На правах рукописи

СПИРИДОНОВ
Вячеслав Павлович

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Специальность: 01.01.03 — математическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург 2005

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики имени Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук М.А. Ольшанецкий

доктор физико-математических наук А.В. Разумов

доктор физико-математических наук М.А. Семенов-Тян-Шанский

Ведущая организация: Институт проблем передачи информации РАН, г. Москва

Защита состоится "_____" __________________________ 2005 г. в ________ час. на заседании Диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ.

Автореферат разослан "_____" __________________________ 2005 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физико-математических наук

А.Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность проблемы.

Специальные функции широко используются в теоретической физике и различных разделах математики. Исторически многие специальные функции впервые появились именно как простейшие решения уравнений в частных производных математической физики. Подробное описание наиболее универсальных функций собрано в справочники, идентифицируемые по фамилиям авторов без упоминания их названий. После реализации проекта Бейтмана по систематическому описанию известных к 30-40 гг. двадцатого столетия специальных функций появилось мнение, что все интересные примеры уже найдены и соответствующие исследования уже не так актуальны. Однако, после открытия метода обратной задачи рассеяния для интегрирования ряда нелинейных дифференциальных и конечно-разностных уравнений, в начале 70-х годов интерес к этой области возник с новой силой. Например, возобновилось интенсивное изучение абелевых функций, связанных с алгебро-геометрическими решениями нелинейных уравнений, и трансцендентов Пенлеве, часто возникающих как автомодельные решения.

Ряды и интегралы гипергеометрического типа появляются в виде волновых функций уравнений Шредингера, описывающих атом водорода, гармонический осциллятор и другие фундаментальные одночастичные модели квантовой механики. Многочастичные задачи часто требуют изучения многомерных специальных функций, теория которых во многом была развита благодаря изучению интегрируемых систем. Модели типа Калоджеро-Сазерленда-Мозера и их релятивистские обобщения (описываемые конечно-разностными операторами) с рациональными и тригонометрическими потенциалами оказались связанными с многомерными обычными и q-гипергеометрическими функциями. В частности, эти системы описываются многомерными обобщениями полиномов Якоби, полиномами Макдональда и Корнвиндера. Ключевую роль для этих функций играют бета-интегралы, определяющие меру в соотношениях ортогональности.

Существует много обобщений классического бета-интеграла Эйлера

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \qquad \mathrm{Re}(\alpha),\ \mathrm{Re}(\beta) > 0.$$

Наиболее известным из них является многомерный интеграл, найденный Сельбергом. Значительное развитие теории точно вычисляемых интегралов такого типа было достигнуто в рамках q-гипергеометрических функций. Наиболее известным является q-бета-интеграл Аски-Вильсона, определяющий меру для самого широкого класса ортогональных полиномов одной переменной с классическими свойствами — полиномов Аски-Вильсона, выражающихся через ${}_4\varphi_3$ ряд. Однопараметрическое расширение этого интеграла, найденное Рахманом, определяет меру для непрерывных ${}_{10}\varphi_9$ биортогональных рациональных функций. Несколько типов многомерных аналогов этих q-бета-интегралов, связанных с корневыми системами A_n и C_n, было найдено Густафсоном и некоторое время считалось, что это самые общие возможные бета-интегралы.

Обычные и q-гипергеометрические функции связаны с рациональными и тригонометрическими решениями уравнения Янга-Бакстера – ключевого уравнения квантового метода обратной задачи рассеяния, разработанного в ПОМИ РАН. Имеются также эллиптические решения этого уравнения, порождающие наиболее сложные известные интегрируемые системы. Однако, спектральные задачи (т.е. уравнения на собственные значения для полного набора коммутирующих переменных) в последнем случае не решаются обычными методами. Изучение соответствующих дифференциальных и конечно-разностных уравнений с эллиптическими коэффициентами представляет собой важную задачу математической физики.

Недавно были получены качественно новые результаты в этой области. В работе Френкеля и Тураева (1997 г.) было показано, что больцмановские веса для обобщенных SOS-моделей статистической механики выражаются через эллиптическое обобщение обрывающегося совершенно уравновешенного сбалансированного ${}_{10}\varphi_9$ ряда. В работе Спиридонова и Жеданова (1999 г.) тот же ряд был получен с помощью автомодельных редукций цепочки спектральных преобразований для обобщенной задачи на собственные значения. Появление такой принципиально новой специальной функции поставило вопрос о существовании полномасштабного обобщения теории функций гипергеометрического типа на эллиптический уровень. Настоящая диссертация посвящена решению этой весьма актуальной проблемы.

Диссертация имеет две основные цели:

1) построение общей теории рядов и интегралов гипергеометрического типа, связанных с эллиптическими функциями и тета-функциями Якоби, включая классификацию эллиптических бета-интегралов;

2) изучение семейства непрерывных биортогональных функций одной переменной, выражающихся в виде произведения двух обрывающихся совершенно уравновешенных ${}_{12}E_{11}$ эллиптических гипергеометрических рядов со специальным выбором параметров и обобщающих полиномы Аски-Вильсона и биортогональные рациональные функции Рахмана.

Научная новизна и практическая ценность диссертации.

Центральным результатом диссертации является открытие нового класса точно вычисляемых интегралов, названных *эллиптическими бета-интегралами*, и построение системы биортогональных функций, связанных с одномерным интегралом такого типа. Работа Френкеля и Тураева 1997 г. содержала описание эллиптических обобщений суммы Джексона для обрывающегося ${}_8\varphi_7$ ряда и преобразования Бэйли для обрывающегося ${}_{10}\varphi_9$ ряда, но в ней отсутствовало понятие эллиптических гипергеометрических интегралов и совершенно не затрагивались функции многих переменных. В совместной работе автора с Жедановым 1999 г. так же обсуждался только однократный ряд такого типа. Эллиптическая гамма-функция, как независимый объект теории специальных функций, была рассмотрена Рюйсенаарсом в 1997 г. с удовлетворительным с современной точки зрения анализом ее свойств. Впервые функции такого типа появились в работе Джексона 1905 г. В неявном виде эта функция возникала также во многих исследованиях по точно решаемым моделям статистической механики, начиная со статьи Бахтера 1972 г. по восьмивершинной модели. Некоторые дополнительные важные свойства этой функции были установлены Фельдером и Варченко в 1999 г. При этом точных формул интегрирования, связанных с этой обобщенной гамма-функцией, ни в одном из упомянутых исследований не предлагалось.

В работах автора, представленных в диссертации, построены наиболее важные недостающие структурные элементы теории эллиптических гипергеометрических функций. Так, тщательный анализ структуры общих эллиптических гипергеометрических рядов и установление глубокой связи условий балансировки и совершенной уравновешенности с условиями эллиптичности, привели к обоснованной смене системы обозначений для таких рядов. Принципиально новым явилось вычисление контурного интеграла от специфической комбинации эллиптических гамма-функций, базисные переменные которых q и p удовлетворяют ограничениям $|q|, |p| < 1$, с пятью свободными параметрами, в виде другой комбинации эллиптических гамма-функций. С помощью анализа структуры вычетов этого интеграла, выведена сумма Френкеля-Тураева и, таким образом, установлено, что с каждым эллиптическим бета-интегралом можно естественным образом ассоциировать функции, заданные в виде эллиптических гипергеометрических рядов.

Следующим принципиальным шагом явилось построение многомерных эллиптических бета-интегралов, связанных с системами корней A_n и C_n, включая эллиптический аналог интеграла Сельберга. Всего было найдено семь различных точных формул интегрирования, одна из которых оказалась новой даже на обычном и q-гипергеометрическом уровнях.

