ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4-2005-154

На правах рукописи
УДК 530.145

ПУПЫШЕВ
Василий Вениаминович

МЕТОДЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ПРОБЛЕМЕ НЕСКОЛЬКИХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Дубна 2005

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор С. Л. Яковлев

доктор физико-математических наук,
профессор Ю. П. Рыбаков

доктор физико-математических наук,
профессор С. И. Виницкий

Ведущая организация:

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова, г. Москва.

Защита диссертации состоится " ____ " ____________ 2005 г. на заседании Специализированного совета Д 720.01.01 в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединённого института ядерных исследований, по адресу г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "____ " ____________ 2005 г.

Учёный секретарь совета:
доктор физико-математических наук С. В. Голоскоков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Функциональным разложением обычно называется представление функции в виде суммы двух или более слагаемых. На функциональных разложениях основаны многие методы теоретической физики и математики, например, метод дифференциальных уравнений Фаддеева, методы фазовых, гиперсферических и сплайн-функций.

Метод фазовых функций в квантовой механике – один из наиболее физически прозрачных и простых способов решения задачи двух частиц. Дифференциальные трехчастичные уравнения Фаддеева с физическими граничными условиями, впервые полученными С.П. Меркурьевым, – безмодельная, если не считать задания парных взаимодействий, математически корректная и удобная для качественного и численного анализа постановка задачи трех квантовых частиц, среди которых могут быть и заряженные частицы. Метод гипергармоник – довольно простой подход для квантовомеханического анализа свойств и расчета связанных состояний системы нескольких частиц в рамках уравнения Шредингера. Методы сплайн-функций, использующие разложения по базисным сплайнам, – основа гибких, экономичных и простых алгоритмов численного интегрирования дифференциальных уравнений Шредингера и Фаддеева.

В силу указанных несомненных преимуществ перечисленных методов их дальнейшее развитие, объединение и построение на их основе новых методов функциональных разложений для совокупного качественного и численного анализа проблемы нескольких квантовых частиц представляется перспективным и плодотворным, и поэтому является актуальной задачей современной квантовой теории рассеяния. Решению этой сложной задачи посвящена настоящая диссертация. В ней основное внимание уделено семи актуальным теоретическим и прикладным проблемам.

Проблема 1 – проблема низкоэнергетических разложений. Эта проблема – одна из наиболее значимых и сложных проблем теоретической физики низких энергий и включает в себя вывод и анализ низкоэнергетических разложений регулярных и нерегулярных волновых функций, фаз, амплитуд и сечений рассеяния всех возможных процессов упругого и неупругого столкновения в системах из двух-, трех- и более частиц и определение фундаментальных характеристик низкоэнергетического рассеяния: длины рассеяния, эффективного радиуса и параметра формы.

Проблема 2 – проблема оптимальной редукции. Анализ исходных дифференциальных уравнений Шредингера и Фаддеева для системы трех частиц представляется невозможным из-за сравнительно большого числа независимых переменных, равного шести. Поэтому актуальными представляются новые решения проблемы оптимальной редукции таких уравнений к системам уравнений с меньшим числом аргументов: к системам трех-, двух- и одномерных уравнений в виде одновременно наиболее удобном и для анализа строения искомых решений и для их вычисления.

Проблема 3 – проблема ложных и физических слагаемых. Для систем нескольких квантовых частиц, содержащих тождественные, факт существования ложных (духовых, запрещенных принципом Паули) парных взаимодействий и компонент многочастичной T-матрицы отмечался многими авторами. С квантовомеханической точки зрения представляются актуальным обобщение и анализ понятия ложных и физических слагаемых парных взаимодействий и фаддеевских компонент трехчастичной волновой функции на случай трех разных частиц, доказательство критериев существования физических слагаемых и выделение их в явном виде.

Проблема 4 – проблема точных решений уравнений Фаддеева. Построение точных решений несомненно актуально как с теоретической, так и с прикладной точек зрения, потому что область применения точных решений довольно широка: их можно использовать как модельные для квантовомеханического анализа спектров реальных физических систем, как базисные для расчета таких спектров и как эталонные для отработки и тестирования алгоритмов численного решения уравнений Фаддеева.

