

P11-2004-147

И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Н. Р. Саркар, И. Сархатов

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ  
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ  
ПРИ СТАРШИХ ПРОИЗВОДНЫХ

Амирханов И. В. и др.

P11-2004-147

Исследование краевых задач для уравнения высокого порядка с малым параметром при старших производных

В работе аналитически и численно найдены решения различных краевых задач для уравнения высокого порядка с малым параметром при старших производных. Дан анализ этих решений. Установлено, что для некоторых вариантов симметричных граничных условий решения краевой задачи для уравнений четвертого, шестого и т. д. порядков переходят в решение уравнения Шредингера при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon$  — малый параметр). Найденные решения с различными узлами ортогональны между собой. Приведены результаты численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2004

Перевод авторов

Amirkhanov I. V. et al.

P11-2004-147

Investigation of Boundary-Value Problems for the Equation of High Order with Small Parameter at a Higher Derivative

In this work the solutions of different boundary-value problems are retrieved analytically and numerically for the equation of high order with small parameter at a higher derivative. The analysis of these solutions is given. It is found that for some variants of symmetric boundary conditions the solutions of a boundary-value problem for the equations of the 4th, 6th, ... orders transfer into the solution of a Schrödinger equation at  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon$  is small parameter). The retrieved solutions with different knots are orthogonal among themselves. The results of numerical calculations are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2004

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов, так называемых кваркониев, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка. Тяжелые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой (решение уравнения Шредингера на собственные значения) [1]. При описании легких мезонов возникает необходимость учета релятивистских эффектов.

Релятивистское обобщение потенциальной модели кваркония приводит к решению спектральной задачи для уравнения Бете–Солпитера и различных вариантов квазипотенциальных уравнений [2–6].

В данной работе, так же как и в предыдущих исследованиях [9–11], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [3, 4] в релятивистском конфигурационном пространстве. В частности, для радиальных волновых функций, описывающих относительное движение двух скалярных частиц с импульсом  $q$ , моментом  $l$  и равными массами  $m$ , оно имеет вид

$$\left[ 2c\sqrt{q^2 + m^2c^2} - H_0 - V(r) \right] \psi_{ql}(r) = 0, \quad (1.1)$$

$$H_0 = 2mc^2 \operatorname{ch} \left( \frac{i\hbar}{mc} \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{mr \left( r + \frac{i\hbar}{mc} \right)} \exp \left( \frac{i\hbar}{mc} \frac{d}{dr} \right),$$

где  $H_0$  — релятивистский гамильтониан,  $V$  — квазипотенциал,  $c$  — скорость света. Если в уравнении (1.1) величину  $c$  формально устремить к бесконечности ( $c \rightarrow \infty$ ), то это уравнение переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера:

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r) + q^2 \right] \psi_{ql}(r) = 0. \quad (1.2)$$

Рассмотрим случай  $S$ -волны ( $l = 0$ ) и положим  $\hbar = m = 1$ ,  $\varepsilon = 1/c$ . Тогда уравнение (1.1) можно переписать в более удобном для дальнейших исследований виде:

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)] \psi_{ql}(r) = 0, \quad (1.3)$$

$$E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[ \sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1 \right] = \frac{2q^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1}, \quad (1.4)$$

$$H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[ \operatorname{ch} \left( i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right]. \quad (1.5)$$

Удобство этих обозначений связано с важным свойством, а именно: при  $\varepsilon \rightarrow 0$   $E_\varepsilon \rightarrow q^2$ ,  $H_\varepsilon \rightarrow \frac{d^2}{dr^2}$ , т.е. уравнение (1.3) переходит в уравнение Шредингера (1.2). Разлагая оператор  $\text{ch}\left(i\varepsilon\frac{d}{dr}\right)$  в ряд, можно получить следующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка:

$$\left[ E_\varepsilon + \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \dots \right) - V(r) \right] \psi(r) = 0. \quad (1.6)$$

Если в уравнении (1.6) отбросить члены высших порядков, то в результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение конечного порядка:

$$H_{2m}\psi(r) = \left[ E_\varepsilon + \left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \dots + \frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dr^{2m}} \right) - V(r) \right] \psi(r) = 0, \quad (1.7)$$

где  $2m$  — порядок уравнений ( $m = 2, 3, 4, \dots, M$ ).

Одной из важных особенностей уравнений (1.6) и (1.7) является наличие малого параметра при старших производных, т.е. это сингулярно-возмущенные дифференциальные уравнения. Трудность построения асимптотического разложения решений таких уравнений и невозможность применения к ним обычной классической схемы разложения в степенной ряд по малому параметру связаны с тем, что если положить значение параметра равным нулю, то порядок уравнения понижается, и решение упрощается. Таким образом, уравнение не может удовлетворить всем дополнительным условиям, поставленным для искомого уравнения.

Сингулярно-возмущенные краевые задачи, относящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям конечного порядка с малым параметром  $\varepsilon$  при старших производных, явились предметом изучения широкого круга работ [12–16]. Однако в связи с уравнением (1.6) возникла необходимость исследования сингулярно-возмущенных краевых задач для дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

Таким образом, особую актуальность приобретают методы поиска таких решений сингулярно-возмущенных краевых задач  $\{\psi_n, \lambda_n\}$  (собственные функции и собственные значения), которые сохраняют свои свойства как для дифференциальных уравнений конечного порядка, так и для дифференциальных уравнений бесконечного порядка при условии возможности задания краевых условий, и если решение поставленной задачи существует. Одна из важных особенностей краевых задач для дифференциальных уравнений

высокого порядка  $2m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) заключается в том, что необходимо накладывать  $2m$  краевых условий на решения задачи. Так как эти условия, как правило, налагаются в двух точках (для уравнений (1.6) и (1.7))  $r = 0$  и  $r = r_0$  (или  $r \rightarrow \infty$ ), то количество возможных краевых задач  $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$  с увеличением порядка уравнения  $2m$  сильно растет. Поэтому в дальнейшем будем исследовать краевые задачи, которые допускают при  $\varepsilon \rightarrow 0$  предельный переход в решение уравнения второго порядка (уравнения Шредингера), т. е.

$$\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \{\psi_n, \lambda_n\}_2. \quad (1.8)$$

Тогда разность собственных значений  $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$  можно интерпретировать как поправки (релятивистские поправки) к решению уравнения Шредингера. Кроме того, важно исследовать поведение решений краевых задач  $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$  при фиксированном  $\varepsilon$ , но при возрастании порядка уравнений  $2m$ .