Нетривиальным новым свойством эллиптических гипергеометрических рядов и интегралов является их неприводимость — они не имеют хороших конфлюэнтных пределов при стремлении параметров к нулю (в мультипликативной системе обозначений) или бесконечности. Поэтому любая формула суммирования или интегрирования на эллиптическом уровне является уникальным тождеством.

В теории обычных и q-гипергеометрических рядов хорошо известна техника пар Бэйли и связанных с ними цепочек преобразований, позволяющая выводить нетривиальные соотношения для таких рядов (в частности, так доказываются знаменитые тождества Роджерса-Рамануджана). В диссертации эта техника обобщена на эллиптические гипергеометрические ряды. Более того, впервые построены интегральные аналоги цепочек Бэйли и доказан ряд нетривиальных тождеств для эллиптических гипергеометрических интегралов.

Важнейшим новым результатом диссертации является построение системы мероморфных биортогональных функций одной независимой переменной, обобщающих полиномы Якоби, полиномы Аски-Вильсона и рациональные функции Рахмана. Они выражаются через эллиптические гипергеометрические ряды и обладают необходимым набором классических свойств: трехчленным рекуррентным соотношением, разностным уравнением второго порядка, самодуальностью, и так далее. Качественно новым элементом является их двухиндексная биортогональность, характерная для функций двух независимых переменных. Соответствующая мера определяется одномерным эллиптическим бета-интегралом.

Стандартной областью определения параметров q и p в упомянутых выше функциях служит открытый диск $|q|, |p| < 1$. В теории q-гипергеометрических функций относительно недавно был найден способ перехода от области $|q| < 1$ к случаю $|q| = 1$. Для этого необходимо воспользоваться функцией двойного синуса, которая может также рассматриваться как q-гамма-функция определенная при $|q| \leq 1$. Эта функция оказалась также связанной с концепцией модулярного дубля для квантовых групп, введенной Фаддеевым в 1995 г. В диссертации предложен эллиптический аналог функции двойного синуса, представляющий собой новый тип эллиптической гамма-функции, хорошо определенной в режиме $|p| < 1, |q| = 1$. С его помощью были построены соответствующие аналоги основных эллиптических гипергеометрических функций.

Полученные результаты имеют большую прикладную ценность. Часть приложений уже упоминалась выше, а в качестве другого перспективного направления укажем на необходимость установления какая интегрируемая модель типа Калоджеро-Сазерленда-Мозера скрывается за каждым из многомерных эллиптических бета-интегралов и выяснения за какой подкласс решений соответствующих спектральных задач они отвечают (одномерная система оказывается связанной с одночастичным сектором релятивистского обобщения модели Иноземцева, предложенного ван Диехеном в 1995 г.). Также необходимо прояснить связь с уравнением Янга-Бакстера, найти интегральные представления для его эллиптических решений и проанализировать возможность появления новых решений, связанных с эллиптическими гипергеометрическими функциями.

В качестве основных открытых проблем в самой теории эллиптических гипергеометрических функций укажем на необходимость разработки правил обращения с бесконечными рядами и анализ полноты функциональных решений возникающих конечно-разностных уравнений в гильбертовом пространстве. При их рассмотрении, безусловно, потребуются конструкции, введенные в данной диссертации. Отметим, что некоторые результаты, положенные в основу диссертации, уже получили существенное развитие в работах ряда зарубежных исследователей. В частности, они были применены в анализе решений эллиптического аналога уравнений Пенлеве (Кадживара и др., 2003 г.) и в построении многомерных аналогов двухиндексных биортогональных функций, связанных с многомерным шестипараметрическим эллиптическим бета-интегралом для системы корней BC_n (Рэйнс, 2003-2004 гг.).

На защиту выдвигаются следующие результаты.

1. Построена одномерная эллиптическая бета-функция, зависящая от пяти независимых параметров и двух базисных переменных. Она определяет принципиально новый класс точно вычисляемых интегралов, обобщающих бета-интеграл Эйлера, q-бета-интегралы Аски-Вильсона, Рахмана и их различные предельные случаи.

2. Предложено и полностью доказано несколько многомерных эллиптических бета-интегралов различных типов, связанных с системами корней A_n и C_n. Один из этих интегралов представляет собой эллиптическое обобщение интеграла Сельберга, имеющего фундаменталь-

ное значение из-за большого числа приложений.

3. Построена общая теория рядов и интегралов гипергеометрического типа связанных с тета-функциями Якоби, названных тета-гипергеометрическими функциями. Прояснено происхождение условий балансировки, вполне уравновешенности и совершенной уравновешенности для функций гипергеометрического типа с точки зрения условий эллиптичности, содержащихся в эллиптических гипергеометрических функциях.

4. Построена система непрерывных биортогональных функций одной переменной, для которых одномерный эллиптический бета-интеграл определяет меру. Построены трехчленное рекуррентное соотношение и разностное уравнение для этих функций. Открыт новый тип соотношений ортогональности, названный двухиндексной биортогональностью. На настоящее время — это самая общая система специальных функций одной переменной, обобщающая классические ортогональные полиномы Аски-Вильсона и биортогональные рациональные функции Рахмана.

5. Найдено эллиптическое обобщение цепочки Бэйли для рядов гипергеометрического типа и с его помощью выведен ряд тождеств для эллиптических гипергеометрических рядов. Впервые показано, что формализм цепочек Бэйли имеет интегральный аналог. С помощью одномерного эллиптического бета-интеграла построено двоичное дерево тождеств для многократных эллиптических гипергеометрических интегралов.

6. Вычислена самая общая известная на настоящий момент обрывающаяся цепная дробь, связанная с функциями гипергеометрического

типа. Она выражается через обрывающийся совершенно уравновешенный ${}_{12}E_{11}$ эллиптический гипергеометрический ряд.

7. Исходя из сумм вычетов в многомерных эллиптических бета-интегралах выведены формулы суммирования многократных эллиптических гипергеометрических рядов на корневых системах A_n и C_n.

8. Предложена модифицированная эллиптическая гамма-функция, которая хорошо определена в случае когда один из базисных параметров лежит на единичной окружности, $|q| = 1$. Найдены модифицированные эллиптические бета-интегралы, для которых подынтегральная функция и результат точного вычисления выражаются через эту обобщенную гамма-функцию.

9. Получен ряд новых результатов для q-гипергеометрических функций. С помощью модулярно преобразованной q-гамма-функции, введен новый класс q-функций Мейера, который был пропущен в предыдущих исследованиях. Строго доказаны многомерные q-бета-интегралы, выражающиеся через функцию двойного синуса и появляющиеся в формальном пределе $p \to 0$ из модифицированных эллиптических бета-интегралов на корневых системах A_n и C_n.

