

P11-2004-17

Е. В. Земляная, И. В. Барашенков

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДВИЖУЩИХСЯ СОЛИТОНОВ
В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА
С ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НАКАЧКОЙ
И ДИССИПАЦИЕЙ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

Земляная Е. В., Барашенков И. В.
Численный анализ движущихся солитонов
в нелинейном уравнении Шредингера
с параметрической накачкой и диссипацией

P11-2004-17

Показано, что при наличии параметрической накачки два и более диссипативных солитона могут образовать комплекс, движущийся с нулевым импульсом, но с ненулевой постоянной скоростью. Представлена схема численного продолжения таких решений по параметру.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2004

Перевод авторов

Zemlyanaya E. V., Barashenkov I. V.
Numerical Study of the Travelling Solitons
in Parametrically Driven, Damped Nonlinear Schrödinger Equation

P11-2004-17

We show that two or more solitons of parametrically driven, damped nonlinear Schrödinger equation can form a complex travelling with zero momentum at a nonzero constant speed. The continuation scheme for numerical analysis of the travelling damped solitons is presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2004

ВВЕДЕНИЕ

Амплитуда квазимонохроматической волны, распространяющейся в нелинейной дисперсионной среде, удовлетворяет нелинейному уравнению Шредингера. Нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью самофокусирующего типа имеет вид

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi = -i\gamma\Psi, \quad \gamma > 0. \quad (1)$$

Член $-i\gamma\Psi$ в правой части уравнения учитывает диссипативные потери, которые предполагаются малыми в моделях, описываемых непосредственно уравнением (1). В физических системах возникновение и поддержание недиссипирующих структур обеспечивается за счет подкачки энергии извне; последняя моделируется добавлением еще одного члена к правой части уравнения (1). В настоящей работе мы ограничиваемся случаем параметрической накачки. Во многих приложениях соответствующее амплитудное уравнение имеет вид

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi = h\bar{\Psi}e^{2i\Omega t} - i\gamma\Psi. \quad (2)$$

Черта над Ψ в правой части (2) означает комплексное сопряжение; γ — коэффициент диссипации, h и Ω — амплитуда и частота накачки соответственно. Уравнение (2) описывает нелинейный фарадеевский резонанс в вертикально осциллирующем канале с водой [1–3]; фазовое усиление солитонов в оптических волокнах [4]; волны намагничивания в ферромагнетиках под действием комбинации статического и СВЧ-поля [5]; амплитуды синхронизованных колебаний в вертикально раскачиваемых цепочках маятников [6] и т. д.

Уравнение (2) имеет солитонные решения [1, 2, 5] как устойчивые, так и неустойчивые, которые могут образовывать (устойчивые и неустойчивые) солитонные комплексы [7–9]. В случае ненулевой диссипации все локализованные решения, обнаруженные до сих пор, не имели зависимости от времени. Что же касается движущихся солитонов, как устойчивых, так и неустойчивых, их удавалось получить только при отсутствии диссипации [10]. Более того, до недавнего времени считалось, что солитоны принципиально не могут двигаться при наличии диссипации. Этот вывод опирался на теорию возмущений, которая предсказывала замедление и остановку солитонов, первоначально двигавшихся с ненулевой скоростью [2, 11–15].

Тем не менее, как было показано в самое последнее время [16], движущиеся солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера с параметрической накачкой и ненулевой диссипацией существуют при определенных значениях параметров. В [16] сформулированы условия, при которых такие решения могут возникать, и представлены соответствующие численные результаты.

Основная трудность численного получения таких решений состоит в том, что каждому значению коэффициента диссипации соответствует строго определенное, заранее неизвестное значение скорости солитона. В результате, схема продолжения по параметру, изложенная в [17] и использовавшаяся для исследования как неподвижных диссипативных солитонов [9], так и движущихся солитонов при нулевой диссипации [10] оказывается неприменимой и требует модификации. В настоящей статье дано описание такой модифицированной схемы и представлены полученные с ее помощью результаты.

Работа построена следующим образом. В разд. 1 формулируется постановка задачи. В разд. 2 обсуждаются бифуркации, при которых: а) *неподвижные диссипативные* солитоны ($V = 0$, $\gamma \neq 0$) могут быть продолжены в область $V \neq 0$, и б) *недиссипативные движущиеся* волны ($\gamma = 0$, $V \neq 0$) могут быть продолжены в область $\gamma \neq 0$. В разд. 3 представлена схема продолжения по параметру и обсуждаются результаты численного исследования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Полагая частоту накачки Ω равной единице и производя замену $\Psi(x, t) = e^{it}\psi(x, t)$, приведем уравнение (2) к автономному виду:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi - \psi = h\bar{\psi} - i\gamma\psi. \quad (3)$$

В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением солитонов, движущихся с постоянной скоростью, т. е.

$$\psi(x, t) = \psi(x - Vt) \equiv \psi(\xi), \quad (4)$$

где $\psi(\xi) \rightarrow 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$. Такие решения удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$-iV\psi_\xi + \psi_{\xi\xi} + 2|\psi|^2\psi - \psi = h\bar{\psi} - i\gamma\psi, \quad (5)$$

в котором скорость V играет роль внешнего параметра.