Некоторые вопросы о сходимости решений релятивистского уравнения (1.1) к решению уравнения (1.2) рассмотрены в работе [17]. С помощью аналитических и численных методов в этой области были проведены исследования для конкретных поставленных задач [6–11].

В настоящей работе проводится исследование различных краевых задач для бесконечной потенциальной ямы

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r \leq r_0, \\ \infty, & r > r_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Точное решение уравнения Шредингера (1.2) с потенциалом (1.9) ( $l = 0$ ) и с краевыми условиями

$$\psi(0) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(r_0) = 0 \quad (1.10)$$

имеет вид

$$\{\psi_n, q_n\}_2, \quad (1.11)$$

где  $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{r_0}} \sin q_n r$ ,  $q_n = \frac{n\pi}{r_0}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , а с граничными условиями  $\psi(0) = 0$  и  $\psi'(r_0) = 0$  решение уравнения (1.2) имеет вид

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{r_0}} \sin q_n r, \quad q_n = \frac{(2n-1)\pi}{2r_0}, \quad \text{где} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.12)$$

Для уравнения (1.7)  $2m$ -порядка краевые условия необходимо выбрать таким образом, чтобы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  выполнялось условие (1.8). Кроме того, выбранные краевые условия должны обеспечивать существование решения исходного уравнения (1.1).

## 2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С СИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ $r = 0$ И $r = r_0$

В этом разделе рассматриваем уравнения  $2m$ -порядка (1.7) при  $m = 2, 3, 4$  с симметричными краевыми условиями

$$\begin{aligned} \psi(r)|_{r=0} = 0, & & \psi(r)|_{r=r_0} = 0, \\ \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=0} = 0, & & \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=r_0} = 0, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \frac{d^{2m-2}}{dr^{2m-2}}\psi(r)|_{r=0} = 0, & & \frac{d^{2m-2}}{dr^{2m-2}}\psi(r)|_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

**2.1.** Рассмотрим уравнение четвертого порядка ( $m = 2$ ). Тогда уравнение (1.7) и краевые условия принимают вид

$$\left[ E_\varepsilon + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} \right] \psi(r) = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0, & & \psi(r_0) = 0, \\ \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=0} = 0, & & \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид

$$\psi(r) = c_1 \sin(k_1 r) + c_2 \cos(k_1 r) + c_3 \operatorname{sh}(k_2 r) + c_4 \operatorname{ch}(k_2 r), \quad (2.4)$$

где

$$k_1^2 = \frac{6}{\varepsilon^2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 E_\varepsilon}{3}} - 1 \right], \quad k_2^2 = \frac{6}{\varepsilon^2} \left[ \sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2 E_\varepsilon}{3}} + 1 \right]. \quad (2.5)$$

Заметим, что  $k_1$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к  $q$ , а  $k_2$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  стремится к  $\infty$ .

Из граничных условий при  $r = 0$  получаем

$$W_2 B_2 = 0, \quad (2.6)$$

где  $W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -k_1^2 & k_2^2 \end{vmatrix}$  — матрица и  $B_2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_4 \end{pmatrix}$  — вектор. Определитель матрицы  $\det W_2 \neq 0$  для любого фиксированного  $\varepsilon$ . Поэтому уравнение (2.6) имеет тривиальное решение, т. е.  $c_2 = 0$  и  $c_4 = 0$ .

Тогда общее решение имеет вид

$$\psi(r) = c_1 \sin(k_1 r) + c_3 \operatorname{sh}(k_2 r). \quad (2.7)$$

Из граничных условий при  $r = r_0$  получаем

$$W_2 B_{2r_0} = 0, \quad (2.8)$$

где  $W_2$  — матрица предыдущего пункта и вектор  $B_{2r_0} = \begin{pmatrix} c_1 \sin(k_1 r_0) \\ c_3 \operatorname{sh}(k_2 r_0) \end{pmatrix}$ .

Так как уравнение (2.8) также имеет только тривиальные решения, т. е.

$$\begin{aligned} c_1 \sin(k_1 r_0) &= 0, \\ c_3 \operatorname{sh}(k_2 r_0) &= 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

то  $c_3 = 0$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $\sin(k_1 r_0) = 0$ . Отсюда получаем

$$k_n = \frac{n\pi}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

Из соотношений (2.10) и (2.5) имеем

$$E_{\varepsilon n} = k_n^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4!} k_n^4. \quad (2.11)$$

Из соотношения (1.4) получаем

$$q_n^2 = E_{\varepsilon n} + \frac{\varepsilon^2}{4} E_{\varepsilon n}^2, \quad (2.12)$$

или

$$q_n^2 = \left( k_n^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4!} k_n^4 \right) + \frac{\varepsilon^2}{4} \left( k_n^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4!} k_n^4 \right)^2. \quad (2.13)$$

Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид

$$\begin{cases} \psi = c_1 \sin(k_n r), \quad k_n = \frac{n\pi}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ E_{\varepsilon n} = k_n^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4!} k_n^4 \\ q_n^2 = E_{\varepsilon n} + \frac{\varepsilon^2}{4} E_{\varepsilon n}^2. \end{cases} \quad \text{или} \quad (2.14)$$

Здесь  $c_1$  находится из условия нормировки  $c_1 = \sqrt{2/r_0}$ .