Проблема 5 – проблема коллапса. Решение этой проблемы в рамках дифференциальных уравнений Фаддеева открывает возможность физически и математически корректного моделирования эффектов Томаса и Ефимова и поэтому является актуальной задачей. Ее актуальность обусловлена и тем, что в настоящее время эффект Ефимова интенсивно обсуждается в связи с проблемами устойчивости конденсата Бозе-Энштейна и достоверного расчета связанных состояний трех атомов гелия-4.

Проблема 6 – проблема асимптотических разложений вблизи точек парного и тройного ударов. Включение таких разложений или извлеченной из них информации в численные схемы интегрирования трехчастичных уравнений Шредингера или Фаддеева – наиболее простой способ обеспечить достоверность и прецизионную точность расчета волновой функции и сечений слияния двух или всех трех частиц. Поэтому вывод асимптотических разложений вблизи точек парного и тройного ударов является актуальной задачей.

Проблема 7 – проблема численного интегрирования уравнений Фаддеева. Ее простое решение – несомненно актуальная прикладная задача, потому что, дифференциальные уравнения Фаддеева удобны для численного исследования широкого круга трехчастичных явлений в ядерной, атомной и молекулярной физике.

Решение перечисленных проблем представляется актуальным для развития теории дифференциальных уравнений Фаддеева и ее применения к численному анализу свойств реальных трехчастичных систем. Действительно, применение дифференциальных уравнений Фаддеева для достоверного расчета столкновений в системе трех частиц в пределе низких энергий, расчета слабосвязанных состояний, для вычисления астрофизических S-факторов, сечений трехчастичных ядерных, атомных и молекулярных реакций прежде всего требует детального анализа структуры этих уравнений, их особых решений, исследования различных функциональных разложений искомых решений, формулировки граничных условий в пределе малых расстояний между частицами не только для искомых решений, но и для их частных производных и, наконец, разработки экономичных алгоритмов численного анализа, включающих такие условия.

Цель диссертации – создание, развитие и применение методов функциональных разложений для совокупного квантовомеханического и математического (качественного и численного) анализа характеристик низкоэнергетического столкновения двух частиц, трехчастичных дифференциальных уравнений Шредингера и Фаддеева и их регулярных решений.

Цель диссертации включает в себя, в частности, решение семи задач, входящих в соответствующие проблемы 1-7. Такими задачами являются:

1. создание простого метода построения низкоэнергетических разложений волновых функций, функций эффективного радиуса и сечений рассеяния двух частиц, анализ этим методом роли дальнодействующих компонент NN-взаимодействия в низкоэнергетическом pp- и nn-рассеянии;

2. анализ кинематического преобразования в задаче трех частиц, вывод удобных трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева и представлений для содержащихся в таких уравнениях матричных элементов;

3. исследование ложных и физических слагаемых парных взаимодействий и выявление физических следствий существования таких слагаемых;

4. выделение и анализ двух классов точных решений уравнений Фаддеева: класса ложных решений и класса факторизованных решений в случае парных взаимодействий центробежного типа;

5. анализ спектра и коллапса квантовой частицы в поле, пропорциональном квадрату секанса расстояния, и анализ коллапса трех тождественных бозонов в случае нулевого углового момента и S-волновых взаимодействий центробежного типа;

6. построение и анализ разложений трехчастичной волновой функции и ее фаддеевских компонент вблизи точек парного и тройного ударов;

7. разработка экономичных сплайн-алгоритмов для численного решения трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева и описание методики тестирования таких алгоритмов.

Научная новизна.

Научная новизна диссертации в методическом отношении состоит в существенном расширении наиболее перспективных в настоящее время подходов (теория дифференциальных уравнений Фаддеева, методы фазовых, гиперсферических и сплайн-функций) к решению проблемы двух и трех частиц предложенными новыми методами, основанными на функциональных разложениях. Такими методами являются: метод низкоэнергетических разложений, методы построения физических слагаемых центральных парных взаимодействий, ложных решений уравнений Фаддеева и их точных решений в случае взаимодействий центробежного типа, методы построения формальных асимптотических разложений решений уравнений Шредингера и Фаддеева вблизи точек парного и тройного ударов и метод сплайн-разложений для численного анализа уравнений Фаддеева.