Принципиальное значение имеет устойчивость решений к малым возмущениям. Линеаризуя уравнение (3) в движущейся системе координат и предполагая, что линейное возмущение зависит от времени экспоненциально:

$$\delta\psi(\xi, t) = e^{\lambda t} [\delta u(\xi) + i\delta v(\xi)], \quad (6)$$

мы получаем задачу на собственные значения:

$$\mathcal{H}_0 \vec{y} = (\lambda + \gamma) J \vec{y}, \quad (7)$$

где оператор \mathcal{H}_0 имеет вид

$$\mathcal{H}_0 = \begin{pmatrix} -\partial_\xi^2 + 1 + h - 6u^2 - 2v^2 & -V\partial_\xi - 4uv \\ V\partial_\xi - 4uv & -\partial_\xi^2 + 1 - h - 6v^2 - 2u^2 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

кососимметричная матрица J определяется как

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а вектор-столбец $\vec{y}(\xi) = (\delta u, \delta v)^T$. Критерием устойчивости является отсутствие собственных значений λ с положительной вещественной частью.

Приведем также характеристики решения, которые будут использоваться в дальнейшем изложении. Это интегралы уравнения (2), или, точнее, величины, которые сохранились бы, если бы не было диссипации. При $\gamma = 0$ в уравнении (2) сохраняется импульс, определяемый выражением

$$P = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\psi}_x \psi - \psi_x \bar{\psi}) dx, \quad (9)$$

и энергия

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (|\psi_x|^2 + |\psi|^2 - |\psi|^4 + h \operatorname{Re} \psi^2) dx. \quad (10)$$

Отметим, что в диссипативном случае ($\gamma \neq 0$) импульс затухает экспоненциально:

$$\dot{P} = -2\gamma P, \quad (11)$$

в то время как изменение энергии происходит по закону

$$\dot{E} = 2\gamma \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^4 dx - E \right). \quad (12)$$

2. БИФУРКАЦИИ ДВИЖУЩИХСЯ ДИССИПАТИВНЫХ СОЛИТОНОВ

2.1. Продолжение диссипативных решений в $V \neq 0$. Рассмотрим сначала условие продолжения стационарных решений с ненулевым значением

γ в область $V \neq 0$. Два различных по амплитуде и фазе односолитонных решения, обозначаемые ψ_+ и ψ_- , известны в явном виде:

$$\psi_{\pm}(x) = e^{-i\theta_{\pm}} A_{\pm} \operatorname{sech}(A_{\pm}x), \quad (13)$$

$$A_{\pm} = \sqrt{1 \pm \sqrt{h^2 - \gamma^2}}, \quad \theta_+ = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\gamma}{h}, \quad \theta_- = \frac{\pi}{2} - \theta_+.$$

Эти два солитона могут образовывать множество стационарных комплексов, которые мы будем символически обозначать $\psi_{(++)}$, $\psi_{(--)}$, $\psi_{(+-)}$, $\psi_{(-+-)}$ и т.д. [9]. (Здесь, например, $\psi_{(+-)}$ — связанное состояние двух ψ_+ -солитонов и одного солитона ψ_- , расположенного между ними.) Предположим, $\psi_0(x) = u_0 + iv_0$ — один из таких солитонных комплексов, существующий при значениях параметров h_0 и γ_0 . В работе [16] сформулировано необходимое условие, при выполнении которого решение может быть продолжено в область $V \neq 0$. Для четных функций* необходимое условие продолжения в $V \neq 0$ из [16] сводится к выполнению равенства

$$I(h) = 0, \quad (14)$$

где интеграл $I(h)$

$$I(h) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} (yv'_0 - wu'_0) dx \quad (15)$$

есть непрерывная функция от h ; штрихами над u_0 и v_0 обозначены производные по x ; $(y, w)^T = \vec{y}(x)$ — собственный вектор оператора \mathcal{L}^\dagger , соответствующий нулевому собственному значению $\mathcal{L}^\dagger \vec{y} = 0$. Здесь оператор \mathcal{L} имеет вид

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 + 1 + h_0 \cos 2\theta - 6u_0^2 - 2v_0^2 & \gamma_0 + h_0 \sin 2\theta - 4u_0v_0 \\ -\gamma_0 + h_0 \sin 2\theta - 4u_0v_0 & -\partial_x^2 + 1 - h_0 \cos 2\theta - 2u_0^2 - 6v_0^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

С помощью условия (14) было, в частности, показано, что при $\gamma_0 \neq 0$ односолитонные решения ψ_+ и ψ_- (элементарные составляющие, из которых «строятся» все комплексы) *не могут* быть продолжены в $V \neq 0$.

Для солитонных комплексов, полученных в [9], возможность продолжения в область $V \neq 0$ была проверена численно. При анализе этих ветвей многосолитонных комплексов обнаруживаются три точки, в которых интеграл $I(h)$ меняет знак (черные точки на рис. 1). В каждой из этих трех точек нам удалось численно продолжить решения с $\gamma \neq 0$ в область ненулевых значений V . Результаты представлены в разд. 3 (рис. 4, а–в).

*Все решения, найденные в работе [9], являются четными функциями.

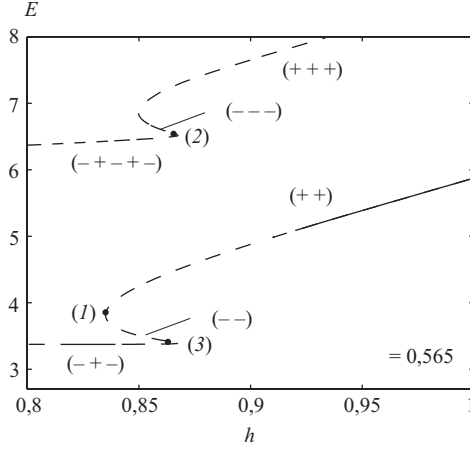


Рис. 1. Фрагмент бифуркационной диаграммы для стационарных многосолитонных комплексов из работы [9]. Представлена зависимость энергии (10) от параметра h при фиксированном γ . Нижняя ветвь соответствует симметричным двухсолитонным комплексам $\psi_{(++)}$ и $\psi_{(---)}$ и трехсолитонному решению $\psi_{(-+-)}$. Верхняя ветка включает решения $\psi_{(+++)}$ и $\psi_{(---)}$, а также пятисолитонный комплекс $\psi_{(-+-+-)}$. Жирной линией нанесены устойчивые решения, штриховой линией — неустойчивые. Черные точки изображают точки бифуркации, где интеграл (14) обращается в нуль, и, следовательно, могут возникать движущиеся солитоны