10. Построена (1+1)-мерная интегрируемая цепочка с дискретным временем (R_{II}-цепочка), которая обобщает обычную и релятивистскую цепочку Тоды с дискретным временем. Она получается из условия совместности двух разностных уравнений с рациональной зависимостью от спектрального параметра. Найдена автомодельная редукция R_{II}-цепочки, порождающая широкий класс эллиптических решений и приводящая к биортогональным функциям выражающимся

через совершенно уравновешенные эллиптические гипергеометрические ряды.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований, в отделе дифференциальных уравнений и отделе математической физики Математического института им. В.А. Стеклова РАН (г. Москва), а также в Санкт-Петербургском отделении этого института, в университетах в городах Монреаль (Канада), Париж (Франция), Сантьяго и Талька (Чили), Луван-ла-Нев (Бельгия), Институте Математики им. Макса Планка (Бонн, Германия). Также результаты диссертации были представлены в докладах на следующих международных конференциях и совещаниях: "Special functions" (Гон Конг, 1999 г.), школе передовых исследований НАТО "Special functions-2000: Current perspective and future directions" (Аризона, США, 2000 г.), "Fifth International Conference on Difference Equations and Applications" (Темуко, Чили, 2000 г.), "Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory" (Киев, Украина, 2000 г.), "Algebra and Theory of Numbers" (Талька, Чили, 2000 г.), "Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics" (Санкт Петербург, 2001 г.), "Special Functions in the Digital Age" (Институт Прикладной Математики, Миннеаполис, США, 2002 г.), "Foundations of Computational Mathematics" (Миннесота, США, 2002 г.), "Number Theory and Combinatorics in Physics" (Флорида, США, 2003 г.), "Jack, Hall-Littlewood, and Macdonald Polynomials" (Эдинбург, 2003 г.), "Special functions, orthogonal polynomials, quantum groups and related topics" (Бексбах, Германия, 2003 г.), "Классические и квантовые интегрируемые системы" (Протвино, 2002 г., 2003 г.; Дубна, 2004 г.), международном семинаре "Quarks-2004" (Псков, 2004 г.).

Публикации. По материалам исследований, представленных в диссертации, опубликована 21 работа.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Объем работы составляет 218 страниц и включает библиографический список из 264 наименований.

Содержание работы

Во введении кратко описывается эвристический подход к специальным функциям, инспирированный теорией интегрируемых систем, дается обоснование целей диссертации, проводится обзор литературы по ее теме и излагается план работы.

В первой главе последовательно рассматриваются различные спектральные задачи для дифференциальных и конечно-разностных операторов второго порядка одной независимой переменной. Основная цель этой главы состоит в описании нелинейных цепочек с дискретным временем, порождаемых преобразованиями типа Дарбу, выводе ряда их автомодельных решений и перечислении известных применений соответствующих спектральных задач в теоретической физике.

Первый параграф посвящен стандартному уравнению Шредингера. В разделе 1.1.1 выводится факторизационная цепочка, совпадающая с цепочкой преобразований Дарбу. В разделе 1.1.2 вводятся автомодельные потенциалы с экспоненциальным дискретным спектром и описана их связь с квантовыми алгебрами. В следующих двух разделах описаны когерентные состояния для этих потенциалов, а также продемонстрирована важность этих систем в теории солитонов и статистической механике. Этот материал приведен в качестве иллюстрации возможных приложений результатов всей диссертации.

Во втором параграфе излагается обобщение указанной схемы на конечно-разностное уравнение Шредингера или трехчленное рекуррентное соотношение для ортогональных полиномов. В частности показано, что процедура факторизации для соответствующего гамильтониана определяет цепочки Тоды и Вольтерра с дискретным временем.

Третий и четвертый параграфы содержат ключевые результаты этой главы. В разделе 1.3.1 вводятся функции $P_n^{(j)}(z)$ с $n, j \in \mathbf{Z}$, $z \in \mathbf{C}$, удовлетворяющие соотношениям

$$P_n^{(j+1)}(z) = \frac{D_n^{j+1} P_{n+1}^{(j)}(z) + C_n^{j+1}\,(z - \alpha_n^{j+1}) P_n^{(j)}(z)}{z - \lambda_{j+1}}, \tag{1}$$

$$P_n^{(j-1)}(z) = B_n^j P_n^{(j)}(z) + A_n^j\,(z - \beta_n^j)\, P_{n-1}^{(j)}(z), \tag{2}$$

где коэффициенты $A_n^j, B_n^j, C_n^j, D_n^j$ и спектральные переменные $\alpha_n^j, \beta_n^j, \lambda_j$ не зависят от z. Из условия совместности этой дискретной пары Лакса вытекает трехчленное рекуррентное соотношение

$$P_{n+1}^{(j)}(z) + r_n^j\,(v_n^j - z) P_n^{(j)}(z) + u_n^j\,(z - \alpha_n^j)(z - \beta_n^j)\, P_{n-1}^{(j)}(z) = 0, \tag{3}$$

в котором потенциалы u_n^j, r_n^j, v_n^j имеют вид

$$u_n^j = \frac{A_n^j\, C_n^j}{D_n^j\, B_{n+1}^j}, \qquad r_n^j = \frac{1 - D_n^j\, A_{n+1}^j - C_n^j\, B_n^j}{D_n^j\, B_{n+1}^j},$$

$$r_n^j\, v_n^j = \frac{\lambda_j - \beta_{n+1}^j\, D_n^j\, A_{n+1}^j - \alpha_n^j\, C_n^j\, B_n^j}{D_n^j\, B_{n+1}^j} \tag{4}$$

с ограничениями $\beta_n^j = \beta_n$ и $\alpha_n^j = \alpha_{n+j}$. В дополнение выполняются соотношения

$$\frac{A_n^j C_n^j}{B_{n+1}^j D_n^j} = \frac{A_n^{j+1}\, C_{n-1}^{j+1}}{B_n^{j+1}\, D_n^{j+1}}, \tag{5}$$

$$\frac{C_n^j\, B_n^j + A_{n+1}^j D_n^j - 1}{B_{n+1}^j D_n^j} = \frac{C_n^{j+1} B_n^{j+1} + A_n^{j+1} D_{n-1}^{j+1} - 1}{B_n^{j+1}\, D_n^{j+1}}, \tag{6}$$

$$\frac{\alpha_{n+j}\, C_n^j\, B_n^j + \beta_{n+1} A_{n+1}^j D_n^j - \lambda_j}{B_{n+1}^j D_n^j}$$
$$= \frac{\alpha_{n+j+1} C_n^{j+1} B_n^{j+1} + \beta_n\, A_n^{j+1} D_{n-1}^{j+1} - \lambda_{j+1}}{B_n^{j+1}\, D_n^{j+1}}. \qquad (7)$$

Эта система уравнений определяет (1+1)-мерную интегрируемую нелинейную цепочку с дискретным временем, названную R_{II}-цепочкой.

Граничные условия $P_0^{(j)}(z) = p_j$, $P_1^{(j)}(z) = r_0^j(z - v_0^j)$, где p_j, r_0^j ненулевые числа, приводят к тому, что $P_n^{(j)}(z)$, $n \geq 0$, становятся полиномами n-й степени от z. В разделе 1.3.2 выводятся рекуррентные соотношения для полиномов $Q_n^{(j)}(z)$, сопряженных $P_n^{(j)}(z)$ в смысле условия биортогональности между этими полиномами.

В четвертом параграфе изучаются дискретные симметрии R_{II}-цепочки и связанные с ними автомодельные решения. В частности, в разделе 1.4.1 описаны четыре нетривиальных инволютивных преобразования, индуцированных дискретными преобразованиями двумерной дискретной решетки переменных n и j: 1) $j \to -j, n \to -n$; 2) $n \to j, j \to n$; 3) $j \to -j - n$; 4) $n \to -n - j$. В свою очередь, эти симметрии индуцируют автомодельную редукцию R_{II}-цепочки, определяемую следующим анзацем обобщенного разделения переменных:

$$\begin{aligned}
A_n^j &= \frac{d(n)\rho(2j+n)}{g(2n+j)g(2n+j-1)\phi(n-j)\phi(n-j-1)}, \qquad B_n^j = 1,\\
C_n^j &= \frac{c(n+j)\phi(n-j)\phi(n-j+1)}{\sigma(j)g(2n+j)g(2n+j+1)},\\
D_n^j &= \frac{\rho(2j+n)\phi(n-j)\phi(n-j+1)}{\sigma(j)}, \qquad (8)
\end{aligned}$$

где d, ρ, g, ϕ и σ есть неизвестные функции своих аргументов. Дальнейший анализ условия мероморфности решений приводит к ограничениям $\phi(x) = \psi(x - x_0)$, $g(x) = \psi(x - x_2)$, $\rho(x) = \psi(x - x_1)$, где $\psi(x)$ некоторая нечетная функция, $\psi(-x) = -\psi(x)$, и $\sigma(x) = d(x + x_0)$, $c(x) = d(x_2 - x)$ с $x_2 = x_0 + x_1$.

