

P11-2004-120

П. П. Физиев^{a,1}, Т. Л. Бояджиев², Д. А. Георгиева^{a,3}

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ
РЕШЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ В ГРАВИТАЦИОННОМ
ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

^aСофийский университет

¹E-mail: fiziev@phys.uni-sofia.bg

²E-mail: todorlb@jinr.ru

³E-mail: daniag@phys.uni-sofia.bg

Физиев П. П., Бояджиев Т. Л., Георгиева Д. А.
Численное исследование некоторых решений
релятивистского уравнения для скалярных частиц
в гравитационном поле точечного источника

P11-2004-120

Впервые проведено численное исследование некоторых решений релятивистского уравнения для скалярных частиц в гравитационном поле массивного точечного источника. Изучены основное и последующие состояния и соответствующие собственные значения дискретного спектра при разных значениях момента скалярных частиц. Существенная новая черта полученных решений — зависимость их физических характеристик от гравитационного дефекта массы точечного источника гравитационного поля.

Для численного исследования возникающей задачи Штурма–Лиувилля используется алгоритм, основанный на непрерывном аналоге метода Ньютона. На каждой итерации соответствующие линейные краевые задачи решаются методом сплайн-коллокации.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2004

Перевод авторов

Fiziev P. P., Boyadjiev T. L., Georgieva D. A.
Numerical Investigation on Some Solutions
of the Relativistic Equation for Scalar Particles
in Gravitational Field of a Point Source

P11-2004-120

In this paper a numerical investigation on some solutions of the relativistic equation for scalar particles in the gravitational field of a massive point source is performed. The discrete spectrum for different values of the orbital momentum is studied. An essential new feature of the obtained solutions is their dependence on the point source's gravitational mass defect.

The Continuous Analog of the Newton Method is used to solve the originated Sturm–Liouville problem. The corresponding linear boundary value problems are solved numerically by means of a spline-collocation scheme of high order.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2004

1. ВВЕДЕНИЕ

Правильные аналитические решения уравнений Эйнштейна для гравитационного поля точечной частицы голой механической массы M_0 были найдены недавно [1]. Оказалось, что эти решения описываются при помощи обобщенных функций и имеют необходимые для удовлетворения уравнений Эйнштейна скачки в производных метрики в месте нахождения массивного точечного источника гравитационного поля. Новые решения представляют собой двухпараметрическое семейство метрик на сингулярных многообразиях $\mathbb{M}^{(1,3)}\{g_{\mu\nu}\}$. Они определяются, кроме голой массы M_0 , также и кеплеровской массой M , или, что, конечно, эквивалентно, массой Кеплера M , и отношением масс

$$\varrho = \frac{M}{M_0} \in (0, 1), \quad (1.1)$$

которое задаёт гравитационный дефект масс точечного источника гравитационного поля и вместе с M является непосредственно измеряемой физической величиной.

Математические и физические свойства этих новых решений уравнений Эйнштейна существенным образом отличаются от свойств ранее известных сферически-симметричных статических решений этих же уравнений с разными типами математических сингулярностей в точке, которая является центром симметрии и окружена вакуумом. Причина этого — разные граничные условия, которым удовлетворяют новые и традиционные решения. Последние иногда ошибочно принимались за решения, описывающие гравитационное поле точечного материального источника в ОТО. По-видимому, новые решения потребуют пересмотра некоторых общепринятых физических результатов и их интерпретации.

В настоящей работе мы начинаем исследование релятивистских волновых уравнений в гравитационном поле массивного точечного источника в рамках ОТО. Здесь мы ограничимся начальным численным изучением решений простейшего релятивистского уравнения Клейна–Гордона, которое описывает, как хорошо известно [2], (анти)частицы со спином ноль. Предшествующие результаты изучения решений этого уравнения в поле Шварцшильда содержатся, например, в недавно появившемся обзоре [3] и в обширной литературе, указанной в нем. Наиболее часто применяется радиальная калибровка Гильберта. Информацию о многочисленных известных других калибровках для этой задачи можно найти в работе [1].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Используя естественную радиальную переменную $r \in (0, \infty)$ [1], можно представить новые регулярные решения уравнений для гравитационного поля вне массивного точечного источника в виде

$$ds^2 = e^{2\varphi_G} \left[dt^2 - \frac{dr^2}{N_G^4(r)} \right] - \rho(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (2.1)$$

Здесь через

$$\varphi_G(r; M, M_0) := -\frac{G_N M}{r + G_N M / \ln(M_0/M)} \quad (2.2)$$

обозначен модифицированный потенциал Ньютона, а коэффициент

$$N_G(r) = (2\varphi_G)^{-1} (e^{2\varphi_G} - 1) .$$

Гильбертовская координата яркости определяется выражением

$$\rho(r) = \frac{2G_N M}{1 - e^{2\varphi_G}} = \frac{r + G_N M / \ln(M_0/M)}{N_G(r)} , \quad (2.3)$$

где G_N есть гравитационная константа Ньютона.