Научная новизна диссертации с физической точки зрения заключается в анализе предсказанных аналогов давно известных эффектов Мотта, Швингера и Рамзауера и впервые выполненном в рамках дифференциальных уравнений Фаддеева анализе коллапса, как особого трехчастичного квантовомеханического эффекта.

Научная новизна диссертации с прикладной точки зрения обуславливается новыми результатами в решении важных прикладных задач:

- задачи экстраполяции двухчастичных фаз и сечений рассеяния в область низких энергий в случае суперпозиции кулоновского, дальнодействующего и короткодействующих взаимодействий;

- задачи моделирования спектра квантовой частицы в поле, пропорциональном квадрату секанса расстояния;

- задачи моделирования эффектов Томаса и Ефимова найденными коллапсирующими волновыми функциями трех тождественных бозонов;

• задачи вычисления трехчастичной волновой функции с прецизионной точностью вблизи точек парного и тройного ударов с помощью включения всех найденных граничных условий (связей);

• задачи тестирования численных алгоритмов путем сравнения вычисленных решений с полученными эталонными точными решениями.

Практическая ценность диссертации состоит в том, что в ней:

• выведены экстраполяционные формулы для фаз и сечений рассеяния двух частиц с эффективным взаимодействием, содержащим дальнодействующее взаимодействие наряду с короткодействующим;

• теоретически предсказаны интересные для экспериментального исследования эффекты в триплетном *pp*- и *nn*-рассеянии;

• даны удобные для численного анализа формулировки трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева;

• получены точные решения задачи трех частиц, которые можно использовать как базисные, как модельные и как эталонные;

• выведены явные разложения для волновой функции трех частиц и ее фаддеевских компонент в двух физически интересных предельных конфигурациях, а именно вблизи точек парного и тройного ударов, в этих точках получены простые граничные условия в виде связей, включение которых в расчетную схему гарантирует вычисление волновой функции с высокой точностью в упомянутых конфигурациях;

• описаны экономичные и простые сплайн-алгоритмы, в которых такие граничные условия включены, предложена методика тестирования таких алгоритмов на поточечную сходимость, в частности, способы использования ложных решений как универсальных эталонных решений.

Основные результаты диссертации, выдвигаемые на защиту.

1. Предложен и развит метод низкоэнергетических разложений, предназначенный для анализа и расчета регулярной и нерегулярной волновых функций фаз, сечений и параметров упругого низкоэнергетического столкновения двух одноименно заряженных или нейтральных частиц с эффективным взаимодействием, которое может содержать дальнодействующие и короткодействующие, центральные и нецентральные компоненты. Этим методом дано простое решение проблемы корректной, учитывающей взаимодействия, порожденные магнитным моментом нуклона, экстраполяции фаз и сечений триплетных *pp*- и *nn*-столкновений в область энергий ниже 10 МэВ и теоретически предсказаны *pp*-аналоги эффектов Мотта и Швингера и *nn*-аналог эффекта Рамзауера.

2. Выполнен анализ кинематического преобразования в задаче трех частиц. Предложена редукция шестимерных дифференциальных уравнений Фаддеева к удобным для качественного и численного исследования системам трех-, двух- и одномерных уравнений. Получены адаптированные для анализа как функций кинематического угла и экономичного вычисления представления ядер интегральных операторов систем двумерных уравнений Фаддеева и коэффициентов Рейнала-Реваи, содержащихся в системах одномерных уравнений Фаддеева.

3. Доказаны критерии существования, созданы методы анализа и вычисления физических слагаемых центральных парных взаимодействий и двух классов точных решений дифференциальных уравнений Фаддеева: класса всех ложных решений и класса факторизованных решений в случае парных взаимодействий центробежного типа. В случае S-волновых взаимодействий такого типа и нулевого полного углового момента дан анализ достаточного условия коллапса и строения найденного класса волновых функций связанных состояний трех тождественных бозонов.