В следующих двух разделах находится широкий класс явных решений R_{II}-цепочки. Первый тип решений описывается рациональными функциями, зависящими от 8 непрерывных параметров (в дополнение к дискретной переменной n). Решение соответствующего трехчленного рекуррентного соотношения (3) удается выразить через совершенно уравновешенный 2-сбалансированный гипергеометрический ряд ${}_9F_8$. Второй тип решений выражается через элементарные (тригонометрические или гиперболические) функции, определяющие q-деформацию предыдущего случая, и приводит к R_{II}-полиномам в виде совершенно уравновешенного сбалансированного ${}_{10}\varphi_9$ ряда. Только специальный выбор значения трех параметров сводит эти функции к известным биортогональным рациональным функциям Вильсона-Рахмана.

В разделе 1.4.3 конструируется наиболее важный класс решений, описывающий эллиптическую деформацию тригонометрического случая. Для него имеем $\psi(x) = [x]$, где $[x]$ есть удобное обозначение для тета-функции Якоби $\theta_1(hx)$ с некоторым произвольным параметром h и модулярным параметром τ, а также $d(x) = [x]\prod_{k=1}^{5}[x-d_k]$ со свободными параметрами d_k, удовлетворяющими ограничению $\sum_{k=1}^{5} d_k = 1 + 2(x_0 + x_2)$. Эти решения приводят к полиномам, выражающимся через совершенно уравновешенный ${}_{12}v_{11}$ эллиптический гипергеометрический ряд. Общие ряды такого типа имеют вид

$$ {}_{r+1}v_r(a_0;\ a_1,\ldots,a_{r-4};h,\tau;w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[a_0+2k]}{[a_0]} \prod_{m=0}^{r-4} \frac{[a_m]_k}{[1+a_0-a_m]_k} w^k, \qquad (9)$$

где $[a]_k = \prod_{n=0}^{k-1}[a+n]$ (с соглашением $[a]_0 = 1$) и параметры $a_0,\ldots,a_{r-4}$ удовлетворяют условию балансировки

$$\sum_{m=1}^{r-4} a_m = \frac{r-7}{2} + \frac{r-5}{2} a_0. \qquad (10)$$

В необходимом нам $r = 11$ случае, имеем $w = 1$ и довольно сложную зависимость a_j от параметров эллиптического решения R_{II}-цепочки. Для наиболее интересной самодуальной системы полиномов, появляющейся при специальном выборе трех параметров, получаем $P_n^{(j)}(z) = Z_n^j(z)\zeta_n^j(0)\,{}_{12}v_{11}$ с аргументами $a_0 = 2j + 1 - x_1, a_1 = -n, a_2 = j + 1 - x_2 + n, a_{3,4,5} = j + 1 + x_0 - d_{3,4,5}, a_{6,7} = j + 1 \pm \xi + x_0 - e_1$, $w = 1$, где переменные ξ, e_1, e_2 появляются из параметризации

$$z(\xi) = \frac{[\xi][\xi + e_2 - e_1]}{[\xi + d_2 - e_1][\xi + d_1 - e_1]}, \quad \xi \in \mathbf{C},$$

с $e_1 + e_2 = d_1 + d_2$ и $\alpha_k = z(k - x_2 + e_1), \beta_k = z(k - e_2), \lambda_k = z(k + x_0 - e_2)$, $k \in \mathbf{N}$. При этом коэффициенты $Z_n^j(z) = \prod_{k=1}^n (z - \alpha_{j+k})$ и $\zeta_n^j(0) = (-1)^n \prod_{m=0}^{n-1} C_m^{j+1}/D_m^{j+1}$ могут быть в явном виде выражены через отношения произведений тета-функций.

Последний параграф этой главы содержит описание нелинейной цепочки спектральных преобразований для обобщенной задачи на собственные значения с матрицами Якоби, допускающими разбиение R_{II}-полиномов на четные и нечетные. Она обобщает цепочку Вольтерра с дискретным временем (или g-алгоритм Бауэра).

Вторая глава посвящена общей теории рядов гипергеометрического типа, связанных с тета-функциями Якоби.

После описания мультипликативной системы обозначений, во втором параграфе вводятся формальные степенные ряды ${}_sE_r$ и ${}_sG_r$, обобщающие обычные и базисные односторонние гипергеометрические ряды ${}_sF_r$ и ${}_s\varphi_r$ и их двусторонние аналоги ${}_sH_r$ и ${}_s\psi_r$. Они определяются в духе идей Похгаммера и Хорна для обычных рядов: *формальные ряды* $\sum_{n\in\mathbf{N}} c_n$ *и* $\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n$ *называются тета-гипергеометрическими рядами если отношение* $h(n) = c_{n+1}/c_n$ *и* $1/h(n)$ *являются мероморфными двояко-квазипериодическими функциями* n *(рассматриваемой как комплексная переменная), аналогич-*

ными тета-функциям Якоби.

Эллиптические (т.е. мероморфные двояко периодические) функции играют фундаментальную роль в математике. В третьем параграфе вводятся эллиптические гипергеометрические ряды как ряды, для которых $h(n)$ есть эллиптическая функция $n \in \mathbf{C}$. Общий односторонний ряд такого типа в мультипликативной системе обозначений имеет вид

$$
{}_{r+1}E_r \left(\begin{matrix} t_0, \ldots, t_r \\ w_1, \ldots, w_r \end{matrix} ; q, p; x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta(t_0, t_1, \ldots, t_r; p; q)_n}{\theta(q, w_1, \ldots, w_r; p; q)_n} x^n,
$$

где $\theta(t_0, \ldots, t_k; p; q)_n = \prod_{m=0}^{k} \theta(t_m; p; q)_n$ и $\theta(t; p; q)_n = \prod_{m=0}^{n-1} \theta(tq^m; p)$. Укороченная тета-функция Якоби имеет вид $\theta(z; p) = (z; p)_\infty (pz^{-1}; p)_\infty$. Дополнительно, параметры этого ряда должны удовлетворять условию балансировки $\prod_{m=0}^{r} t_m = q \prod_{k=1}^{r} w_k$, обеспечивающему эллиптичность $h(n)$.

Условия эллиптичности по всем параметрам, входящим в аргументы тета-функций, приводит к ограничениям $qt_0 = t_1 w_1 = \ldots = t_r w_r$, известным как условия вполне уравновешенности в теории q-гипергеометрических рядов. Дополнительное условие совершенной уравновешенности на эллиптическом уровне существенно отличается от q-случая. Оно имеет вид

$$
t_{r-3} = t_0^{1/2} q, \quad t_{r-2} = -t_0^{1/2} q, \quad t_{r-1} = t_0^{1/2} q p^{-1/2}, \quad t_r = -t_0^{1/2} q p^{1/2}
$$

и связано с удвоением аргумента тета-функций. После наложения этих условий, ${}_{r+1}E_r$ ряд принимает специфический вид, который в аддитивных обозначениях может быть переписан в форме (9) (при этом $q = e^{2\pi i h}, p = e^{2\pi i \tau}, t = q^a, x = -w$). С общей точки зрения, требование эллиптичности проясняет происхождение условий балансировки (с существенным различием между случаями четного и нечетного r) и вполне уравновешенности для рядов гипергеометрического типа.