Вне источника в калибровке Гильберта решение принимает обычную форму с метрическими коэффициентами

$$g_{tt}(\rho) = 1 - \frac{\rho_G}{\rho} , \quad g_{\rho\rho}(\rho) = -\frac{1}{g_{tt}(\rho)} , \quad (2.4)$$

где $\rho_G = 2G_N M$ есть радиус Шварцшильда. Однако наличие массивного точечного источника ультимативно требует рассматривать эту форму записи решения только на физическом интервале переменной яркости $\rho \in (\rho_0, \infty)$, где величина

$$\rho_0 = \frac{2G_N M}{1 - \varrho^2} \geq \rho_G . \quad (2.5)$$

Физическое и математическое обоснование этой новой процедуры «обрезания» *физического* интервала переменной яркости ρ , на котором с необходимостью нужно ограничить применение широко распространенной и восходящей к Гильберту и Дросте записи решения в форме (2.4), можно найти в работах [1]. Здесь добавим, что такое необычное обрезание вытекает однозначно из существования материального точечного источника гравитационного поля. Оно приводит к физическому запрету иметь бесконечную

яркость для точечных источников, что очевидным образом соответствует реальным наблюдениям и оставалось без теоретического обоснования до сих пор. В этом плане работы [1] показали, что в ОТО имеется естественный механизм обрезания классических расходимостей за счет изменения геометрии пространства-времени, обусловленного бесконечной плотностью массы точечного источника. Все явления, связанные с так называемым горизонтом событий, вместе с ним остаются вне физической области, определяемой точечным источником гравитационного поля. Согласно меткому замечанию Дирака [4] их следует исключить из любой физической теории.

Переменная яркости ρ является выделенной переменной в том плане, что результаты, выраженные через ρ , локально инвариантны относительно изменений радиальной калибровки. Однако с точки зрения как вычислительной, так и физической более удобной для применения является связанная с ρ простым образом переменная $g = g_{tt} = 1 - \rho_G/\rho$. Тогда

$$ds^2 = g dt^2 - \rho_G^2 \left[\frac{dg^2}{g(1-g)^4} + \frac{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2}{(1-g)^2} \right]. \quad (2.6)$$

В этих переменных $4D$ -оператор Даламбера в псевдоримановом пространстве-времени $\mathbb{M}^{(1,3)}\{g_{\mu\nu}\}$ массивного точечного источника принимает вид

$$\square = g^{-1} \partial_t^2 - \rho_G^{-2} \left((1-g)^4 \partial_g (g \partial_g) + (1-g)^2 \Delta_{\theta\phi} \right), \quad (2.7)$$

где $\Delta_{\theta\phi} = \sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \sin^{-2} \theta \partial_\phi^2$.

Уравнение Клейна–Гордона для массивных релятивистских частиц массы m в кривом пространстве-времени имеет стандартный вид

$$\square \Phi + m^2 \Phi = 0. \quad (2.8)$$

В результате сферической симметрии псевдориманово многообразии $\mathbb{M}^{(1,3)}\{g_{\mu\nu}\}$, порожденное массивной точечной частицей, имеет группу движений $SO(3)$, а нетривиальными являются величины и уравнения на фактор-пространстве $\mathbb{M}^{(1,1)} = \mathbb{M}^{(1,3)}/SO(3)$, на котором имеются естественные координаты t и g . Редукция уравнения (2.8) на фактор-пространство $\mathbb{M}^{(1,1)}$ проводится при помощи подстановки

$$\Phi(t, g, \theta, \phi) = \Phi_l(t, g) Y_{l, l_z}(\theta, \phi),$$

где $Y_{l, l_z}(\theta, \phi)$ являются стандартными сферическими функциями:

$$\Delta_{\theta\phi} Y_{l, l_z}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{l, l_z}(\theta, \phi),$$

а $l = 0, 1, 2, \dots$; $l_z = -l, \dots, 0, \dots, l$.