Решение (2.14) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в решение (1.11) уравнения Шредингера.

**2.2.** Рассмотрим уравнение шестого порядка ( $m = 3$ ). Тогда уравнение (1.7) и краевые условия (2.1) будут иметь вид

$$\left[ E_\varepsilon + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} \right] \psi(r) = 0, \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= 0, & \psi(r_0) &= 0, \\
\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=0} &= 0, & \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=r_0} &= 0, \\
\frac{d^4}{dr^4}\psi(r)|_{r=0} &= 0, & \frac{d^4}{dr^4}\psi(r)|_{r=r_0} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Общее решение уравнения (2.15) имеет вид

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= c_1 \sin(k_1 r) + c_2 \cos(k_1 r) + c_3 \operatorname{sh}(k_2 r) + \\
&+ c_4 \operatorname{ch}(k_2 r) + c_5 \operatorname{sh}(k_3 r) + c_6 \operatorname{ch}(k_3 r), \tag{2.17}
\end{aligned}$$

где  $k_1^2 = -\left(u + v + \frac{10}{\varepsilon^2}\right)$ ,  $u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}$ ,  $v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$ ,

$$\begin{aligned}
q &= \frac{800}{\varepsilon^6} + \frac{180E\varepsilon}{\varepsilon^4}, & p &= \frac{20}{\varepsilon^4}, \\
k_2^2 &= \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v + \frac{10}{\varepsilon^2}, \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k_3^2 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v + \frac{10}{\varepsilon^2}.$$

Из граничных условий при  $r = 0$  получаем

$$W_3 B_3 = 0, \tag{2.19}$$

где

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k_1^2 & k_2^2 & k_3^2 \\ k_1^4 & k_2^4 & k_3^4 \end{vmatrix} \quad \text{— матрица,} \tag{2.20}$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} c_2 \\ c_4 \\ c_6 \end{pmatrix} \quad \text{— вектор.} \tag{2.21}$$

Определитель  $\det W_3 \neq 0$  для любого фиксированного  $\varepsilon$ , поэтому уравнение (2.19) имеет тривиальные решения, т. е.  $c_2 = 0$ ,  $c_4 = 0$ ,  $c_6 = 0$ .

Тогда общее решение принимает вид

$$\Psi(r) = c_1 \sin(k_1 r) + c_3 \operatorname{sh}(k_2 r) + c_5 \operatorname{sh}(k_3 r). \tag{2.22}$$



Из граничных условий при  $r = r_0$  имеем

$$W_3 B_{3r_0} = 0, \quad (2.23)$$

где  $W_3$  — матрица предыдущего пункта и вектор

$$B_{3r_0} = \begin{pmatrix} c_1 \sin(k_1 r_0) \\ c_3 \operatorname{sh}(k_2 r_0) \\ c_5 \operatorname{sh}(k_3 r_0) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Так как уравнение также имеет только тривиальное решение, т. е.

$$\begin{aligned} c_1 \sin(k_1 r_0) &= 0, \\ c_3 \operatorname{sh}(k_2 r_0) &= 0, \\ c_5 \operatorname{sh}(k_3 r_0) &= 0, \end{aligned}$$

то отсюда следует, что  $c_3 = 0$ ,  $c_5 = 0$ ,  $c_1 \neq 0$ ,  $\sin(k_1 r_0) = 0$  и, следовательно,

$$k_n = \frac{n\pi}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

Из соотношений (2.18) получаем

$$E_{\varepsilon n} = k_n^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4!} k_n^4 + \frac{2\varepsilon^4}{6!} k_n^6. \quad (2.26)$$

Таким образом, решение поставленной задачи имеет вид

$$\begin{cases} \psi = c_1 \sin(k_n r), \quad k_n = \frac{n\pi}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ E_{\varepsilon n} = k_n^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4!} k_n^4 + \frac{2\varepsilon^4}{6!} k_n^6 \\ q_n^2 = E_{\varepsilon n} + \frac{\varepsilon^2}{4} E_{\varepsilon n}^2. \end{cases} \quad \text{или} \quad (2.27)$$

Здесь  $c_1$  находится из условия нормировки  $c_1 = \sqrt{2/r_0}$ .

Решение (2.27) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в решение (1.11) уравнения Шредингера.

**2.3.** Теперь рассмотрим уравнение восьмого порядка ( $m = 4$ ). Тогда уравнение (1.7) и краевые условия (2.1) будут иметь вид

$$\left[ E_\varepsilon + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \frac{2\varepsilon^6}{8!} \frac{d^8}{dr^8} \right] \psi(r) = 0, \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= 0, & \psi(r_0) &= 0, \\
\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=0} &= 0, & \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=r_0} &= 0, \\
\frac{d^4}{dr^4}\psi(r)|_{r=0} &= 0, & \frac{d^4}{dr^4}\psi(r)|_{r=r_0} &= 0, \\
\frac{d^6}{dr^6}\psi(r)|_{r=0} &= 0, & \frac{d^6}{dr^6}\psi(r)|_{r=r_0} &= 0.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Общее решение уравнения (2.28) следующее:

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= c_1 \sin(k_1 r) + c_2 \cos(k_1 r) + c_3 \operatorname{sh}(k_2 r) + c_4 \operatorname{ch}(k_2 r) + \\
&+ c_5 \operatorname{sh}(k_3 r) + c_6 \operatorname{ch}(k_3 r) + c_7 \operatorname{sh}(k_4 r) + c_8 \operatorname{ch}(k_4 r). \tag{2.30}
\end{aligned}$$

После удовлетворения граничным условиям решение поставленной задачи имеет вид

$$\begin{cases} \psi = c_1 \sin(k_n r), \quad k_n = \frac{n\pi}{r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \\ E_{\varepsilon n} = k_n^2 + \frac{2\varepsilon^2}{4!} k_n^4 + \frac{2\varepsilon^4}{6!} k_n^6 + \frac{2\varepsilon^6}{8!} k_n^8, \\ q_n^2 = E_{\varepsilon n} + \frac{\varepsilon^2}{4} E_{\varepsilon n}^2. \end{cases} \tag{2.31}$$

Здесь  $c_1$  находится из условия нормировки  $c_1 = \sqrt{2/r_0}$ .