В параграфе 2.3 описывается эллиптическая цепочка Бэйли, позволяющая выводить нетривиальные соотношения для эллиптических гипергеометрических рядов. В ее определении используется сумма Френкеля-Тураева для обрывающегося ${}_{10}v_9$ ряда (9) с $w = 1$. В параграфе 2.4 дается общее определение многократных эллиптических гипергеометрических рядов и приводится несколько типов обобщений суммы Френкеля-Тураева на многократные ряды на корневых системах. Так, для системы C_n справедлива формула

$$\sum_{\substack{0\le\lambda_j\le N_j\\ j=1,\ldots,n}} q^{\sum_{j=1}^n j\lambda_j} \prod_{1\le j<k\le n} \frac{\theta(t_jt_kq^{\lambda_j+\lambda_k}, t_jt_k^{-1}q^{\lambda_j-\lambda_k};p)}{\theta(t_jt_k,t_jt_k^{-1};p)}$$
$$\times \prod_{1\le j\le n}\left(\frac{\theta(t_j^2q^{2\lambda_j};p)}{\theta(t_j^2;p)}\prod_{0\le r\le 2n+3}\frac{\theta(t_jt_r;p;q)_{\lambda_j}}{\theta(qt_jt_r^{-1};p;q)_{\lambda_j}}\right) \qquad (11)$$
$$= \theta(qa^{-1}b^{-1}, qa^{-1}c^{-1}, qb^{-1}c^{-1};p;q)_{N_1+\cdots+N_n}$$
$$\times \prod_{1\le j<k\le n}\frac{\theta(qt_jt_k;p;q)_{N_j}\theta(qt_jt_k;p;q)_{N_k}}{\theta(qt_jt_k;p;q)_{N_j+N_k}}$$
$$\times \prod_{1\le j\le n}\frac{\theta(qt_j^2;p;q)_{N_j}}{\theta(qt_ja^{-1},qt_jb^{-1},qt_jc^{-1},q^{1+N_1+\cdots+N_n-N_j}t_j^{-1}a^{-1}b^{-1}c^{-1};p;q)_{N_j}},$$

где параметры $t_0,\ldots,t_{2n+3}$, удовлетворяют условиям балансировки $\prod_{r=0}^{2n+3} t_r = q$ и обрыва $q^{N_j}t_jt_{n+j} = 1$, $j = 1,\ldots,n$, $N_j \in \mathbf{N}$, и $a = t_{2n+1}$, $b = t_{2n+2}$, $c = t_{2n+3}$. Здесь также использованы компактные обозначения $\theta(t_0,\ldots,t_k;p) = \theta(t_0;p)\cdots\theta(t_k;p)$.

В последнем параграфе проводится обсуждение возможности обобщения эллиптических результатов на Римановы поверхности произвольного рода. При этом удается вывести довольно простую формулу суммирования для однократного многопараметрического телескопирующегося ряда, построенного из многомерных тета-функций Римана.

Третья глава посвящена построению теории интегралов, обобщающих обычные и q-гипергеометрические интегралы на эллиптический уровень.

Согласно общему определению таких объектов, данному в параграфе 3.1, необходимо взять мероморфную функцию $\Delta(y_1, \ldots, y_n)$ аргументов $y_1, \ldots,$ y_n и сконструировать многократные интегралы

$$I_n = \int_{\mathcal{D}} \Delta(y_1, \ldots, y_n)\, dy_1 \cdots dy_n \qquad (12)$$

с некоторым многомерным циклом $\mathcal{D} \in \mathbf{C}^n$, которые называются *эллиптическими гипергеометрическими интегралами*, если для всех $\ell = 1, \ldots, n$ отношения

$$h_\ell(\mathbf{y}) = \frac{\Delta(y_1, \ldots, y_\ell + 1, \ldots, y_n)}{\Delta(y_1, \ldots, y_\ell, \ldots, y_n)} \qquad (13)$$

являются эллиптическими функциями переменных $y_1, \ldots, y_n$. Величины I_n называются *тета-гипергеометрическими интегралами* если $h_\ell(\mathbf{y})$ и $1/h_\ell(\mathbf{y})$ суть мероморфные функции, удовлетворяющие условиям двоякой квазипериодичности с экспоненциальными множителями, подобными множителям для сигма-функции Вейерштрасса. Пользуясь этим определением, в параграфе 3.1 выводится общий вид таких интегралов в одномерном случае, что приводит к эллиптическому и тета-аналогам функции Мейера.

В параграфе 3.2 получен один из ключевых результатов диссертации — вычислен одномерный эллиптический бета-интеграл.

Теорема 1. *Пусть $t_1, \ldots, t_6 \in \mathbf{C}$ удовлетворяют ограничениям $|t_j| < 1$ и $\prod_{j=1}^6 t_j = pq$. Обозначим единичную окружность ориентированную против часовой стрелки как $\mathbf{T}$. Тогда,*

$$\int_{\mathbf{T}} \frac{\prod_{j=1}^6 \Gamma(t_j z; p, q)\Gamma(t_j z^{-1}; p, q)}{\Gamma(z^2; p, q)\Gamma(z^{-2}; p, q)} \frac{dz}{z} = \frac{4\pi i}{(q;q)_\infty (p;p)_\infty} \prod_{1 \le j < k \le 6} \Gamma(t_j t_k; p, q), \qquad (14)$$

где

$$\Gamma(z; p, q) = \prod_{j,k=0}^{\infty} \frac{1 - z^{-1} q^{j+1} p^{k+1}}{1 - z q^j p^k}$$

есть эллиптическая гамма-функция, хорошо определенная при $|p|, |q| < 1$ *и удовлетворяющая уравнению* $\Gamma(qz;p,q) = \theta(z;p)\Gamma(z;p,q)$.

С помощью этого интеграла, в параграфе 3.4 строятся два интегральных аналога цепочек Бэйли. С их помощью выводится двоичное дерево тождеств для многократных эллиптических гипергеометрических интегралов. Этот результат описывает первый пример интегрального аналога леммы Бэйли.

В параграфах 3.5, 3.6 и 3.7 выводятся n-кратные эллиптические бета-интегралы на корневых системах A_n и C_n. Всего получено семь различных точных формул интегрирования, разбитых на три типа. Тип I характеризуется наличием $2n+3$ свободных параметров и доказываются с помощью разностных уравнений. Тип II выводится из типа I с помощью составных многомерных интегралов путем разных порядков интегрирования в них и они содержат меньше чем $2n+3$ параметра. Интегралы типа III вычисляются как нетривиальные детерминанты от одномерного эллиптического бета-интеграла. Все эти формулы достаточно громоздки и в качестве примера мы приведем только интегралы типа I и II для системы корней C_n.