Для радиальной нестационарной волновой функции $\Phi_l(t, g)$ на $\mathbb{M}^{(1,1)}$ мы имеем уравнение в частных производных

$$g^{-1} \partial_t^2 \Phi_l - \rho_G^{-2} \left\{ (1-g)^4 \partial_g (g \partial_g \Phi_l) + [l(l+1)(1-g)^2 + m^2] \Phi_l \right\} = 0. \quad (2.9)$$

Пространство-время рассматриваемой задачи $\mathbb{M}^{(1,3)}\{g_{\mu\nu}\}$ имеет также трансляционную симметрию относительно глобальной временной переменной t . Эта симметрия многообразия $\mathbb{M}^{(1,3)}\{g_{\mu\nu}\}$ связана с группой движений $T_t(1)$: $t \rightarrow t + \text{const}$ и позволяет провести полную редукцию задачи к одномерной при помощи подстановки $\Phi_l(t, g) = e^{-iEt} R_l(g)$. Для стационарной радиальной функции $R_l(g)$ на фактор-пространстве $\mathbb{M}^{(1)} = \mathbb{M}^{(1,1)}/T(1)$ мы приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 R_l}{dg^2} + \frac{1}{g} \frac{dR_l}{dg} + \left[\frac{\varepsilon^2}{g^2(1-g)^4} - \frac{\mu^2}{g(1-g)^4} - \frac{l(l+1)}{g(1-g)^2} \right] R_l = 0. \quad (2.10)$$

Здесь $\varepsilon = \rho_G E$ и $\mu = \rho_G m$ являются соответственно безразмерными параметрами полной энергии и массы бесспиновых частиц. Мы используем единицы, в которых скорость света и постоянная Планка равны: $c = \hbar = 1$. Безразмерный момент количества движения в наших единицах определяется как $l = L/m\rho_G$, где L есть соответствующий размерный момент количества движения.

Движение пробных бесспиновых частиц с заданным моментом количества движения l в гравитационном поле точечного источника можно рассматривать как релятивистское движение в (безразмерном) потенциале

$$v_l(g) = g \left[\mu^2 + l^2 (1-g)^2 \right], \quad (2.11)$$

$g \in (0, 1)$, типичный вид которого показан на рис. 1. Точка $g = 0$ соответствует горизонту событий и находится вне физически допустимой области $g \in [g_0, 1)$, где $g_0 = \varrho^2 > 0$, а предельный переход $g \rightarrow 1$ соответствует физической бесконечности (по переменным r или ρ), где пространство-время $\mathbb{M}^{(1,3)}\{g_{\mu\nu}\}$ асимптотически-плоское.

Запись (2.10) в виде

$$(1-g)^4 \left(g \frac{d}{dg} \right)^2 R_l + [\varepsilon^2 - v_l(g)] R_l = 0$$

показывает, что точки $g = 0$ и $g = 1$ являются особыми для этого уравнения, причём вторая является нерегулярной особой точкой.

При помощи подстановок

$$u = \ln \left(\frac{g}{1-g} \right) + \frac{1}{1-g}, \quad (2.12)$$

$$R_l(g) = (1-g) P_l(g)$$

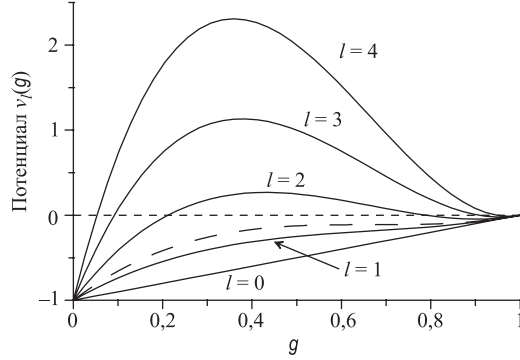


Рис. 1. Потенциал $v_l(g)$ при $l = 0, 1, 2, 3, 4$ и $\mu = 1$. Пунктирная линия соответствует (нецелому) критическому значению l , выше которого функция $v_l(g)$ имеет максимум

мы вводим «переменную черепахи» $u \in [u_0, \infty)$, $u_0 \equiv u(g_0)$, и соответствующую функцию $P_l(u)$. В указанных переменных (2.10) приобретает стандартный вид уравнения Штурма–Лиувилля

$$\frac{d^2 P_l}{du^2} + [\lambda - w_l(u)] P_l = 0, \quad (2.13)$$

где положено $\lambda \equiv \varepsilon^2$.