Решение (2.31) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в решение (1.11) уравнения Шредингера.

Из результатов, полученных в разд. 2.1, 2.2, 2.3, можно сделать следующий вывод: для симметричных граничных условий (2.1) вид собственной функции  $\psi(r) = c_1 \sin(k_n r)$  не меняется, а собственные значения  $E_n$  меняются при увеличении  $2m$ -порядка уравнений.

**2.4.** В этом разделе рассмотрим уравнение бесконечного порядка (1.6). Решение будем искать в виде

$$\psi(r) = c \sin(k_n r). \tag{2.32}$$

Краевые условия будут иметь вид (2.1), причем  $m = 2, 3, 4, \dots$ . Подставляя выражение (2.32) в уравнение (1.6) и удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$E_{\varepsilon n} = \frac{2}{\varepsilon^2} [\operatorname{ch}(k_n \varepsilon) - 1], \tag{2.33}$$

где  $k_n = \frac{\pi n}{r_0}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , и  $c = \sqrt{2/r_0}$ .

Таким образом, функция (2.32) и собственные значения (2.33) являются решениями уравнения бесконечного порядка с граничными условиями (2.1), и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  эти решения переходят в решение (1.11) уравнения Шредингера.

### 3. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПРИ $r = 0$ И $r = r_0$

В этом разделе мы рассмотрим уравнение  $2m$ -порядка со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi(r)|_{r=0} = 0, & & \frac{d}{dr}\psi(r)|_{r=r_0} = 0, \\ \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=0} = 0, & & \frac{d^3}{dr^3}\psi(r)|_{r=r_0} = 0, \\ \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \\ \frac{d^{2m-2}}{dr^{2m-2}}\psi(r)|_{r=0} = 0, & & \frac{d^{2m-1}}{dr^{2m-1}}\psi(r)|_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Все рассуждения, проделанные в предыдущем разделе, можно повторить для граничных условий (3.1) и убедиться, что решение поставленной задачи имеет вид

$$\psi(r) = c \sin(k_n r), \quad (3.2)$$

где

$$k_n = \frac{(2n-1)\pi}{2r_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.3)$$

и  $c = \sqrt{2/r_0}$ .

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  эти решения также переходят в решение (1.12) уравнения Шредингера.

### 4. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

В этом разделе исследуем уравнение четвертого порядка (2.2) с различными граничными условиями и поведение его решений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**4.1.** Сначала рассмотрим уравнение (2.2) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0, & & \psi(r_0) = 0, \\ \frac{d}{dr}\psi(r)|_{r=0} = 0, & & \frac{d}{dr}\psi(r)|_{r=r_0} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Общее решение уравнения имеет вид (2.4). Из граничных условий (4.1) при  $r = 0$  получаем

$$c_4 = -c_2, \quad c_3 = -\frac{k_1}{k_2}c_1. \quad (4.2)$$

Тогда общее решение имеет вид

$$\psi(r) = c_1 k_1 \left[ \frac{1}{k_1} \sin(k_1 r) - \frac{1}{k_2} \operatorname{sh}(k_2 r) \right] + c_2 [\cos(k_1 r) - \operatorname{ch}(k_2 r)]. \quad (4.3)$$

Из граничных условий (4.1) при  $r = r_0$  находим уравнение

$$2k_1k_2 + (k_2^2 - k_1^2) \sin(k_1r_0) \operatorname{sh}(k_2r_0) - 2k_1k_2 \cos(k_1r_0) \operatorname{ch}(k_2r_0) = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, решение исходной задачи (уравнение (2.2) с граничными условиями (4.1)) мы свели к решению трансцендентного уравнения (4.4), которое может быть решено численно. Отметим, что, когда  $k_2 \gg 1$ , при вычислении функций  $\operatorname{sh}(k_2r_0)$  и  $\operatorname{ch}(k_2r_0)$  на ЭВМ возникают технические трудности. Чтобы избежать этих трудностей, уравнение (4.4) целесообразно переписать в более удобном виде:

$$f_1(E, \varepsilon) + f_2(E, \varepsilon) \sin(k_1r_0) - f_3(E, \varepsilon) \cos(k_1r_0) = 0, \quad (4.5)$$

$$\text{где } f_1(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon\sqrt{E}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\operatorname{ch}(k_2r_0)}, \quad f_2(E, \varepsilon) = \operatorname{th}(k_2r_0), \quad f_3(E, \varepsilon) = \frac{\varepsilon\sqrt{E}}{\sqrt{3}}.$$

Для любого фиксированного  $\varepsilon$  эти функции обладают следующими свойствами:

$$f_1(E, \varepsilon) \xrightarrow{E \rightarrow 0} 0, \quad f_1(E, \varepsilon) \xrightarrow{E \rightarrow \infty} 0, \quad -1 \leq f_2(E, \varepsilon) \leq 1$$

$$\text{при любых } 0 \leq E < \infty, \quad f_3(E, \varepsilon) \xrightarrow{E \rightarrow 0} 0.$$

Рассмотрим уравнение (4.5) на полуинтервале  $E_M \leq E < \infty$ , где  $E_M$  — как угодно большое число, но конечное (чтобы выполнялось условие  $k_1 \gg 1$ ,  $k_2 \gg 1$ ).