2.2. Продолжение движущихся солитонов в область $\gamma \neq 0$. При $\gamma = 0$ уравнение (5) имеет набор локализованных решений с отличными от нуля значениями V [10]. Следовательно, в качестве второй стратегии получения диссипативных движущихся солитонов естественно пытаться продолжить недиссипативные движущиеся решения в область $\gamma \neq 0$. В работе [16] показано, что необходимое и достаточное условие того, что локализованное решение с $V \neq 0$ и $\gamma = 0$ может быть продолжено к $\gamma \neq 0$, имеет вид

$$P = 0. \quad (17)$$

Простейшие решения, обладающие нулевым импульсом, — это, конечно, покоящиеся односолитонные решения ψ_+ и ψ_- . Они получаются из формул (13), где нужно только положить $\gamma = 0$:

$$\psi_+(x) = A_+ \operatorname{sech}(A_+ x), \quad \psi_-(x) = iA_- \operatorname{sech}(A_- x).$$

Здесь $A_{\pm}^2 = 1 \pm h$. Продолжение этих решений, однако, не приводит к движущимся волнам; результат продолжения — статические диссипативные солитоны ψ_{\pm} , определяемые формулой (13) с $\gamma \neq 0$.

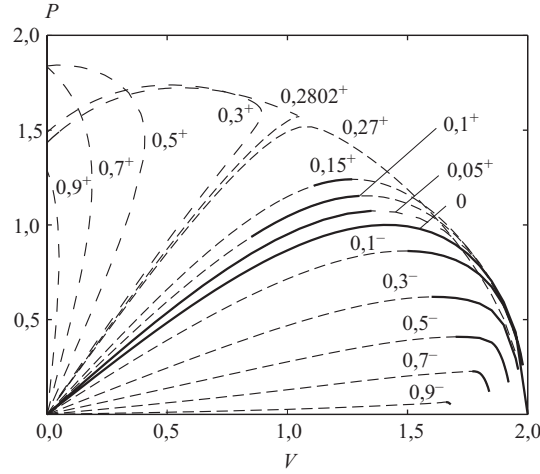


Рис. 2. Импульс недиссипативных движущихся солитонов как функция скорости. Сплошными линиями нанесены участки кривых, соответствующие устойчивым решениям

Рассмотрим зависимость $P(V)$ для недиссипативных *движущихся* солитонов и солитонных комплексов, полученных в [10]; при этом нас будут интересовать, естественно, точки, где график $P(V)$ пересекает ось V , т. е. где $P(V) = 0$.

Оба солитонных решения с $\gamma = 0$ ψ_+ и ψ_- могут быть продолжены в область ненулевых скоростей V [10]. При $V \rightarrow c = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 - h^2}}$ ширина солитона ψ_- растет, его амплитуда уменьшается, и солитон переходит в тривиальное решение $\psi \equiv 0$. На соответствующей ветке, изображенной на рис. 2, импульс обращается в нуль только при $V = 0$ и $V = c$ и, следовательно, диссипативные решения не могут возникнуть из движущихся ψ_- -солитонов.

Обратимся теперь к солитону ψ_+ . При $h < 0,28$ его поведение подобно ψ_- : при $V \rightarrow c$ ширина солитона увеличивается, и он стремится к тривиальному решению. Импульс обращается в нуль только в двух точках, $V = 0$ и $V = c$; для $0 < V < c$ импульс положителен (см. рис. 2).

При $h > 0,28$ трансформации ψ_+ -солитона при изменении скорости открывают больше возможностей для бифуркаций. (См. штриховую кривую на рис. 3.) При росте V из нуля к положительным значениям импульс растет, затем ветвь поворачивает обратно к оси $V = 0$. Для некоторого значения $V < 0$ импульс достигает максимума и после спадает до нуля. Точка $V = V_1$, где $P(V_1) = 0$, представляет интерес как возможная точка бифуркации к решениям с ненулевой диссипацией (и бифуркация действительно происходит,

Продолжение твистера по V в случае $h < 0,28$ дает новую ветвь недиссипативных решений, которые имеют пересечение с осью $P = 0$ в точке $V = V_1$. На рис. 3 одно и то же обозначение V_1 использовано в случае больших и малых h . Это сделано, чтобы подчеркнуть подобие результирующих веток $\gamma(V)$ в обоих случаях (см. разд. 3).

Возвращаясь к случаю больших h , отметим, что вся штриховая кривая на рис. 3 соответствует симметричным решениям, таким, для которых $\psi(-\xi) = \overline{\psi(\xi)}$. Помимо этого существуют несимметричные решения, которые не были найдены в работе [10]. (Вещественная часть несимметричного солитона не является четной, а мнимая не является нечетной.) В частности, пара несимметричных решений возникает в результате бифуркации (типа вилки) комплекса $\psi_{(TT)}$; см. штрихпунктирную линию на рис. 3. (Два асимметричных решения связаны преобразованием $\psi(\xi) \rightarrow \overline{\psi(-\xi)}$; они, очевидно, имеют один и тот же импульс и, следовательно, представлены одной и той же кривой.) Продолжая по V асимметричную ветку, мы имеем третье пересечение с нулем в точке $V = V_3$. При продолжении в верхнюю полуплоскость ($P > 0$) несимметричное решение принимает форму комплекса солитонов ψ_- и ψ_T с межсолитонным расстоянием, увеличивающимся с ростом P . Численный анализ показывает, что ветки диссипативных движущихся решений действительно возникают в точках V_1 , V_2 и V_3 , эти решения будут описаны в следующем разделе.

3. ЧИСЛЕННОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ДИССИПАТИВНЫХ СОЛИТОНОВ

3.1. Схема движения по параметру. Опишем организацию продолжения по параметру движущихся диссипативных решений из точек бифуркации, найденных в предыдущем разделе.

Предположим, для определенности, что мы ведем продолжение по параметру γ из точек бифуркации на рис. 3. Как уже упоминалось во введении, для каждого значения γ движущееся решение существует лишь при одном, заранее неизвестном, значении скорости V . Это означает, что в уравнении (11) возникает дополнительная неизвестная величина, и, следовательно, необходимо дополнить исходное уравнение каким-либо условием. В качестве такого условия зафиксируем значение вещественной части решения в некоторой x_0 , т. е. положим

$$\operatorname{Re} \psi(x_0) = \chi. \quad (18)$$

Такой прием является стандартным при численном исследовании решений с периодическими граничными условиями. В случае бесконечного интервала, в силу трансляционной инвариантности, такой подход также вполне допустим с тем лишь ограничением, что точка x_0 должна быть выбрана в области локализации солитона.

С учетом (18) ньютоновская итерационная схема для вычисления функции ψ и скорости V при каждом заданном значении γ имеет следующий вид [18]:

$$\psi_{s+1} = \psi_s + \tau_s \phi_s, \quad (19)$$

$$V_{s+1} = V_s + \tau_s \mu_s. \quad (20)$$

Здесь s — номер итерации, τ_s ($0 < \tau_s \leq 1$) — итерационный параметр ньютоновской схемы [18], ϕ_s определяется как линейная комбинация

$$\phi_s = \phi_s^{(1)} + \mu_s \phi_s^{(2)},$$

где $\phi_s^{(1)}$ и $\phi_s^{(2)}$ — решения двух краевых задач:

$$\mathcal{N}_\psi \phi_s^{(1)} = -\mathcal{N}\psi_s, \quad \phi_s^{(1)}(\pm\infty) = 0, \quad (21)$$

и

$$\mathcal{N}_\psi \phi_s^{(2)} = -\mathcal{N}\psi_s, \quad \phi_s^{(2)}(\pm\infty) = 0. \quad (22)$$

\mathcal{N}_ψ — производная Фреше нелинейного оператора

$$\mathcal{N}\psi \equiv -iV\psi_\xi + \psi\xi\xi + 2|\psi|^2\psi - \psi - h\bar{\psi} + i\gamma\psi. \quad (23)$$

Итерационная поправка μ_s вычисляется по формуле

$$\mu_s = -\frac{\operatorname{Re} \psi_s(x_0) - \chi + \operatorname{Re} \phi_s^{(1)}(x_0)}{\operatorname{Re} \phi_s^{(2)}(x_0)}.$$

Алгебраические системы уравнений, полученные в результате перехода к конечному интервалу интегрирования и конечно-разностной аппроксимации краевых задач (21) и (22) на основе нумеровской схемы четвертого порядка точности, решаются методом прогонки [19]. Итерационный процесс прекращается, когда невязка, вычисляемая в сеточной норме, не превышает заранее заданного малого числа $\epsilon > 0$.

В настоящей работе расчеты выполнялись на интервале $(-100, 100)$ с шагом конечно-разностной аппроксимации $5 \cdot 10^{-3}$, $\epsilon = 10^{-10}$, $\tau_s \sim 1$. При этом число ньютоновских итераций, как правило, не превышало трех–пяти.

Начальное приближение для функции ψ и скорости V при каждом новом значении параметра γ строилось по схеме Эйлера с использованием решений, вычисленных на двух предыдущих шагах.

Продолжение через точки поворота осуществлялось по схеме, описанной в работе [17], при этом в качестве бифуркационной меры использовался сам параметр скорости V .

Схема продолжения по параметру V с одновременным вычислением коэффициента диссипации γ при численном продолжении из точек бифуркации на рис. 1 строится аналогичным образом. Параметры V и γ надо просто поменять местами.

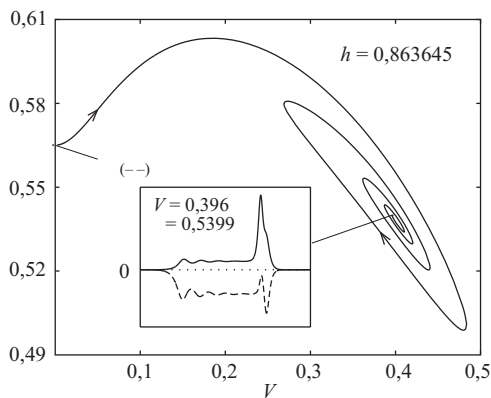
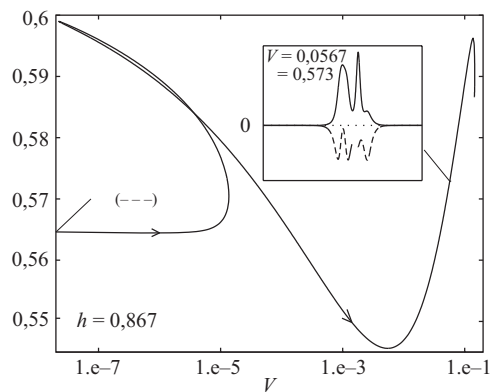
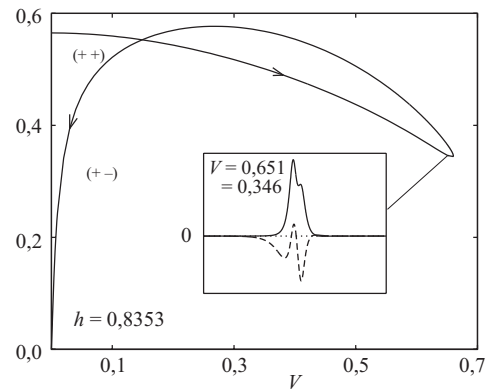
3.2. Продолжение диссипативных комплексов в область ненулевых скоростей. Точка (1) на рис. 1 соответствует стационарному комплексу $\psi_{(++)}$ и лежит немного выше точки поворота, в которой ветка $\psi_{(++)}$ поворачивает в $\psi_{(-)}$. (В точке поворота $h = 0,83504217$, тогда как $I(h) = 0$ при $h = 0,8353$.)