Чтобы найти связанные состояния, уравнение (2.13) следует решать при граничных условиях

$$P_l(u_0) = 0, \quad P_l(\infty) = 0 \quad (2.14)$$

вместе с обычным L_2 -условием нормировки

$$\int_{u_0}^{\infty} P_l^2(u) du - 1 = 0. \quad (2.15)$$

Второе условие в (2.14) следует понимать в смысле предельного перехода. Величина

$$w_l(g) = g [\mu^2 + l(l+1)(1-g)^2 + (1-g)^3] = v_l(g) + g(1-g)^3 \quad (2.16)$$

является продленным безразмерным потенциалом и зависит неявным образом от переменной u через решение (2.12) задачи Коши

$$\frac{dg}{du} = g(1-g)^2, \quad g(u_0) = g^2. \quad (2.17)$$

Существенная новая черта нашей постановки задачи, которая связана с корректным определением физической области переменных, есть ограничение рассмотрения потенциалов v_l и w_l на интервале $[u_0, \infty)$. Это исключает из рассмотрения очевидно нефизическую бесконечно глубокую потенциальную яму при $\rho < \rho_0$, а также и горизонт событий при $\rho \rightarrow \rho_G$ (что эквивалентно $u_G \rightarrow -\infty$), присутствующие в стандартном подходе.

Из-за граничных условий (2.14) энергетические уровни связанных состояний квантуются: $\varepsilon = \varepsilon_{nl}$, где главное квантовое число $n = 0, 1, \dots$ определяет число нулей радиальной волновой функции $P_{nl}(u)$ на интервале $u \in [u_0, \infty)$ и, соответственно, функции $R_{nl}(g) = (1-g)P_{nl}(g)$ на интервале $g \in [g_0, 1)$.

3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

В дальнейшем будем полагать, что зависимость $Q_l(u)$ известна на некоторой заданной сетке $u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n = u_\infty < \infty$. Также для упрощения записи будем опускать индексы n и l .

Для численного решения задачи используем алгоритм, основанный на непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН) (см. обзоры [5, 6]) и впервые обоснованный в работе [7].

Обозначим через y пару $(P(u), \lambda)$. В соответствии с НАМН параметризуем вектор y непрерывным параметром $t \in [0, \infty)$, т.е. положим $y(t) = (P(u, t), \lambda(t))$. Предположим, что $y(0) = y_0 \equiv (P_0(u), \lambda_0)$ и $y(t) \rightarrow y^*$ при $t \rightarrow \infty$, где y_0 — начальное приближение к точному решению $y^* \equiv (P^*(u), \lambda^*)$, существование которого предполагается. Положим $\dot{y} \equiv (\dot{P}, \dot{\lambda}) = (\Psi, \Lambda)$, где точкой сверху обозначим дифференцирование по переменной t . Применяя НАМН к (2.13)–(2.15), для величин $\Psi(u)$ и Λ получаем систему

$$\Psi'' + [Q(u) - \lambda] \Psi - \Lambda P = P'' - [Q(u) - \lambda] P, \quad (3.1a)$$

$$\Psi(u_0) = -P(u_0), \quad \Psi(\infty) = -P(\infty), \quad (3.1b)$$

$$2 \int_{u_0}^{\infty} P \Psi \, du = 1 - \int_{u_0}^{\infty} P^2 \, du. \quad (3.2)$$

Будем искать решение задачи (3.1) в виде

$$\Psi(u) = -P(u) + \Lambda v(u),$$

где $v(u)$ есть новая неизвестная функция. Подставляя разложение для $\Psi(u)$ в (3.1), получаем, что $v(u)$ есть решение краевой задачи

$$v'' + [Q_l(u) - \lambda] v = P(u), \quad (3.3a)$$

$$v(u_0) = 0, \quad v(\infty) = 0. \quad (3.3b)$$

Пусть решение $v(u)$ задачи (3.3) вычислено. Тогда производная Λ выражается из равенства (3.2):

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left(\int_{u_0}^{\infty} vP \, du \right)^{-1} \left(1 + \int_{u_0}^{\infty} P^2 \, du \right). \quad (3.4)$$

При численной реализации алгоритма полубесконечный интервал $[u_0, \infty)$ заменяется конечным интервалом $[u_0, u_\infty]$, где u_∞ — актуальная бесконечность. Влияние «хвоста» $u > u_\infty$ на полученные результаты исследуется ниже численным путем при помощи метода установления.