Так как  $f_1(E_M, \varepsilon) \ll 1$ ,  $f_2(E_M, \varepsilon) \sim 1$ , то уравнение (4.5) можно переписать приближенно в следующем виде:

$$f_1(E_M, \varepsilon) + f_2(E_M, \varepsilon) \sin(k_1r_0) - f_3(E, \varepsilon) \cos(k_1r_0) = 0. \quad (4.6)$$

Учитывая, что  $\sin(k_1r_0)$ ,  $\cos(k_1r_0)$  — периодические функции  $E$ , можно убедиться, что на полуинтервале  $E_M \leq E < \infty$  уравнение (4.6) (значит, и уравнение (4.5)) имеет бесконечное число корней. Причем корни находятся в интервале

$$\left(\frac{\pi n}{r_0}\right)^2 < E_n < \left(\frac{(2n+1)\pi}{2r_0}\right)^2, \quad \text{где } n = \left[\frac{E_M}{\pi}\right] + m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7)$$

В интервале  $0 \leq E \leq E_M$  уравнение (4.5) имеет конечное число корней. Таким образом, при  $0 \leq E < \infty$  исходное уравнение имеет бесконечное число корней.

При  $\varepsilon \rightarrow 0$  все корни уменьшаются, и выполняется условие  $E_n \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0}$

$$\left(\frac{\pi n}{r_0}\right)^2.$$

Волновая функция с учетом граничных условий на правой границе имеет следующий вид:

$$\psi_{\varepsilon n}(r) = A_n \left( \frac{\sin(k_1 r) - (k_1/k_2) \operatorname{sh}(k_2 r)}{\sin(k_1 r_0) - (k_1/k_2) \operatorname{sh}(k_2 r_0)} - \frac{\cos(k_1 r) - \operatorname{ch}(k_2 r)}{\cos(k_1 r_0) - \operatorname{ch}(k_2 r_0)} \right),$$

где постоянная  $A_n$  определяется из условия нормировки волновой функции.

В табл. 1 приведены собственные значения энергии  $E_{\varepsilon n}$  для разных значений малого параметра  $\varepsilon$ .

Таблица 1

$\varepsilon$	1,00	0,50	0,10	0,05
$E_{1\varepsilon}$	418366,7563	105514,0473	5393,1137	2244,0150
$E_{2\varepsilon}$	3174219,1256	797008,0905	36289,5174	12486,4311
$E_{3\varepsilon}$	112191248,8747	3055229,8982	131699,0120	40321,7283

Графики собственных функций при разных значениях малого параметра  $\varepsilon$  приведены на рис. 1. Найденные собственные функции  $\psi_{\varepsilon n}$  с различными узлами ортогональны между собой.

**4.2.** Рассмотрим уравнение (2.2) со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, & \psi(r_0) &= 0, \\ \psi'''(0) &= 0, & \psi'''(r_0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Общее решение уравнения (2.2) также имеет вид (2.4). Из граничных условий (4.8) при  $r = 0$  и  $r = r_0$  получаем трансцендентное уравнение:

$$2k_1^3 k_2^3 + (k_1^6 - k_2^6) \sin(k_1 r_0) \operatorname{sh}(k_2 r_0) - 2k_1^3 k_2^3 \cos(k_1 r_0) \operatorname{ch}(k_2 r_0) = 0. \quad (4.9)$$

Проводя так же, как и в предыдущем пункте, анализ, можно убедиться, что уравнение (4.9) имеет бесконечное число корней, и они находятся в интервале (4.7).

**4.3.** Теперь рассмотрим уравнение (2.2) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, & \psi(r_0) &= 0, \\ \psi'(0) &= 0, \\ \psi''(0) &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Общее решение уравнения (2.2) также принимает вид (2.4). Из граничных условий (4.10) получаем следующее трансцендентное уравнение:

$$(k_1^2 + k_2^2) (k_2 \sin(k_1 r_0) - k_1 \operatorname{sh}(k_2 r_0)) = 0. \quad (4.11)$$