4. Предложены оптимальные методы построения формальных асимптотических разложений регулярных решений трех- и двумерных уравнений Шредингера и Фаддеева вблизи точек парного и тройного ударов в случае центральных или нецентральных парных взаимодействий, представимых рядами по целым степеням расстояния между частицами. Этими методами выведены линейные соотношения (связи) между частными производными регулярных решений двух- и трехмерных уравнений Шредингера и Фаддеева в точках парного и тройного ударов.

5. Создан метод сплайн-разложений для численного анализа трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева: предложены простые сплайн-алгоритмы численного анализа таких уравнений, учитывающие полученные связи, и методика тестирования сплайн-алгоритмов на поточечную сходимость при измельчении сетки, включающая описание различных способов применения найденных точных решений как эталонных.

Апробация. Материалы диссертации докладывались на семинарах ЛТФ и ЛНФ ОИЯИ, НИИЯФ МГУ, Российского университета дружбы народов, физического факультета ЛГУ, Института теоретической физики в Киеве, в Исследовательском институте физики частиц и ядра (г. Будапешт, Венгрия), на семинарах физического факультета боннского университета (г. Бонн, ФРГ) и были представлены на следующих международных конференциях:

Int. Conf. *Mesons and Nuclei at Intermediate Energies*, Dubna, May 3-7, 1994; XII Europ. Conf. on Few-Body Physics, Uzhgorod, June 1-5, 1990; Междунар. совещ. по теории малочастичных и кварк-адронных систем, Дубна, 16-20 июня, 1987; XII Int. Conf. on Few-Body Problems in Physics, Vancouver, B.C. Canada, July 2-8, 1989; VII Int. Conf. *Symmetry Methods in Physics*, Dubna, July 10-16, 1995; VIII Int. Conf. *Symmetry Methods in Physics*, Dubna, July 28 - August 2, 1997; Int. Conf. *Kolmogorov and Contemporary Mathematics*, Moscow, June 16-21, 2003; V Int. Congress on Mathematical Modelling, Dubna, Sept.30 – Okt.6, 2002; Int. Workshop on Computation Physics Dedicated to the Memory of Stanislav Merkuriev. St Petersburg, August 24-27, 2003.

Публикации. Основа диссертации – статьи [1-25].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации – 375 страниц. Диссертация содержит 16 рисунков и 5 таблиц. Список литературы включает 244 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

В диссертации дано исчерпывающее описание предложенных методов функциональных разложений и полученных этими методами новых результатов в проблеме нескольких квантовых частиц.

При описании особое внимание уделено экстраполяции в область низких энергий фаз и сечений рассеяния двух частиц в случае суперпозиции коротко- и дальнодействующих взаимодействий; ложным и физическим слагаемым парных взаимодействий в задаче трех частиц и ее точным решениям; расширению теории Фаддеева на случай взаимодействий запирающего или центробежного типа; коллапсу одной, двух и трех частиц; анализу строения регулярных фаддеевских компонент вблизи точек парного и тройного ударов; экономичным сплайн-алгоритмам для численного исследования трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева и применению точных решений как эталонных.

Введение к каждой главе содержит основные определения и краткое описание исследуемых объектов. Каждый параграф начинается с постановки исследуемой проблемы, пояснениями ее значимости и актуальности и сравнительного схематического описания предложенных автором и других известных подходов к ее решению. Далее, в общем случае описывается авторский метод решения, затем анализируются наиболее интересные частные случаи, а для иллюстрации приводятся самые простые и яркие примеры. Наиболее значимые оригинальные утверждения до или сразу после их доказательства формулируются в виде теорем, а основные результаты всех представленных в главе исследований суммируются и обсуждаются в завершающем ее разделе.

При анализе каждой задачи для полноты воспроизводятся основные результаты исследований других авторов, если таковые имеются, особое внимание уделяется наиболее удобной для численного исследования формулировке, геометрической и физической интерпретации, обсуждению особых случаев, физических следствий и прикладной значимости. Анализ задачи сопровождается довольно подробным описанием оригинальных и наиболее экономичных алгоритмов ее численного решения.