Для численного нахождения гладких решений краевой задачи (3.3) в настоящей работе используется сплайн-коллокационная схема, описанная в работе [8].

Обозначим через $v_i \equiv v(u_i)$ и $m_i \equiv v'(u_i)$ значения функции $v(u)$ и её производной $v'(u)$ в точках сетки u_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $v_0 = v(u_0)$, $v_n = v(u_\infty)$. На каждом подынтервале $[u_i, u_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$, приближенное решение уравнения (3.3) отыскивается в виде кубического эрмитового сплайна [9]

$$S(u) = \varphi(x) v_i + \chi(x) h_i m_i + \bar{\varphi}(x) v_{i+1} + \bar{\chi}(x) h_i m_{i+1}, \quad (3.5)$$

где $h_i = u_{i+1} - u_i$ есть длина i -го интервала, а $x = (u - u_i)/h_i$, $x \in [0, 1]$ — локальная переменная. Базисные функции $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ удовлетворяют условиям $\varphi(0) = 0$, $\chi'(0) = 1$, а остальные значения функций и их производных в узлах каждого подынтервала равны нулю. Явные выражения для $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ имеют вид

$$\varphi(x) = (1 + 2x)(1 - x)^2, \quad \chi(x) = x(1 - x)^2,$$

причем $\bar{\varphi}(x) = \varphi(1 - x)$ и $\bar{\chi}(x) = -\chi(1 - x)$.

Введем невязку для приближенного решения (3.5) в точке u подынтервала i :

$$\delta_i(u) \equiv S'' + [Q(u) - \lambda] S - P(u). \quad (3.6)$$

Для вычисления неизвестных коэффициентов v_i и m_i применим метод коллокации. Узлы коллокации выберем в точках $u_{ij} = u_i + x_j h_i$, $j = 1, 2$, где x_j — гауссовские узлы на интервале $[0, 1]$, а $h_i = u_{i+1} - u_i$. Тогда величины v_i и m_i определяются из условий коллокации

$$\delta_i(u_{ij}) = 0. \quad (3.7)$$

Предполагая непрерывность искомой функции и её производной в узлах сетки, имеем $2n$ условий (3.7) для $2n + 2$ неизвестных. Соответствующая

алгебраическая система линейных уравнений имеет блочно-диагональную матрицу и замыкается добавлением двух граничных условий вида (3.3b).

Если y_0 — заданное начальное приближение к точному решению, то на каждой итерации $k = 0, 1, 2, \dots$ очередное приближение (P_{k+1}, λ_{k+1}) к точному решению находим по формулам

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \tau_k \Lambda_k, \quad P_{k+1} = (1 - \tau_k) P_k + \tau_k v_k \Lambda_k.$$

Здесь $\tau_k \in (0, 1]$ — параметр итерации, выбором которого можно управлять скоростью итерационного процесса [6, 10].

В таблице представлены результаты численного исследования сходимости минимального собственного значения λ_{\min} при увеличении длины интервала интегрирования $L = u_\infty - u_0$. Вычисления проводились для случая $l = 2$ и $\varrho = 0,0103$ на равномерной сетке с фиксированным шагом 0,0625. Хорошо прослеживается установление значений функции $\lambda_{\min}(L)$ при возрастании величины L .

Зависимость $\lambda_{\min}(L = u_\infty - u_0)$

L	λ_{\min}
58	0,968333614658856
68	0,968353073121421
78	0,968354676439861
88	0,968354788358685
98	0,968354795278794
108	0,968354795668769

4. ОСНОВНЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Итогом проведения численных исследований явился полученный нами ряд новых и в некоторой степени неожиданных результатов для связанных квантовых состояний задачи.

Конкретный вид волновой функции $P_{n,l}(u)$ при $n = 0$ и разных значениях l демонстрируется на рис. 2. Как и следовало ожидать, волновые функции $P_{n,l}(u)$, соответствующие минимальному собственному значению дискретного спектра задачи Штурма–Лиувилля (2.13)–(2.15), не имеют нулей на интервале (u_0, ∞) и, следовательно, имеют в некоторой точке этого интервала максимум. Значение и локализация этого максимума существенно зависят от гравитационного дефекта масс, определяемого их отношением ϱ .