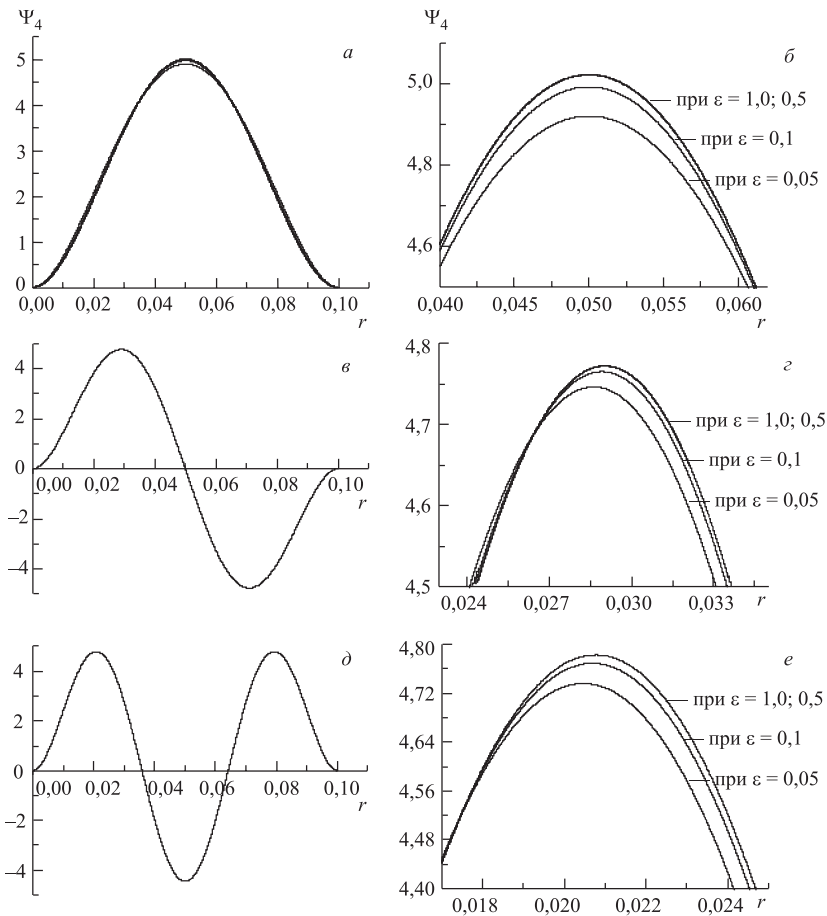


Рис. 1. Собственные функции: *a* — без узлов; *в* — с одним узлом; *д* — с двумя узлами; *б*, *г*, *е* — соответственно те же функции в более крупном масштабе

Нетрудно убедиться, что для любого заданного  $\varepsilon$  это уравнение не имеет решения. Значит, уравнение (2.2) с граничными условиями (4.10) не имеет нетривиального решения.

Если граничные условия (4.10) перепишем в виде

$$\begin{aligned} \psi(0) = 0, \quad \psi(r_0) = 0, \\ \psi'(r_0) = 0, \\ \psi''(r_0) = 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

то трансцендентное уравнение также имеет вид (4.11). Поэтому уравнение (2.2) с граничными условиями (4.12) не имеет нетривиального решения.

## 5. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШЕСТОГО ПОРЯДКА

В этом разделе исследуется уравнение шестого порядка (2.15) с различными граничными условиями и поведение его решений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**5.1.** Рассмотрим решения уравнения шестого порядка (2.15) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, & \psi(r_0) &= 0, \\ \frac{d}{dr}\psi(r)|_{r=0} &= 0, & \frac{d}{dr}\psi(r)|_{r=r_0} &= 0, \\ \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=0} &= 0, & \frac{d^2}{dr^2}\psi(r)|_{r=r_0} &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned} \psi(r) &= c_1 \sin(k_1 r) + c_2 \cos(k_1 r) + \exp(b_1 r)[c_3 \sin(b_2 r) + \\ &+ c_4 \cos(b_2 r)] + \exp(-b_1 r)[c_5 \sin(b_2 r) + c_6 \cos(b_2 r)], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где  $k_1, k_2$  определены в разд. 2.2, а  $b_1, b_2$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} b_1 &= (\alpha^2 + \beta^2)^{1/4} \cos\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{\beta}{\alpha}\right), & b_2 &= (\alpha^2 + \beta^2)^{1/4} \sin\left(\frac{1}{2} \arctg \frac{\beta}{\alpha}\right), \\ \alpha &= -\frac{1}{2}(u+v), & \beta &= \frac{\sqrt{3}}{2}(u-v). \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям (5.1), для определения собственных значений  $E_{\varepsilon n}$  получаем трансцендентное уравнение

$$\det A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{vmatrix} = 0, \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0, & A_{21} &= k_1, & A_{31} &= 0, & A_{41} &= \sin(k_1 r_0), \\ A_{12} &= 1, & A_{22} &= 0, & A_{32} &= -k_1^2, & A_{42} &= \cos(k_1 r_0), \\ A_{13} &= 0, & A_{23} &= b_2, & A_{33} &= 2b_1 b_2, & A_{43} &= \exp(b_1 r_0) \sin(b_2 r_0), \\ A_{14} &= 1, & A_{24} &= b_1, & A_{34} &= b_1^2 - b_2^2, & A_{44} &= \exp(b_1 r_0) \cos(b_2 r_0), \\ A_{15} &= 0, & A_{25} &= b_2, & A_{35} &= -2b_1 b_2, & A_{45} &= \exp(-b_1 r_0) \sin(b_2 r_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{16} &= 1, & A_{26} &= -b_1, & A_{36} &= b_1^2 - b_2^2, & A_{46} &= \exp(-b_1 r_0) \cos(b_2 r_0), \\
A_{51} &= k_1 \cos(k_1 r_0), & A_{52} &= -k_1 \sin(k_1 r_0), \\
A_{53} &= \exp(b_1 r_0)[b_1 \sin(b_2 r_0) + b_2 \cos(b_2 r_0)], \\
A_{54} &= \exp(b_1 r_0)[b_1 \cos(b_2 r_0) - b_2 \sin(b_2 r_0)], \\
A_{55} &= \exp(-b_1 r_0)[-b_1 \sin(b_2 r_0) + b_2 \cos(b_2 r_0)], \\
A_{56} &= -\exp(-b_1 r_0)[b_1 \cos(b_2 r_0) + b_2 \sin(b_2 r_0)], \\
A_{61} &= -k_1^2 \sin(k_1 r_0), & A_{62} &= -k_1^2 \cos(k_1 r_0), \\
A_{63} &= \exp(b_1 r_0)[(b_1^2 - b_2^2) \sin(b_2 r_0) - 2b_1 b_2 \cos(b_2 r_0)], \\
A_{64} &= \exp(b_1 r_0)[(b_1^2 - b_2^2) \cos(b_2 r_0) - 2b_1 b_2 \sin(b_2 r_0)], \\
A_{65} &= \exp(-b_1 r_0)[(b_1^2 - b_2^2) \sin(b_2 r_0) - 2b_1 b_2 \cos(b_2 r_0)], \\
A_{66} &= \exp(-b_1 r_0)[(b_1^2 - b_2^2) \cos(b_2 r_0) + 2b_1 b_2 \sin(b_2 r_0)].
\end{aligned}$$

В табл. 2 приведены собственные значения энергии  $E_{\varepsilon n}$  для разных значений малого параметра  $\varepsilon$ .