Кривая $\gamma(V)$, полученная в результате продолжения этого решения по скорости V , показана на рис. 4, а. Когда V становится ненулевым, решение теряет свою четную симметрию (см. вставку на рис. 4, а). После достижения максимальной скорости (равной примерно 0,65) кривая поворачивает обратно к $V = 0$, при этом γ сначала растет, а затем уменьшается до $\gamma = 0$. По мере движения вдоль кривой решение трансформируется в (сильносвязанный) комплекс $\psi_{(+-)}$. При стремлении V и γ к нулю расстояние между солитонами ψ_+ и ψ_- в комплексе стремится к бесконечности.

Заметим здесь, что если бы мы выбрали меньшее чем 0,565 значение γ на рис. 1, значение h , соответствующее точке (1) на рис. 1, также было бы меньше. (Например, выбирая $\gamma = 0,548$, мы получаем $h = 0,82$.) Для этого меньшего h в результате численного продолжения мы получаем уже не пару далеко отстоящих друг от друга солитонов ψ_+ и ψ_- , а совсем другой комплекс. (См. разд. 3.3.2. и рис. 5, в).

Следующая ветка начинается в точке, помеченной (2) на рис. 1. Здесь $h = 0,867$. Соответствующая диаграмма $\gamma(V)$ представлена на рис. 4, б. Когда мы движемся вдоль этой кривой, удаляясь от $V = 0$, исходный стационарный комплекс $\psi_{(---)}$ трансформируется в решение, представляющее собой три сильно разнесенных пика в вещественной части: один соответствует сильносвязанному комплексу $\psi_{(-+-)}$, другой — солитону ψ_+ и третий — солитону ψ_- . После точки поворота кривая приближается к оси $V = 0$ и почти касается ее. Однако, достигнув значения $V = 2,2 \cdot 10^{-8}$, она поворачивает обратно, и скорость снова начинает расти. Расстояние между солитонами уменьшается, и решение теперь может быть интерпретировано как сильно перекрывающийся четырехсолитонный комплекс $\psi_{(++++)}$ (показанный на вставке рис. 4, б). Далее, четыре составляющих комплекса солитона группируются в два «подкомплекса» $\psi_{(++)}$ и $\psi_{(+-)}$. Расстояние между «подкомплексами» быстро растет и для определенных конечных V и γ (последняя точка кривой на рис. 4, б) становится бесконечным. В этой точке мы имеем два сосуществующих комплекса, $\psi_{(++)}$ и $\psi_{(+-)}$; таким образом, эти V и γ соответствуют точке самопересечения кривой, показанной на рис. 4, а. Продолжая каждое из этих двух решений по отдельности из последней точки кривой, представленной на рис. 4, б, мы воспроизводим диаграмму рис. 4, а для чуть меньшего значения h (т. е. для $h = 0,867$).

Ветка, начинающаяся в точке (3) на рис. 1, для которой $h = 0,863645$, ведет к наименее ожидаемому решению. Возникающая в результате продолжения из этой точки кривая $\gamma(V)$ показана на рис. 4, в. Для точек, лежащих



^a Рис. 4. Бифуркационные кривые, ответвляющиеся в точках, помеченных на рис.1. Кривые иллюстрируют соотношение между значением диссипации γ и скоростью V , с которой солитон может двигаться при данном γ . Каждая кривая начинается в точке $\gamma = 0,565$ на вертикальной оси. Вставки показывают, как выглядит решение в определенных точках каждой ветви. (Сплошная линия — вещественная часть решения; штрихи — мнимая часть.) Отметим, что в (б) используется логарифмическая шкала по V

^б

на «спиральной» части кривой, $\psi(x)$ близка постоянной на относительно протяженном (но конечном) участке и нулю — за пределами этого участка.

(См. вставку на рис. 4, в). Эта постоянная есть $\psi^{(0)} = (A_-/\sqrt{2})e^{-i\theta_-}$; она соответствует стационарному пространственно-однородному решению уравнения (3). (Это «плоское» решение неустойчиво относительно возмущений непрерывного спектра.) Хвостовая часть солитона представляет собой кинк, соединяющий $\psi^{(0)}$ с нулевой асимптотикой. В передней части солитона соединение имеет характер сильноамплитудного возбуждения с формой, напоминающей комплекс $\psi_{(+)}$. По мере того, как точка $\gamma(V)$ приближается к фокусу спирали на рис. 4, в, длина участка с $\psi(x) = \psi^{(0)}$ возрастает.

3.3. Продолжение движущихся солитонов в область ненулевой диссипации.