Более наглядно эти утверждения демонстрируются на рис. 3, где на примере радиальной функции $P_{0,2}(u; \varrho)$ показана типичная зависимость волновых



Рис. 2. Радиальная волновая функция $P_{0l}(u)$ для разных значений квантового числа $l = 2, 3, \dots, 8$

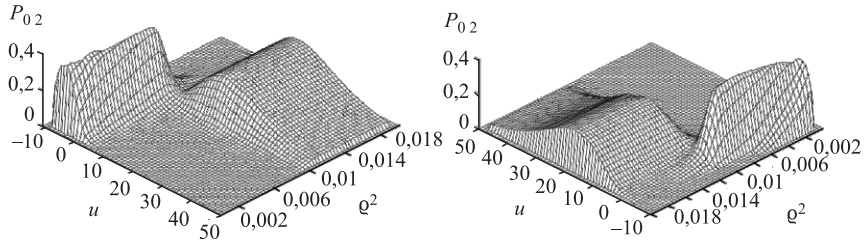


Рис. 3. Радиальная волновая функция $P_{02}(u; \varrho)$ для разных значений переменных u и ϱ^2

функций одновременно от переменной u и от параметра ϱ , определяемого по формуле (1.1).

Радиальные функции $P_{02}(u; \varrho)$ при разных значениях гравитационного дефекта массы, задаваемого отношением масс ϱ , показаны на рис. 4. Видно, что в зависимости от значения ϱ для гравитационного поля источника волновая функция пробной скалярной частицы сосредоточена во внутренней (при малых ϱ) или во внешней (при больших ϱ) потенциальной яме. В некоторой промежуточной области значений ϱ наблюдается специфический переходный режим. Этот переход является непрерывным по переменной ϱ , но, так как он имеет место в достаточно узкой области изменения ϱ , то может показаться, что переход происходит скачками (см., например, показанную ниже зависимость собственных значений от параметра ϱ). Эти явления демонстрируются более наглядно на трехмерном рисунке (см. рис. 3).

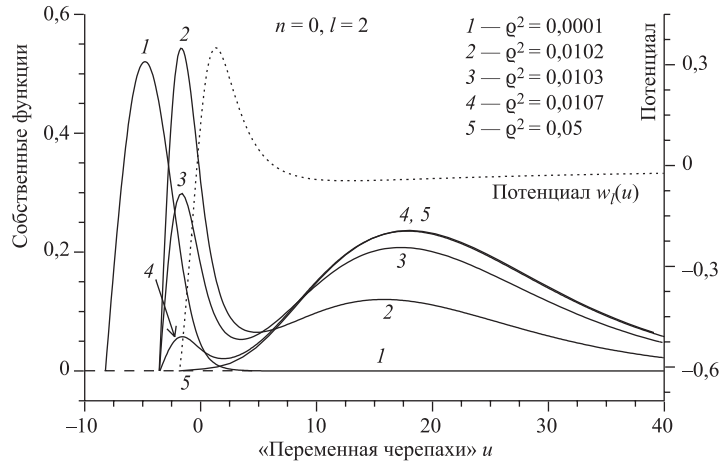


Рис. 4. Радиальные функции $P_{02}(u; \varrho)$ при разных значениях гравитационного дефекта массы

Ясно, что в нашем подходе главные новые физические явления обусловлены гравитационным дефектом массы точечного источника гравитационного поля, который до сих пор не рассматривался. Зависимость первых четырех собственных значений $\varepsilon_{0,1,2,3}^2$ от ϱ показана на рис. 5. Хорошо видна характерная ступенчатая зависимость дискретных собственных значений ε_n^2 от отношения масс ϱ . Количество ступенек для каждого n определяется количеством максимумов, которые с возрастанием ϱ прошли через переходной режим из внутренней ямы во внешнюю.

Нетрудно заметить, что такое нетривиальное поведение собственных значений уравнения Клейна–Гордона в поле точечного источника гравитационного поля связано с наличием двух *конечных* ям:

- 1) глубокой, но *конечной* внутренней потенциальной ямы, которая имеет размер порядка радиуса Шварцшильда;
- 2) внешней ямы, очень мелкой по сравнению с внутренней, в которой находится обычный мир ньютоновской гравитации.