Таблица 2

$\varepsilon$	1,00	0,50	0,10	0,05
$E_{1\varepsilon}$	171504013,4436	10830799,6909	24430,9664	3937,89648
$E_{2\varepsilon}$	1953787118,5429	122893634,9302	241595,0960	27650,5429
$E_{3\varepsilon}$	10953535302,5082	687428299,7294	12551133,4551	116711,6733

На рис. 2 представлены собственные функции при различных значениях малого параметра  $\varepsilon$  для данного случая. Найденные собственные функции  $\psi_{\varepsilon n}$  с различными узлами ортогональны между собой.

**5.2.** Теперь рассмотрим уравнение (2.15) со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= 0, & \psi(r_0) &= 0, \\
\psi'(0) &= 0, \\
\psi''(0) &= 0, \\
\psi'''(0) &= 0, \\
\psi^{IV}(0) &= 0,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Поступая так же, как и в предыдущем разделе, находим численные решения (собственные значения и собственные функции). Собственные значения приведены в табл. 3, а собственные функции на рис. 3.



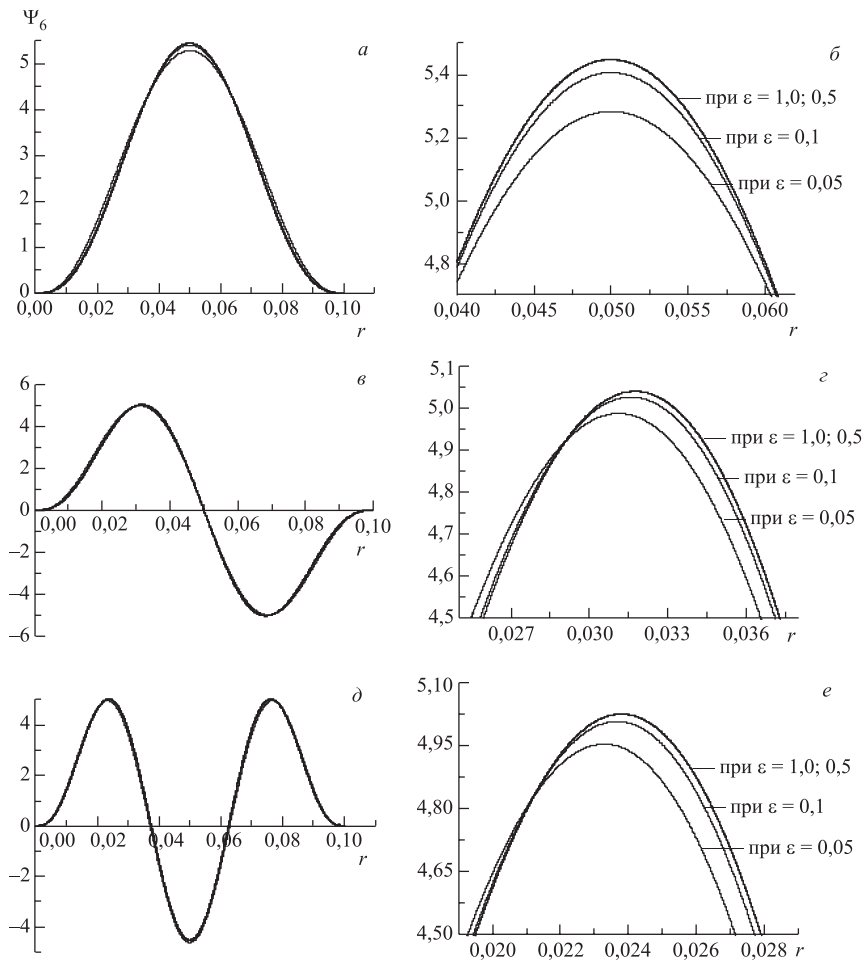


Рис. 2. Собственные функции: *a* — без узлов; *в* — с одним узлом; *д* — с двумя узлами; *б, г, е* — соответственно те же функции в более крупном масштабе

Таблица 3

$\epsilon$	1,00	0,50	0,10	0,05
$E_{1\epsilon}$	964397532,7749	608838333,1829	127413,4047	11341,3246
$E_{2\epsilon}$	27616635180,9574	1732408678,4581	3094804,1945	252633,7402
$E_{3\epsilon}$	2345965522971,0510	14689868092,1727	24910102,6959	1825654,2672