Теорема 2. *Пусть* $t_1, \ldots, t_{2n+4} \in \mathbf{C}$ *удовлетворяют ограничениям* $|t_j| < 1$ *и* $\prod_{j=1}^{2n+4} t_j = pq$. *Тогда,* C_n*-интеграл типа I имеет вид*

$$\int_{\mathbf{T}^n} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1}{\Gamma(z_iz_j, z_iz_j^{-1}, z_i^{-1}z_j, z_i^{-1}z_j^{-1}; p,q)} \times \prod_{i=1}^{n} \frac{\prod_{j=1}^{2n+4}\Gamma(t_jz_i, t_jz_i^{-1}; p,q)}{\Gamma(z_i^2, z_i^{-2}; p,q)} \frac{dz}{z} = \frac{2^n n! (2\pi i)^n}{(q;q)_\infty^n (p;p)_\infty^n} \prod_{1\le j<k\le 2n+4} \Gamma(t_jt_k; p,q), \tag{15}$$

где использованы компактные обозначения $\Gamma(a_1,\ldots,a_l;p,q) \equiv \Gamma(a_1;p,q)\cdots\Gamma(a_l;p,q)$ *и* $dz/z = (dz_1/z_1)\cdots(dz_n/z_n)$.

Эллиптический аналог интеграла Сельберга относится к типу II. Он выводится в разделе 3.5.2 из C_n-интеграла типа I и имеет вид:

Теорема 3. *Пусть выполняются ограничения* $|p|, |q|, |t|, |t_r| < 1$ *(где* $r = 0, \ldots, 4$*) и* $|pq| < |t^{2n-2} \prod_{s=0}^4 t_s|$. *Тогда*

$$\int_{\mathbb{T}^n} \Delta_n^{II}(\mathbf{z}; p, q) \frac{dz}{z} = \frac{2^n n! (2\pi i)^n}{(p;p)_\infty^n (q;q)_\infty^n} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(t^j; p, q)}{\Gamma(t; p, q)} \frac{\prod_{0 \le r < s \le 4} \Gamma(t^{j-1} t_r t_s; p, q)}{\prod_{r=0}^4 \Gamma(t^{1-j} t_r^{-1} B; p, q)}, \tag{16}$$

где $B \equiv t^{2n-2} \prod_{s=0}^4 t_s$ *и*

$$\begin{aligned} \Delta_n^{II}(\mathbf{z}; p, q) &= \prod_{1 \le j < k \le n} \frac{\Gamma(t z_j z_k, t z_j z_k^{-1}, t z_j^{-1} z_k, t z_j^{-1} z_k^{-1}; p, q)}{\Gamma(z_j z_k, z_j z_k^{-1}, z_j^{-1} z_k, z_j^{-1} z_k^{-1}; p, q)} \\ &\quad \times \prod_{j=1}^n \frac{\prod_{r=0}^4 \Gamma(t_r z_j, t_r z_j^{-1}; p, q)}{\Gamma(z_j^2, z_j^{-2}, B z_j, B z_j^{-1}; p, q)}. \end{aligned} \tag{17}$$

Из всех полученных точных формул интегрирования с помощью анализа структуры вычетов можно вывести точные формулы суммирования для эллиптических гипергеометрических рядов на корневых системах, обобщающих сумму Френкеля-Тураева. Иллюстрация этого метода дана в параграфе 3.8 выводом из интеграла (17) многократной суммы, предложенной ранее Варнааром.

Четвертая глава касается непосредственно биортогональных функций, связанных с одномерным эллиптическим бета-интегралом. Начинается она с описания эллиптической гипергеометрической функции

$$V(t_1, \ldots, t_8) = \frac{(p;p)_\infty (q;q)_\infty}{4\pi i} \int_C \frac{\prod_{k=1}^8 \Gamma(t_k z, t_k z^{-1}; p, q)}{\Gamma(z^2, z^{-2}; p, q)} \frac{dz}{z}, \tag{18}$$

где $|p|, |q| < 1$ и $|t_k| < 1$, $k = 1, \ldots, t_8$, с ограничением $\prod_{k=1}^8 t_k = p^2 q^2$, а C обозначает любой гладкий контур, ориентированный против часовой стрелки и разделяющий последовательности полюсов подынтегральной функции, сходящихся к точке $z = 0$, от их $z \to 1/z$ партнеров, уходящих на бесконечность. Далее выводятся преобразований симметрии и соотношения сопряжения для $V(t)$. Например,

$$\frac{\theta(t_1/qt_8, t_1t_8, t_8/t_1;p)}{\theta(t_1/t_2, t_2/qt_1;p)} \prod_{k=3}^{7} \theta(t_2t_k/q;p) \left(U(t) - U(qt_1, q^{-1}t_2)\right)$$
$$+ \frac{\theta(t_2/qt_8, t_2t_8, t_8/t_2;p)}{\theta(t_2/t_1, t_1/qt_2;p)} \prod_{k=3}^{7} \theta(t_1t_k/q;p) \left(U(t) - U(q^{-1}t_1, qt_2)\right)$$
$$= \theta(t_1t_2/q;p) \prod_{k=3}^{7} \theta(t_kt_8;p)\, U(t), \qquad (19)$$

где $U(t) = V(t)/\prod_{j=1}^{7}\Gamma(t_jt_8, t_j/t_8)$. После подстановки $t_1 = az, t_2 = a/z$ получаем разностное уравнение второго порядка по переменной z (эллиптическое гипергеометрическое уравнение), одно из решений которого дается $f(z) = U(az, a/z, t_3, \ldots, t_8)$, а линейно независимые решения можно получить простым растяжением параметров или z на p. После анализа структуры вычетов для функции $V(t)$, возникают соотношения сопряжения для совершенно уравновешенного ${}_{12}E_{11}$ эллиптического гипергеометрического ряда с аргументом $x = -1$. Эффективно они эквивалентны уравнениям пары Лакса для обобщенной спектральной задачи первой главы с автомодельными потенциалами.

В параграфе 4.2 вводится совершенно уравновешенный ${}_{12}E_{11}$ ряд со специальной параметризацией

$$R_n(z;q,p) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\theta(t_3q^{2j}/t_4;p)}{\theta(t_3/t_4;p)}$$
$$\times \frac{\theta(t_3/t_4, q/t_0t_4, q/t_1t_4, q/t_2t_4, t_3z, t_3/z, q^{-n}, Aq^{n-1}/t_4;p;q)_j}{\theta(q, t_3t_0, t_3t_1, t_3t_2, q/t_4z, qz/t_4, q^{n+1}t_3/t_4, q^{2-n}t_3/A;p;q)_j} q^j,$$

где $A = \prod_{r=0}^{4} t_r$. С помощью соотношений сопряжения, для этой функции выводится трехчленное рекуррентное соотношение по номеру $n \in \mathbf{N}$

$$(\gamma(z) - \alpha_{n+1})B(Aq^{n-1}/t_4)\left(R_{n+1}(z;q,p) - R_n(z;q,p)\right)$$
$$+ (\gamma(z) - \beta_{n-1})B(q^{-n})\left(R_{n-1}(z;q,p) - R_n(z;q,p)\right)$$

$$+\delta\left(\gamma(z)-\gamma(t_3)\right)R_n(z;q,p)=0, \tag{20}$$

где

$$B(x)=\frac{\theta\left(x,\frac{t_3}{t_4x},\frac{qt_3}{t_4x},\frac{qx}{t_0t_1},\frac{qx}{t_0t_2},\frac{qx}{t_1t_2},\frac{q^2\eta x}{A},\frac{q^2x}{A\eta};p\right)}{\theta\left(\frac{qt_4x^2}{A},\frac{q^2t_4x^2}{A};p\right)}, \tag{21}$$

$$\delta=\theta\left(\frac{q^2t_3}{A},\frac{q}{t_0t_4},\frac{q}{t_1t_4},\frac{q}{t_2t_4},t_3\eta,\frac{t_3}{\eta};p\right), \tag{22}$$

$$\gamma(z)=\frac{\theta(z\xi,z/\xi;p)}{\theta(z\eta,z/\eta;p)}, \tag{23}$$

$$\alpha_n=\gamma(q^n/t_4),\qquad \beta_n=\gamma(q^{n-1}A). \tag{24}$$

Здесь ξ и $\eta\neq\xi p^k,\xi^{-1}p^k$, $k\in\mathbf{Z}$, произвольные калибровочные параметры.