Ямы разделены между собой очень высоким потенциальным барьером, который извне представляется отталкивающим «центробежным» барьером, а изнутри представляется сдерживающим потенциальным барьером типа сферической потенциальной стенки. Наши численные результаты описывают квантовое прохождение под этим барьером, результат которого сильно зависит от гравитационного дефекта масс.

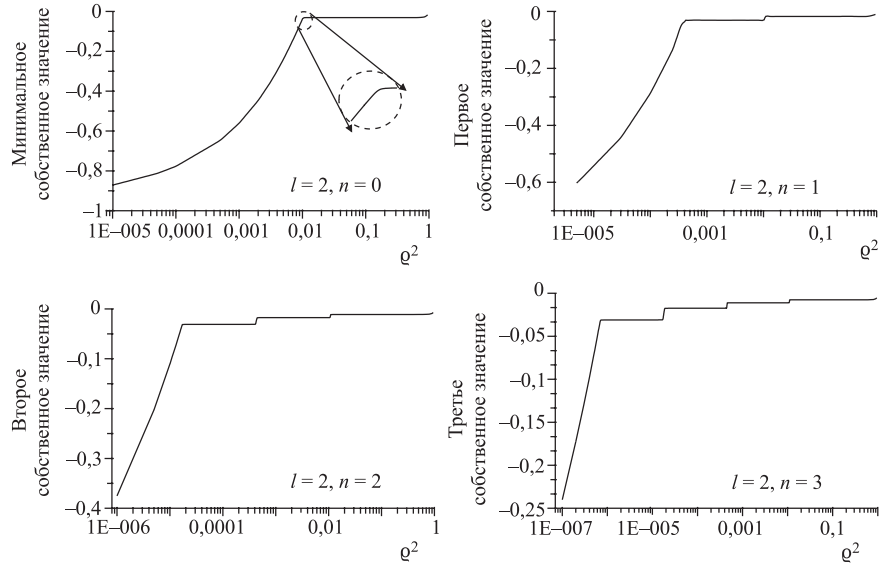


Рис. 5. Зависимость первых четырех собственных значений $\varepsilon_{0,1,2,3}^2$ от дефекта массы источника гравитационного поля

Такое поведение пробных частиц в гравитационном поле точечного источника представляется гораздо более физическим, чем широко распространенные модели черных дыр. Ясно, что в отличие от случая таких «дыр» пространства-времени, в которых имеется нефизическая *бесконечно* глубокая потенциальная яма, в нашем случае конечная внутренняя яма играет роль капкана для пробных частиц. Возможно, на этом пути удастся построить модель очень компактных материальных объектов размером порядка радиуса Шварцшильда и произвольно большой массой, у которых нет горизонта событий. Не исключено, что такого типа объекты представляют суть наблюдаемых компактных темных объектов в природе и могут описать конечную стадию эволюции звезд без использования формальных конструкций типа черных дыр. Конечно, эти вопросы являются открытыми и нуждаются в дальнейшем серьезном изучении.

Легко наблюдать ещё одно удивительное явление в дискретном спектре пробных частиц в гравитационном поле точечного источника, которое также связано с гравитационным дефектом массы. Если построить общий рисунок зависимости уровней от квадрата отношения масс ρ , то становится очевидным, что имеется отталкивание и притяжение (вплоть до квазипересечений) этих уровней (см. рис. 6). Такого типа поведение квантовых уровней хо-

рошо известно в других физических областях, например в лазерной физике и в физике нейтринных осцилляций, но, по-видимому, наблюдается впервые в теории гравитации.

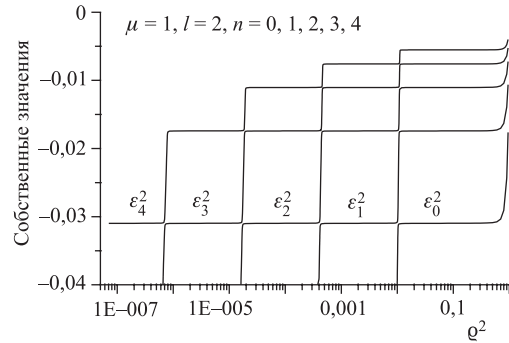


Рис. 6. Притяжение и отталкивание уровней ε_n при разных значениях дефекта массы источника гравитационного поля

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хорошо известно, что в традиционном подходе к изучению движения пробных частиц в поле Шварцшильда за горизонтом событий имеется бесконечно глубокая нефизическая потенциальная яма. Всё, что так или иначе находится в этой яме, неотвратно падает к её центру $\rho = 0$ и достигает его за конечное время. В квантовой задаче этот факт приводит к отсутствию связанных состояний и дискретного спектра [3].