3.3.1. Малая амплитуда накачки. Для малых h ($h < 0,28$) численное продолжение начинается с солитона-твистера, движущегося со скоростью V_1 (точка пересечения сплошной кривой с горизонтальной осью на рис. 3). Вещественная часть этого решения четная, а мнимая — нечетная: $\psi(-x) = \overline{\psi(x)}$. При продолжении в область $\gamma \neq 0$ симметрия нарушается; типичный профиль во внутренних точках ветви выглядит как несимметричный комплекс ψ_- и ψ_+ и изображен на вставке к рис. 5, а. Основная часть рис. 5, а демонстрирует зависимость $\gamma(V)$. С ростом γ отрицательная скорость движущейся волны уменьшается по модулю. Однако диссипация не может превысить определенного максимального значения; при достижении его кривая $\gamma(V)$ поворачивает вниз (см. рис. 5, а). При стремлении V и γ к нулю расстояние между солитонами ψ_- и ψ_+ в комплексе растет до бесконечности.

3.3.2. Большая амплитуда накачки. При $h > 0,28$ мы имеем три исходных точки с $P = 0$; они соответствуют двум пересечениям штриховой кривой и одному пересечению штрихпунктирной кривой с горизонтальной осью на рис. 3.

Кривая $\gamma(V)$, возникающая в точке V_1 , представлена на рис. 5, б. Для $V = V_1$ и $\gamma = 0$ соответствующее решение симметрично, и его форма напоминает два сильно перекрывающихся твистера. При $\gamma \neq 0$ симметрия нарушается, и решение выглядит как несимметричный комплекс двух солитонов.

При $V, \gamma \rightarrow 0$ расстояние между солитонами ψ_- и ψ_+ , составляющими комплекс, увеличивается, и в конце концов они «разбегаются» на бесконечное расстояние.

Вторая недиссипативная волна с нулевым импульсом (точка V_2 на бифуркационной диаграмме рис. 3) соответствует симметричному $[\psi(-x) = \overline{\psi(x)}]$ комплексу из двух ψ_- -солитонов и одного твистера, обозначенному $\psi_{(-T-)}$. При движении по γ и V симметрия нарушается, но решение по-прежнему выглядит как комплекс трех солитонов (см. вставку на рис. 5, б). Нижняя (петлеобразная) кривая на рис. 5, б иллюстрирует соответствующую зависимость $\gamma(V)$. В отличие от ветви, возникающей в $V = V_1$, это решение не может быть продолжено к нулевой скорости. Вместо этого кривая $\gamma(V)$ по-

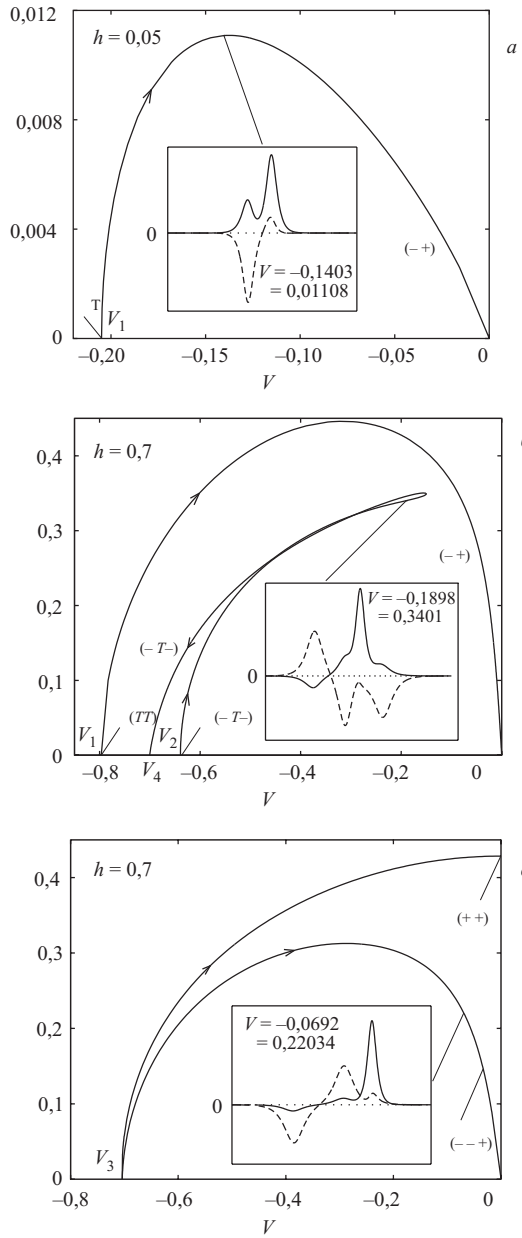


Рис. 5. Результаты численного продолжения недиссипативных движущихся солитонов в область $\gamma \neq 0$. (a) — малое h ; (б),(е) — большое h . Вставки иллюстрируют решение на одной из внутренних точек кривой. (Сплошная линия — вещественная часть; штриховая — мнимая часть.) Каждая кривая, показанная здесь, имеет свой аналог для положительных значений скорости, который получается с помощью зеркального отражения ($V \rightarrow -V$) диаграммы

ворачивает обратно, и при стремлении γ к нулю V стремится к некоторому отрицательному числу V_4 (с $|V_4| > |V_2|$). Для достаточно малых γ соот-

ветствующее решение выглядит как комплекс двух ψ_- -солитонов и твистера между ними с межсолитонным расстоянием, растущим к бесконечности при $\gamma \rightarrow 0$, $V \rightarrow V_4$.