Аналогичным образом показывается, что $R_n(z;q,p)$ удовлетворяет разностному уравнению второго порядка по z

$$\mathcal{D}_\mu f(z)=0,\qquad \mathcal{D}_\mu=V_\mu(z)(T-1)+V_\mu(z^{-1})(T^{-1}-1)+\kappa_\mu, \tag{25}$$

где T обозначает оператор q-растяжения, $Tf(z)=f(qz)$, и

$$V_\mu(z)=\theta\left(\frac{t_4}{q\mu z},\frac{A\mu}{q^2z},\frac{t_4z}{q};p\right)\frac{\prod_{r=0}^4\theta(t_rz;p)}{\theta(z^2,qz^2;p)}, \tag{26}$$

$$\kappa_\mu=\theta\left(\frac{A\mu}{qt_4},\mu^{-1};p\right)\prod_{r=0}^{3}\theta\left(\frac{t_rt_4}{q};p\right) \tag{27}$$

со значениями спектрального параметра $\mu=q^n,n\in\mathbf{N}$.

В параграфе 4.3 получен еще один ключевой результат диссертации. Для функций $R_{nk}(z)\equiv R_n(z;q,p)R_k(z;p,q)$ и $T_{nk}(z)\equiv T_n(z;q,p)T_k(z;p,q)$, где

$$T_n(z;q,p)=\sum_{j=0}^{n}\frac{\theta(At_3q^{2j-1};p)}{\theta(At_3/q;p)}$$
$$\times\frac{\theta(At_3/q,A/t_0,A/t_1,A/t_2,t_3z,t_3/z,q^{-n},Aq^{n-1}/t_4;p;q)_j}{\theta(q,t_3t_0,t_3t_1,t_3t_2,A/z,Az,Aq^nt_3,q^{1-n}t_3t_4;p;q)_j}q^j,$$

доказано соотношение двухиндексной биортогональности.

Теорема 4. *Пусть $C_{mn,kl}$ обозначает контур, ориентированной против часовой стрелки и отделяющий точки $z = \{t_{0,1,2,3}p^a q^b,\ t_4 p^{a-k} q^{b-m},\ A^{-1}p^{a+1-l}q^{b+1-n}\}_{a,b\in\mathbb{N}}$ от точек с $z \to z^{-1}$ отраженными координатами. Тогда $R_{mk}(z)$ и $T_{nl}(z)$ удовлетворяют следующему соотношению биортогональности*

$$\int_{C_{mn,kl}} T_{nl}(z)R_{mk}(z)\Delta_E(z,\mathbf{t})\frac{dz}{z} = h_{nl}\mathcal{N}_E(\mathbf{t})\delta_{mn}\delta_{kl}, \tag{28}$$

где $\Delta_E(z,\mathbf{t})$ есть ядро эллиптического бета интеграла

$$\Delta_E(z,\mathbf{t}) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\prod_{m=0}^4 \Gamma(zt_m, z^{-1}t_m; q,p)}{\Gamma(z^2, z^{-2}, zA, z^{-1}A; q,p)}$$

и

$$\mathcal{N}_E(\mathbf{t}) = \frac{2\prod_{0\le m<s\le 4}\Gamma(t_m t_s; q,p)}{(q;q)_\infty (p;p)_\infty \prod_{m=0}^4 \Gamma(At_m^{-1}; q,p)}.$$

Нормировочные константы h_{nl} имеют вид

$$h_{nl} = \frac{\theta(A/qt_4;p)\theta(q, qt_3/t_4, t_0t_1, t_0t_2, t_1t_2, At_3; p;q)_n q^{-n}}{\theta(Aq^{2n}/qt_4;p)\theta(1/t_3t_4, t_0t_3, t_1t_3, t_2t_3, A/qt_3, A/qt_4; p;q)_n}$$
$$\times\frac{\theta(A/pt_4;q)\theta(p, pt_3/t_4, t_0t_1, t_0t_2, t_1t_2, At_3; q;p)_l p^{-l}}{\theta(Ap^{2l}/pt_4;q)\theta(1/t_3t_4, t_0t_3, t_1t_3, t_2t_3, A/pt_3, A/pt_4; q;p)_l}. \tag{29}$$

Принципиальная новизна соотношения (28) состоит в том, что оно характерно для биортогональных функций двух переменных, но оно оказывается справедливым и для указанных функций одной независимой переменной. Более того, функции $R_{nk}(z)$ и $T_{nk}(z)$ не имеют предела $p \to 0$ при $k \neq 0$, то есть в общем случае они существуют только на эллиптическом уровне.

В параграфе 4.4 описывается интегральное представление для симметричного произведения двух обрывающихся совершенно уравновешенных ${}_{12}E_{11}$ рядов. В следующем параграфе выводится обрывающаяся цепная дробь, связанная с трехчленным рекуррентным соотношением для функций $R_n(z;q,p)$. Она так же описывается аналогичным ${}_{12}E_{11}$ рядом. В параграфе 4.6 кратко описывается связь разностного уравнения для $R_n(z;q,p)$ с уравнением на собственные значения для одночастичного гамильтониана обобщенной конечно-разностной эллиптической модели типа Калоджеро и обсуждаются связанные проблемы.

Проблема построения эллиптических гипергеометрических функций в области $|p|<1, |q|=1$ рассматривается в пятой главе. В разделе 5.1 вводится модифицированная эллиптическая гамма-функция

$$G(u;\omega)=\prod_{j,k=0}^{\infty}\frac{(1-e^{-2\pi i\frac{u}{\omega_2}}q^{j+1}p^{k+1})(1-e^{2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\tilde{q}^{j+1}r^{k})}{(1-e^{2\pi i\frac{u}{\omega_2}}q^{j}p^{k})(1-e^{-2\pi i\frac{u}{\omega_1}}\tilde{q}^{j}r^{k+1})}, \tag{30}$$

где использована экспоненциальная параметризация

$$\begin{aligned} &q=e^{2\pi i\frac{\omega_1}{\omega_2}}, &&p=e^{2\pi i\frac{\omega_3}{\omega_2}}, &&r=e^{2\pi i\frac{\omega_3}{\omega_1}},\\ &\tilde{q}=e^{-2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_1}}, &&\tilde{p}=e^{-2\pi i\frac{\omega_2}{\omega_3}}, &&\tilde{r}=e^{-2\pi i\frac{\omega_1}{\omega_3}}, \end{aligned} \tag{31}$$

с некоторыми попарно несоизмеримыми комплексными переменными ω_1, ω_2,ω_3. Она удовлетворяет ключевому уравнению $G(u+\omega_1;\omega)=\theta(e^{2\pi i\frac{u}{\omega_2}};p)$ $\times G(u;\omega)$, аналогичному приведенному выше уравнению для $\Gamma(z;p,q)$. Выражение (30) хорошо определено при $|q|,|p|,|r|<1$, но представление

$$G(u;\omega)=e^{-\pi i P(u)}\Gamma(e^{-2\pi i\frac{u}{\omega_3}};\tilde{r},\tilde{p}), \tag{32}$$

где $P(u)$ есть полином третьей степени

$$P(u)=\frac{1}{3\omega_1\omega_2\omega_3}\left(u-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\omega_n\right)\left(u^2-u\sum_{n=1}^{3}\omega_n+\frac{\omega_1\omega_2\omega_3}{2}\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{\omega_n}\right), \tag{33}$$

