е. Глюонная энергия вакуума

Вычислим глюонную энергию вакуума (62). Рассмотрим функциональный интеграл (35).

$$E_g(\Lambda) = - \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Z}_{Vg}^{(0)}. \quad (60)$$

Прежде всего вычислим $\Delta(A)$. Согласно определению (см., например, [13])

$$\Delta(A) \int d\omega \delta(\nabla A^\omega) = 1.$$

В нашем приближении в низшем порядке теории возмущений ($g = 0$) имеем

$$\Delta(A) = \text{Tr} \ln \left(1 - \frac{1}{\square} i\Lambda_g^2 (x_\mu b_{\mu\nu} \partial_\nu) \right) = 1$$

Матрица \hat{n} рассмотрена в Приложении Б. Интегрирование в (35) по полям, соответствующим нулевым собственным значениям матрицы \hat{n} , дает единицу. Поэтому ее можно рассматривать как 4×4 -матрицу с собственными значениями $\pm \frac{\sqrt{3}}{4}$, т.е.

$$\Lambda^2 \hat{n} \Rightarrow \Lambda_g^2 \text{diag}(1, 1, -1, -1), \quad \Lambda_g^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \Lambda^2.$$

Функциональный интеграл для $\mathcal{Z}_{Vg}^{(0)}$ в (35) не зависит от знака тензора $b_{\mu\nu}$ и поэтому может быть представлен в форме произведения

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{Vg}^{(0)} &= (\mathcal{Y}_V)^4, \\ \mathcal{Y}_V &= \frac{1}{N_A} \int DA \delta(\nabla_\mu A_\mu) e^{-\frac{1}{2} \int_V dx (A_\mu R_{\mu\nu} A_\nu)}, \\ R_{\mu\nu} &= -\nabla^2 \delta_{\mu\nu} + 4i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu}, \quad \nabla_\mu(x) = \partial_\mu + i\Lambda_g^2 b_{\mu\nu} x_\nu. \end{aligned} \quad (61)$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_V &= \frac{1}{N_A} \int DA \delta(\nabla A) e^{-\frac{1}{2}(ARA)} = \frac{1}{N_A} \int DS \int DA e^{-\frac{1}{2}(ARA) + i(S\nabla A)} \\ &= \left(\frac{\text{Det} R_{\mu\nu}^0}{\text{Det} R_{\mu\nu}} \right)^{\frac{1}{2}} \int DS e^{-\frac{1}{2}(S\nabla R^{-1}\nabla S)} = \left(\frac{\text{Det} R_{\mu\nu}^0}{\text{Det} R_{\mu\nu}} \cdot \frac{1}{\text{Det}(\nabla R^{-1}\nabla)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \text{Det} \left[\frac{-\square}{-\nabla^2 + 4\Lambda_g^2} \right] \cdot \text{Det} \left[\frac{-\square}{-\nabla^2 - 4\Lambda_g^2} \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, для глюонного вклада в энергию вакуума получаем представление

$$E_g(\Lambda) = 4 \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \text{Tr} \left\{ \ln \left[\frac{-\square + \Lambda_g^4 x^2 + 4\Lambda_g^2}{-\square} \right] + \ln \left[\frac{-\square + \Lambda_g^4 x^2 - 4\Lambda_g^2}{-\square} \right] \right\}.$$

Оператор

$$-\square + \Lambda_g^4 x^2 - 4\Lambda_g^2$$

содержит нулевые собственные значения. Обсуждение проблемы нулевых мод дано в Приложении Г, согласно которому имеем

$$\begin{aligned} E_g(\Lambda_g) &= 8 \frac{4\Lambda_g^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \left[\frac{1}{(2\Lambda_g^2 s)^2} - \frac{\cosh(4\Lambda_g^2 s)}{\sinh^2(2\Lambda_g^2 s)} + 2 \right] \\ &= 8 \frac{4\Lambda_g^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \phi(2\Lambda_g^2 s) = \frac{3}{2} \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \phi(2\Lambda_g^2 s), \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$\phi(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\sinh^2(t)}.$$

Выделим расходящуюся часть из интеграла

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds}{s} \phi(2\Lambda_g^2 s) &= \int_{s_0}^a \frac{ds}{s} \phi(0) + \int_{s_0}^a \frac{ds}{s} [\phi(2\Lambda_g^2 s) - \phi(0)] + \int_a^{\infty} \frac{ds}{s} \phi(2\Lambda_g^2 s) \\ &\Rightarrow \frac{1}{3} \ln \left(\frac{a}{s_0} \right) + \int_0^{2\Lambda_g^2 a} \frac{dt}{t} [\phi(t) - \phi(0)] + \int_{2\Lambda_g^2 a}^{\infty} \frac{dt}{t} \phi(t) \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(\frac{H^2}{2s_0} \right) - \frac{1}{3} \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{H^2} \right). \end{aligned}$$

Здесь возникает неопределенный параметр H , который должен быть связан с хромодинамической энергетической шкалой Λ_{QCD} .