Наконец, точка V_3 на диаграмме рис. 3 представляет *два* неэквивалентных несимметричных решения с нулевым импульсом, $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\xi)$, где $\psi_2(\xi) \equiv \overline{\psi_1(-\xi)}$. Соответственно, существуют *две* отдельные ветки $\gamma(V)$, выходящие из этой точки (см. рис. 5, *б*). Одна из них соответствует комплексу двух солитонов, при движении вдоль этой ветки к $V = 0$ мы получаем симметричный комплекс $\psi_{(++)}$ с ненулевым γ . (См. верхнюю кривую на рис. 5, *б*). При продолжении другого несимметричного комплекса к $V = 0$ соответствующее значение γ достигает максимума в точке $V \sim 0,3$ и затем стремится к нулю. (Нижняя кривая на рис. 5, *б*). Для достаточно малых V и γ это решение представляет собой комплекс $\psi_{(--+)}$ (показанный на вставке к рис. 5, *б*). При $V, \gamma \rightarrow 0$ межсолитонное расстояние в комплексе стремится к бесконечности.

3.4. Устойчивость движущихся диссипативных солитонов. Анализ устойчивости обсуждавшихся выше решений проводился с помощью численного решения задачи на собственные значения (7) для линеаризованного оператора (8).

Путем разложения собственных функций оператора (8) в ряд Фурье:

$$\delta u(x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} u^m \exp(-i\omega_m x), \quad \delta v(x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} v^m \exp(-i\omega_m x) \quad (24)$$

(где $\omega_m = \frac{2\pi m}{L}$) — и подстановки разложений (24) в (7) задача на собственные значения для дифференциального оператора сводится к задаче на собственные значения для заполненной матрицы. Последние вычисляются с помощью стандартной программы из пакета EISPACK. В большинстве случаев расчеты выполнялись при $N = 500$ и $L = 50$.

Как для случая $\gamma \neq 0$, $V = 0$ (рис. 1), так и для случая $\gamma = 0$, $V \neq 0$ (рис. 2, 3) в определенных диапазонах параметров существуют устойчивые локализованные решения. При $h > 0,9435$ устойчивым является двухсолитонный комплекс $\psi_{(++)}$ (выделенная жирным часть кривой на рис. 1). На рис. 2 сплошными линиями нанесены участки скоростей, с которыми одиночные солитоны решения могут устойчиво двигаться при $\gamma = 0$. На рис. 3 выделен жирным небольшой участок кривой, соответствующей случаю $h = 0,05$. В этом узком диапазоне скоростей оба солитона, ψ_T и $\psi_{(++)}$, могут устойчиво двигаться с одной и той же ненулевой скоростью.

Численный анализ задачи (7) для случая $\gamma \neq 0$, $V \neq 0$ (см. рис. 4, 5) выявил в спектре линеаризованного оператора наличие собственных значений с положительной вещественной частью. Это означает, что все найденные движущиеся диссипативные солитоны неустойчивы.

Отметим, что движущиеся солитоны (как устойчивые, так и неустойчивые) могут играть существенную роль в различных физических ситуациях, моделируемых нелинейным уравнением Шредингера с диссипацией и накачкой. Устойчивые движущиеся волны являются аттракторами, конкурирующими с неподвижными солитонами; неустойчивые волны могут возникать как долгоживущие промежуточные состояния в переходных процессах и пространственно-временных хаотических режимах.

Еще одна причина, по которой не следует пренебрегать неустойчивыми решениями, — их возможная стабилизация в рамках уравнения Гинзбурга–Ландау (с прямой или параметрической накачкой), для которого нелинейное уравнение Шредингера с диссипацией и накачкой является частным случаем [20]. Как известно, диффузия и нелинейная диссипация (члены $ic_1\Psi_{xx}$ и $-ic_2|\Psi|^{2n}\Psi$), будучи добавлены в правую часть (2), оказывают стабилизирующее воздействие на импульсы Гинзбурга–Ландау. Следовательно, неустойчивые солитоны нелинейного уравнения Шредингера могут оказаться устойчивыми, если их продолжить в область $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$. Устойчивые импульсы были, в частности, получены [21–23] как результат баланса целого ряда членов, включая дисперсию, консервативную нелинейность третьей и пятой степени, диффузию и диссипацию первого, третьего и пятого порядка. Подобным же образом, добавляя диффузионные и нелинейные диссипативные поправки в правую часть нелинейного уравнения Шредингера, можно пытаться уравновесить движение диссипативных комплексов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описана схема численного продолжения по параметру с одновременным вычислением другого, неизвестного параметра в задаче о движущихся солитонных решениях нелинейного уравнения Шредингера с диссипацией и параметрической накачкой. Представлены численные результаты, полученные с помощью этой схемы.

Показано, что при наличии параметрической накачки два и более диссипативных солитона могут образовать комплекс, движущийся с нулевым импульсом, но с ненулевой постоянной скоростью. Таким образом, тот хорошо известный факт, что линейный диссипативный член в уравнении Шредингера приводит к экспоненциальному затуханию импульса движущегося солитона (даже в том случае, когда осуществляется однородная по пространству подкачка энергии), еще не запрещает существование движущихся солитонов.

Как уже отмечалось, на этом этапе обнаружены лишь неустойчивые движущиеся комплексы. Таким образом, хотя параметрическая накачка и способна обеспечить равномерное движение диссипативного солитона, для *стабилизации* этого движения требуется присутствие дополнительных членов в исходном уравнении.