показывает, что, в отличие от $\Gamma(z;q,p)$, эта эллиптическая гамма-функция хорошо определена при $|q|=1$ с $\omega_1/\omega_2>0$. В пределе $p,r\to 0$, функция $G(u;\omega)$ сводится к функции двойного синуса

$$\lim_{p,r\to 0}\frac{1}{G(u;\omega)}=S(u;\omega_1,\omega_2)=\frac{(e^{2\pi iu/\omega_2};q)_\infty}{(e^{2\pi iu/\omega_1}\tilde{q};\tilde{q})_\infty}. \tag{34}$$

В параграфе 5.2 выводятся аналоги эллиптических бета-интегралов, рассмотренных в третьей главе, в режиме $|p| < 1, |q| = 1$ (эти интегралы определены и при $|q| < 1$). Пусть $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) \geq 0$ и $\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_1), \mathrm{Im}(\omega_3/\omega_2) > 0$. Тогда одномерный интеграл такого типа имеет вид

$$\int_{-\omega_3/2}^{\omega_3/2} \frac{\prod_{n=0}^{4} G(g_n \pm u;\omega)}{G(\pm 2u, \mathcal{A} \pm u;\omega)} \frac{du}{\omega_2}$$
$$= -\frac{2(\tilde{q};\tilde{q})_\infty}{(q;q)_\infty (p;p)_\infty (r;r)_\infty} \frac{\prod_{0\leq n<m\leq 4} G(g_n + g_m;\omega)}{\prod_{n=0}^{4} G(\mathcal{A} - g_n;\omega)}. \quad (35)$$

Здесь интегрирование ведется вдоль сегмента прямой линии, соединяющей точку $-\omega_3/2$ с $\omega_3/2$, а также использовано компактное обозначение $G(a \pm b;\omega) \equiv G(a+b, a-b;\omega)$. Дополнительно подразумевается, что параметры g_n, $n = 0, \ldots, 4$, удовлетворяют ограничениям $\mathrm{Im}(g_n/\omega_3) < 0$, $\mathrm{Im}((\mathcal{A} - \omega_1 - \omega_2)/\omega_3) > 0$, с $\mathcal{A} \equiv \sum_{n=0}^{4} g_n$. Далее обсуждаются многомерные обобщения этого интеграла на корневые системы A_n (интегралы типа I) и C_n (интегралы типа I и II).

В параграфе 5.3 рассматривается предел $\mathrm{Im}(\omega_3/\omega_2) \to +\infty$ взятым так, что одновременно с $p \to 0$ мы имеем и $r \to 0$. Это приводит к q-бета-интегралам по бесконечным контурам, выражающимся через функцию двойного синуса. Эти интегралы доказываются независимым образом, так как взятый предел носит формальный характер. В разделе 5.3.1 изучен интеграл такого типа, связанный с модифицированным эллиптическим бета-интегралом типа II для системы корней C_n. В разделе 5.3.2 рассмотрены соответствующие партнеры для эллиптических бета-интегралов типа I. В параграфе 5.4 кратко описываются одномерные биортогональные функции с мерой, определяемой интегралом (35), и их q-гипергеометрическое вырождение.

В заключении перечислены основные результаты, выносимые на защиту.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах

1. J.F. van Diejen and V.P. Spiridonov, *An elliptic Macdonald-Morris conjecture and multiple modular hypergeometric sums*, Math. Res. Letters **7** (2000), 729–746.

2. J.F. van Diejen and V.P. Spiridonov, *Elliptic Selberg integrals*, Internat. Math. Res. Notices, no. 20 (2001), 1083–1110.

3. J.F. van Diejen and V.P. Spiridonov, *Modular hypergeometric residue sums of elliptic Selberg integrals*, Lett. Math. Phys. **58** (2001), 223–238.

4. J.F. van Diejen and V.P. Spiridonov, *Elliptic beta integrals and modular hypergeometric sums: an overview*, Rocky Mountain J. Math. **32**(2) (2002), 639–656.

5. J.F. van Diejen and V.P. Spiridonov, *Unit circle elliptic beta integrals*, The Ramanujan J. (2005), в печати (preprint arXiv: math.CA/0309279).

6. А.С. Жеданов, В.П. Спиридонов, *Гипергеометрические биортогональные рациональные функции*, Успехи Мат. Наук **54**(2) (1999), 173–174.

7. V.P. Spiridonov, *Solitons and Coulomb plasmas, similarity reductions and special functions*, Proc. International Workshop *Special Functions* (Hong Kong, China, June 21-25, 1999), World Scientific, 2000, pp. 324–338.

8. V.P. Spiridonov, *An elliptic beta integral*, Proc. Fifth International Conference on Difference Equations and Applications (Temuco, Chile, January 3–7, 2000), Taylor and Francis, London, 2001, pp. 273–282.

9. В.П. Спиридонов, *Об эллиптической бета-функции*, Успехи Мат. Наук **56** (1) (2001), 185–186.

10. V.P. Spiridonov, *Elliptic beta integrals and special functions of hypergeometric type*, Proc. NATO ARW *Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory* (Kiev, Ukraine, September 25–30, 2000), Kluwer, Dordrecht, 2001, pp. 305–313.

11. V.P. Spiridonov, *Theta hypergeometric series*, Proc. NATO ASI *Asymptotic Combinatorics with Applications to Mathematical Physics* (St. Petersburg, Russia, July 9–23, 2001), Kluwer, Dordrecht, 2002, pp. 307–327.

12. V.P. Spiridonov, *An elliptic incarnation of the Bailey chain*, Internat. Math. Res. Notices, no. 37 (2002), 1945–1977.

13. В.П. Спиридонов, *Модулярность и полная эллиптичность некоторых многократных рядов гипергеометрического типа*, Теор. Мат. Физ. **135** (2003), 462–477.

14. V.P. Spiridonov, *Theta hypergeometric integrals*, Алгебра и Анализ **15** (6) (2003), 161–215.

15. В.П. Спиридонов, *Дерево Бэйли для интегралов*, Теор. Мат. Физ. **139** (2004), 104–111.

16. V.P. Spiridonov, *A multiparameter summation formula for theta functions*, Proc. Internat. Workshop on Jack, Hall-Littlewood, and Macdonald Polynomials (Edinburgh, September 23-26, 2003), Contemp. Math. (2005), в печати (preprint arXiv: math.CA/0408366).

17. V.P. Spiridonov, *Short proofs of the elliptic beta integrals*, preprint (2004), arXiv: math.CA/0408369.

18. V.P. Spiridonov and A.S. Zhedanov, *Spectral transformation chains and some new biorthogonal rational functions*, Commun. Math. Phys. **210** (2000), 49–83.

19. V.P. Spiridonov and A.S. Zhedanov, *Classical biorthogonal rational functions on elliptic grids*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **22** (2) (2000), 70–76.

20. V.P. Spiridonov and A.S. Zhedanov, *Generalized eigenvalue problem and a new family of rational functions biorthogonal on elliptic grids*, Proc. NATO ASI *Special Functions-2000: Current Perspective and Future Directions* (Tempe, USA, May 29–June 9, 2000), Kluwer, Dordrecht, 2001, pp. 365–388.

21. V.P. Spiridonov and A.S. Zhedanov, *To the theory of biorthogonal rational functions*, RIMS Kokyuroku **1302** (2003), 172–192.

Получено 21 января 2005 г.

Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 25.01.2005.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 1,40. Тираж 100 экз. Заказ № 54753.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/