Окончательно глюонный вклад в энергию вакуума записывается в виде

$$E_g(\Lambda) = -\frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \cdot \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2\Lambda^2}{H^2} \right) + \frac{4\Lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \ln \left(\frac{H^2}{2s_0} \right). \quad (63)$$

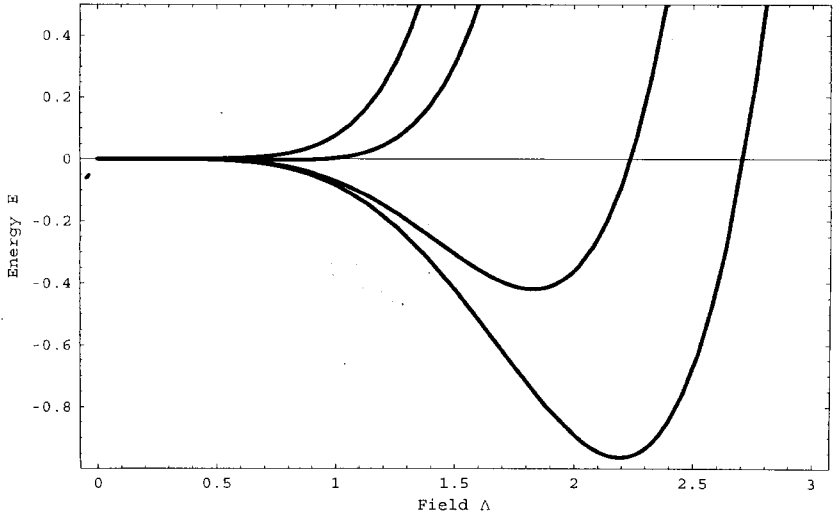


Рис. 1. Энергия вакуума $E_{vac}(\Lambda)$ в гипотетическом мире КЭД как функция параметра $\lambda = \sqrt{2} \frac{\Lambda}{M_F}$ при четырех значениях параметра $\xi = \frac{m_{\frac{1}{2}}^2}{M_F^2} = 0.75; 0.65; 0.5; 0.45$.

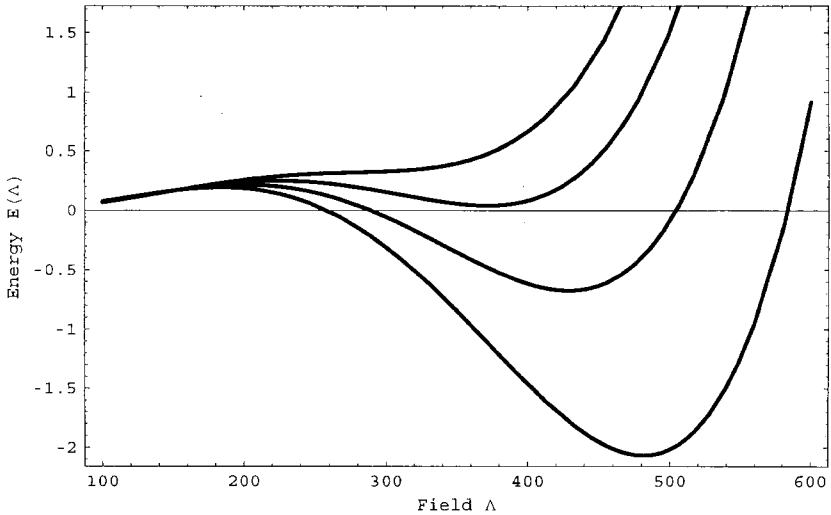


Рис. 2. Энергия вакуума $E_{vac}(\Lambda)$ в КХД как функция параметра Λ для изотопической группы $SU_f(2)$ при $M_u = M_d = 120$ и при четырех значениях параметра $H = 245; 240; 235; 230$