Такой центр является недопустимой с физической точки зрения геометрической особенностью, для «скрытия» которой приходится пользоваться не поддающимися доказательству математическими гипотезами типа гипотезы «космической цензуры». Более того, на сегодняшний день имеется достаточное количество исследований, которые убедительно показывают, что подобного типа математические гипотезы не являются корректными, по меньшей мере в их оригинальной формулировке [11].

Из работ [1] видна принципиальная роль материального физического источника гравитационного поля, который в ОТО является естественным регулизирующим фактором, обрезающим на конечные значения $\rho_0 > \rho_G$ переменную яркости ρ (см. выражение (2.5)).

В настоящей работе мы показали, что такое обрезание, которое, как уже известно, оставляет вне физической области все явления, связанные с

горизонтом событий, приводит, кроме этого, к ряду принципиально новых физических явлений, изучение которых ставит новые интересные математические и физические задачи. В частности, в результате этого обрезания в задаче возникают дискретный спектр и связанные состояния, исследование которых начато в предлагаемой работе численными методами.

Благодарности

Один из нас (П. Ф.) благодарен High Energy Physics Division, ICTP, Trieste, за гостеприимство и хорошие условия работы в течение его визита осенью 2003 г., во время которого возникла идея настоящего исследования, и ОИЯИ за приоритетную финансовую поддержку работы. Все три автора благодарны ОИЯИ за гостеприимство и прекрасные условия работы в течение трех месяцев в конце 2003 г. и в начале 2004 г., когда была выполнена и доложена основная часть настоящей работы. Авторы благодарны также участникам научных семинаров ЛТФ им. Н. Н. Боголюбова и ЛИТ ОИЯИ за обсуждение основных идей, методов решения и результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fiziev P.* Gravitational Field of Massive Point Particle in General Relativity. gr-qc/0306088; Abdus Salam ICTP Preprint IC/2003/122;
Fiziev P., Dimitrov S. Point Electric Charge in General Relativity. hep-th/0406077;
Fiziev P. On the Solutions of Einstein Equations with Massive Point Source. gr-qc/0407088.
2. *Feshbach H., Villars F.* // Rev. Mod. Phys. 1958. V. 30. P. 24.
3. *Jacobson T.* Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and Hawking Effect. gr-qc/0308048.
4. *Dirac P. A. M.* // Proc. Roy. Soc. (London) A. 1962. V. 270, P. 354; Conference in Warszawa and Jablonna / Ed. L. Infeld. Paris: Gauthier-Villars, 1964. P. 163–175.
5. *Жидков Е. П., Макаренко Г. И., Пузынин И. В.* Непрерывный аналог метода Ньютона для нелинейных задач физики // ЭЧАЯ. 1973. Т. 4, вып. 1. С. 127.
6. *Пузынин И. В. и др.* Обобщенный непрерывный аналог метода Ньютона для численного исследования некоторых нелинейных квантово-полевых моделей // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30, вып. 1. С. 210–265.
7. *Пономарев Л. И., Пузынин И. В., Пузынина Т. П.* Вычисление уровней энергии мезомолекул с помощью непрерывного аналога метода Ньютона. Сообщение ОИЯИ P4-6256. Дубна, 1972.
8. *Бояджиев Т. Л.* Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности. Сообщение ОИЯИ P2-2002-101. Дубна, 2002.

9. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
10. *Ермаков В. В., Калиткин Н. Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // ЖВМиМФ. 1981. Т. 21, №2. С. 491.
11. *Joshi P. S.* Global Aspects in Gravitation and Cosmology. Oxford: Clarendon Press, 1993;
Singh T. P., Joshi P. S. // Class. Quant. Grav. 1996. V. 13, P. 559;
Hamade R. S., Stewart J. M. // Class. Quant. Grav. 1996. V. 13. P. 497;
Giambo R. et al. // Class. Quant. Grav. 2003. V. 20. P. L75; New Solutions of Einstein Equations in Spherical Symmetry: The Cosmic Censor to the Court. gr-qc/0204030.

Получено 2 августа 2004 г.

Редактор *А. Н. Шабашова*

Подписано в печать 24.08.2004.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,68. Уч.-изд. л. 0,9. Тираж 310 экз. Заказ № 54??.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/