Авторы благодарны Е. П. Жидкову за внимание к работе и полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 03-01-00657), Национального научного фонда ЮАР (грант 2053723) и Комиссии научных сообществ Кейптаунского университета.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Miles J. W.* // *J. Fluid Mech.* 1984. V. 148. P. 451.
2. *Elphick C. and Meron E.* // *Phys. Rev. A.* 1989. V. 40. P. 3226.
3. *Chen X. N. and Wei R. J.* // *J. Fluid Mech.* 1994. V. 259. P. 291;
Zhang W. and Viñals J. // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 74. P. 690 ;
Wang W. et al. // *Phys. Lett. A.* 1996. V. 219. P. 74;
Wang X. and Wei R. // *Phys. Rev. Lett.* 1997. V. 78. P. 2744; *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57. P. 2405;
Il'ichev A. // *Physica D.* 1998. V. 119. P. 327;
Miao G. and Wei R. // *Phys. Rev. E.* 1999. V. 59. P. 4075;
Astruc D. and Fauve S. Parametrically Amplified 2-Dimensional Solitary Waves // *Proc. of the IUTAM Symp. on Free Surface Flows, Birmingham, UK, July 10–14 2000 / Eds. King A. C. and Shikhmurzaev Y. D. Fluid Mechanics and Its Applications. Kluwer, 2001. V. 62.*
4. *Deutsch I. H. and Abram I. J.* // *Opt. Soc. Am. B.* 1994. V. 11. P. 2303;
Mecozzi A. et al. // *Opt. Lett.* 1994. V. 19. P. 2050;
Longhi S. // *Opt. Lett.* 1995. V. 20. P. 695; *Phys. Rev. E.* 1997. V. 55. P. 1060;
Sánchez-Morcillo V. J. et al. // *Opt. Lett.* 2000. V. 25. P. 957.
5. *Barashenkov I. V., Bogdan M. M., and Korobov V. I.* // *Europhys. Lett.* 1991. V. 15. P. 113.
6. *Denardo B. et al.* // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68. P. 1731;
Chen W.-Z. // *Phys. Rev. B.* 1994. V. 49. P. 15063;
Huang G., Lou S.-Y., and Velarde M. // *Int. J. of Bifurcation and Chaos.* 1996. V. 6. P. 1775;
Alexeeva N. V., Barashenkov I. V., and Tsironis G. P. // *Phys. Rev. Lett.* 2000. V. 84. P. 3053;
Chen W., Hu B., Zhang H. // *Phys. Rev. B.* 2002. V. 65. P. 134302.
7. *Malomed B. A.* // *Phys. Rev. A.* 1991. V. 44. P. 6954;
Cai D. et al. // *Phys. Rev. E.* 1994. V. 49. P. 1677.
8. *Barashenkov I. V., Smirnov Yu. S., and Alexeeva N. V.* // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 57. P. 2350;
Kollmann M., Capel H. W., and Bountis T. // *Phys. Rev. E.* 1999. V. 60. P. 1195.
9. *Barashenkov I. V. and Zemlyanaya E. V.* // *Phys. Rev. Lett.* 1999. V. 83. P. 2568.
10. *Barashenkov I. V., Zemlyanaya E. V., and Bär M.* // *Phys. Rev. E.* 2001. V. 64. P. 016603.
11. *Kaup D. J. and Newell A. C.* // *Phys. Rev. B.* 1978. V. 18. P. 5162.
12. *Elphick C. and Meron E.* // *Phys. Rev. Lett.* 1990. V. 65. P. 2476.

13. *Kaup D. J. and Newell A. C.* // Proc. R. Soc. Lond. A. 1978. V. 361. P. 413.
14. *Kivshar Yu. S. and Malomed B. A.* // Rev. Mod. Phys. 1989. V. 61. P. 763.
15. *Shchesnovich V. S. and Barashenkov I. V.* // Physica D. 2002. V. 164. P. 83.
16. *Barashenkov I. V., Zemlyanaya E. V.* JINR Preprint E17-2003-53. Dubna, 2003; SIAM J. Appl. Math. 2004. V. 64, No 3. P. 800.
17. *Земляная Е. В., Баращенко И. В.* Препринт ОИЯИ Р11-2003-223. Дубна, 2003; Матем. моделирование (в печати).
18. *Пузынин И. В. и др.* // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 1. С. 210.
19. *Земляная Е. В., Пузынин И. В., Пузынина Т. П.* Сообщение ОИЯИ Р11-97-414. Дубна, 1997.
20. *Coullet P. et al.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 63. P. 1352;
Coullet P., Lega J., and Pomeau Y. // Europhys. Lett. 1991. V. 15. P. 221;
Coullet P. and Emilsson K. // Physica D. 1992. V. 61. P. 119;
Malomed B. A. and Nepomnyashchy A. A. // Europhys. Lett. 1994. V. 27. P. 649;
Elphick C. et al. // Phys. Lett. A. 1997. V. 230. P. 33;
Longhi S. // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 1060;
Skryabin D. V. et al. // Phys. Rev. E. 2001. V. 64. P. 056618;
Utzny C., Zimmermann W., and Bär M. // Europhys. Lett. 2002. V. 57. P. 113;
de Valcárcel G. J., Pérez-Arjona I., and Roldán E. // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 164101.
21. *Thual O. and Fauve S.* // J. Phys. (Paris). 1988. V. 49. P. 1829;
Fauve S. and Thual O. // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 282.
22. *Afanasjev V. V., Akhmediev N., and Soto-Crespo J. M.* // Phys. Rev. E. 1996. V. 53. P. 1931.
23. *Akhmediev N. and Ankiewicz A.* Solitons of the Complex Ginzburg-Landau Equation. // S. Trillo, W. Torruellas (Eds.). Spatial Solitons. Springer Series in Optical Sciences. 2001. V. 82.

Получено 19 февраля 2004 г.