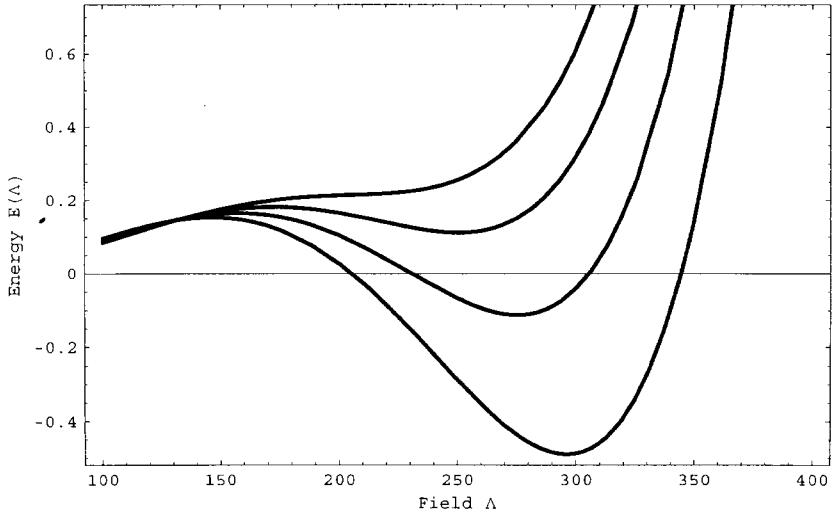


Рис. 3. Энергия вакуума $E_{vac}(\Lambda)$ в КХД как функция параметра Λ для изотопической группы $SU_f(3)$ при $M_u = M_d = 120$, $M_s = 200$ и при четырех значениях параметра $H = 245; 240; 235; 230$

Список литературы

- [1] E.S.Swan, *Aspects of Confinement: a Brief Review*, arXiv:hep-ph/0310089 (2003);
- [2] P.Maris, G.D.Roberts, *Dyson-Schwinger Equations: a Tool for Hadron Physics*, arXiv:nucl-th/0301049 (2003);
- [3] G.V.Efimov, G.Ganbold, *Phys.Rev.*, **D65** 054012 (2002);
- [4] G.V.Efimov, S.N.Nedelko, *Phys.Rev.*, **D51**, 176 (1995); *Eur.Phys.J.*, **C1**, 343. (1998);
- [5] Ya.V.Burdanov, G.V.Efimov, *Phys.Rev.*, **D64**, 014001 (2001);
- [6] G.V.Efimov, M.A.Ivanov, *The Quark Confinement Model of Hadrons*. (IOP, London. 1993);
- [7] Г.В.Ефимов, *Нелокальные взаимодействия квантованных полей*. "Наука", Москва, 1977;
- [8] G.K.Savvidy, *Phys.Lett.*, **V71** (1977) 133;
- [9] H.Leutwyler, *Nucl.Phys.*, **V179** (1981) 129-170;
- [10] А.С.Вайтман, *Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей*, "Наука", Москва, 1968;
- [11] Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, ГИИТЛ, Москва, 1957;
- [12] J.Schwinger, *Phys.Rev.*, **82** (1951) 664;
- [13] А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, "Наука", Москва, 1988.

Получено 11 декабря 2003 г.

Рассматривается энергия вакуума КЭД и КХД в самодуальном поле с постоянной напряженностью. Показано, что в квантовой электродинамике системы заряженных фермионных и бозонных полей минимум вакуумной энергии реализуется при нулевом самодуальном поле при выполнении двух условий: удвоенное число заряженных фермионов должно превышать число заряженных бозонов и легчайшими заряженными частицами должны быть фермионы, что и наблюдается в Природе.

В квантовой хромодинамике глобальная стабильность кварк-глюонной системы возможна, только если число различных кварков больше или равно двум. Наличие безмассовых самодействующих глюонов приводит к тому, что вакуум КХД может реализоваться при ненулевом самодуальном глюонном поле, при определенных соотношениях между хромодинамической энергетической шкалой Λ_{QCD} и массами кварков, что ведет к аналитическому конфайнменту кварков и глюонов и возникновению стабильных состояний — адронов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2003

Перевод автора

The QED and QCD vacuum energy in a selfdual field with constant strength is considered. It is shown that in the quantum electrodynamics of a system of charged fermion and boson fields the minimum of vacuum energy is realized with zero selfdual photon field if (1) the doubled number of fermions exceeds the number of bosons and (2) the lightest charged particles are fermions. Namely, this situation takes place in Nature.

In the quantum chromodynamics the global stability of the quark-gluon system takes place if the number of quarks with different flavours is equal to or more than two. The existence of massless selfinteracting gluons leads to the QCD vacuum which can be realized with nonzero selfdual gluon fields. The result is the confinement of quarks and gluons and the origin of stable states — hadrons.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2003

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 13.01.2004.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,63. Тираж 415 экз. Заказ № 54261.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/