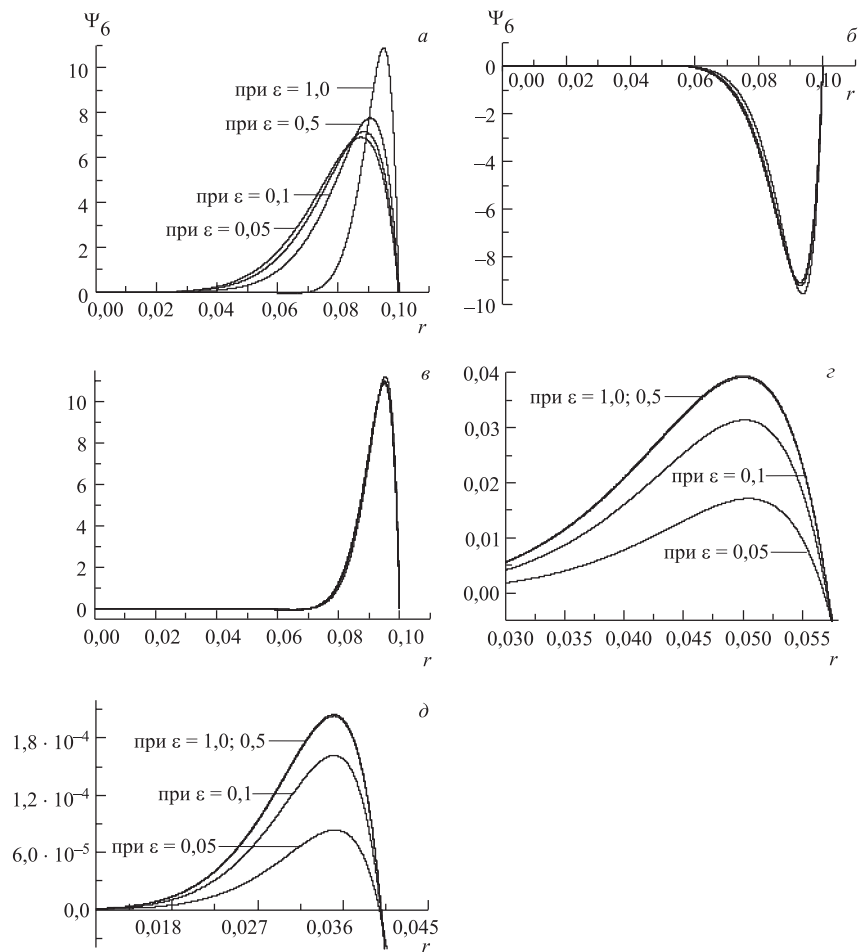


Рис. 3. Собственные функции: *a* — без узлов; *б* — с одним узлом; *в* — с двумя узлами; *з*, *д* — соответственно функции *б*, *в* в более крупном масштабе

Если граничные условия (5.4) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \psi(0) = 0, & \quad \psi(r_0) = 0, \\
 \psi'(0) = 0, & \quad \psi'(r_0) = 0, \\
 \psi''(0) = 0, & \quad \psi''(r_0) = 0, \\
 \psi'''(0) = 0, & \quad \psi'''(r_0) = 0, \\
 \psi^{IV}(0) = 0, & \quad \psi^{IV}(r_0) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

то собственные значения этой задачи полностью совпадают со значениями предыдущей задачи (см. табл. 3), а собственные функции являются зеркальными отображениями функций, приведенных на рис. 3.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе аналитически и численно найдены решения различных краевых задач для уравнения высокого порядка и установлено следующее.

1. Для некоторых вариантов симметричных граничных условий решения краевой задачи для уравнений четвертого, шестого и т. д. порядков переходят в решение уравнения Шредингера при  $\varepsilon \rightarrow 0$  (см. разд. 2, 3). Для других граничных условий такой предельный переход не имеет места (см. разд. 4, 5).

2. Для уравнения четвертого порядка с симметричными граничными условиями (см. разд. 4.1) собственные значения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  уменьшаются, и выполняется условие  $E_n \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\pi n}{r_0}\right)^2$ , а с несимметричными условиями (см. разд. 5.3) нетривиального решения краевой задачи отсутствует.

3. В отличие от уравнения четвертого порядка с несимметричными граничными условиями (см. разд. 5.3) уравнение шестого порядка с аналогичными условиями (см. разд. 5.2) имеет нетривиальные решения, но при  $\varepsilon \rightarrow 0$  эти решения не переходят в решение уравнения Шредингера.

4. Найденные решения с различными узлами ортогональны между собой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 04-01-00490, № 03-01-00290, № 03-01-00657.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В. // УФН. 1984. Т. 143. С. 3.
2. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. // Nuovo Cimento. 1963. V. 29. P. 380.
3. Kadyshevsky V. G. // Nucl. Phys. B. 1968. V. 6. P. 125;  
Kadyshevsky V. G., Mateev M. D., Mir-Kasimov R. M. JINR Preprint E2-4030. Dubna, 1968;  
Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. // Nuovo Cimento. 1968. V. 55A. P. 233.
4. Кадышевский В. Г., Мир-Касымов Р. М., Скачков Н. Б. // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, № 3. С. 637.
5. Gross F. // Phys. Rev. B. 1968. V. 6. P. 125;  
Thompson R. H. // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 110.

6. *Амирханов И. В. и др.* // Математ. моделирование. 1994. Т. 6, вып. 7. С. 55.
7. *Амирханов И. В. и др.* // Математ. моделирование. 1995. Т. 7, вып. 7. С. 34.
8. *Амирханов И. В. и др.* // Математ. моделирование. 1995. Т. 9, вып. 10. С. 111.
9. *Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В.* Препринт ОИЯИ Р5-99-15. Дубна, 1999; Сообщение ОИЯИ Р11-2000-154. Дубна, 2000.
10. *Амирханов И. В. и др.* // Дифф. уравн. 2000. Т. 37, вып. 1. С. 83–90.
11. *Амирханов И. В. и др.* // Математ. моделирование. 2003. Т. 15, вып. 9. С. 3–16.
12. *Тихонов А. Н.* // Математ. сб. 1962. Т. 31, вып. 3(73). С. 575.
13. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно-возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
14. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярно-возмущенных уравнений. М: Высшая школа, 1990.
15. *Бутузов В. Ф.* // ЖВМ и МФ. 1983. Т. 29, № 7. С. 33–44.
16. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* // УМН. 1957. Т. 12, вып. 5. С. 3–122.
17. *Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катывшев Ю. В.* // ТМФ. 1970. Т. 3, № 2. С. 191.

Получено 17 сентября 2004 г.

Редактор *О. Г. Андреева*

Подписано в печать 09.11.2004.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,12. Уч.-изд. л. 1,33. Тираж 310 экз. Заказ № 54656.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)