Введение содержит данные выше доказательство актуальности темы диссертации, формулировки ее цели, новизны, практической ценности и список основных результатов, выдвигаемых на защиту. Оставшаяся, но существенная часть Введения, дополненная только для большей ясности списком основных определений, дана ниже и посвящена двум примерам плодотворного использования функциональных разложений, подробным пояснениям к проблемам 1-7 и краткому описанию содержания глав 1-5.

Все процитированные в диссертации подходы и представляемые авторские методы [1]–[25] к решению актуальных проблем теории рассеяния для систем нескольких квантовых частиц не случайно основаны на тех или иных функциональных разложениях. Дело в том, что универсальным ключом для решения многих проблем этой теории является удачно выбранное функциональное разложение исследуемой функции и последующая оптимальная (наиболее удобная для квантовомеханического и математического анализа и для расчета) формулировка задачи для искомых компонент выбранного разложения. Два данных ниже примера – убедительное доказательство этого утверждения.

Пример 1. Функциональное разложение $T = T_1+T_2+T_3$ трехчастичной T-матрицы в импульсном пространстве системы трех частиц с парными центральными и короткодействующими потенциалами V_1, V_2 и V_3 оказалось ключевым для впервые предложенной Л.Д. Фаддеевым математически корректной формулировки задачи трех квантовых частиц в виде системы однозначно разрешимых интегральных уравнений для искомых компонент T_1, T_2 и T_3. Последовавшее обобщение этого подхода для систем из четырех частиц впервые дано О.Я. Якубовским и также основано на функциональных разложениях в импульсном пространстве.

Исследования Фаддеева и Якубовского оказались фундаментом для становления математически корректной теории рассеяния для систем нескольких квантовых частиц. Две проблемы теории интегральных уравнений Фаддеева-Якубовского, заметно сужающие область ее приложения, остались неразрешимыми: до сих пор неизвестно исчерпывающее и удобное для практических расчетов расширение этой теории для систем, содержащих заряженные частицы, и в общем случае представляется принципиально невозможной редукция интегральных уравнений к их оптимальным для численного анализа дискретным аналогам, которыми являются системы линейных уравнений с разреженными матрицами небольшой размерности и легко вычисляемыми элементами.

Пример 2. Началом следующего этапа развития теории рассеяния для систем трех частиц оказалось использование функционального разложения $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3$ трехчастичной волновой функции Ψ и вывод дифференциальных уравнений Фаддеева для искомых фаддеевских компонент Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 в координатном шестимерном пространстве $\mathcal{R}^6$ трех частиц:

$$(H_0 - E)\,\Psi_i = -V_i\,\Psi = -V_i \sum_{k=1}^{3} \Psi_k\,.$$

Принципиальная проблема этого этапа заключалась в выводе физических граничных условий для искомых фаддеевских компонент при больших расстояниях между частицами, гарантирующих существование и единственность решений фаддеевских дифференциальных уравнений и их эквивалентность исходному трехчастичному уравнению Шредингера:

$$(H_0 + V)\,\Psi = E\,\Psi\,, \quad V \equiv \sum_{k=1}^{3} V_k\,.$$

Основной вклад в полное решение этой сложнейшей проблемы как для систем из нейтральных, так и заряженных частиц дан С.П. Меркурьевым. Существенным был и вклад Меркурьева в становление и развитие основанных на конечноразностной аппроксимации методов численного анализа дифференциальных уравнений Фаддеева.

В отличие от фаддеевской интегральной формулировки задачи трех частиц, ее дифференциальная формулировка в виде дифференциальных уравнений Фаддеева с найденными Меркурьевым граничными условиями при больших расстояниях между частицами имеет по крайней мере три существенные преимущества: модификация дифференциальных уравнений Фаддеева на все случаи систем трех частиц, содержащих заряженные частицы, известна; дифференциальные уравнения Фаддеева удобны для анализа строения их искомых решений; для таких уравнений не сложно вывести оптимальные для численного анализа дискретные аналоги.

Теория дифференциальных уравнений Фаддеева и методика их приложения для расчетов реальных физических систем, благодаря перечисленным выше преимуществам, была существенно развита в исследованиях, выполненных коллегами и учениками Меркурьева или при их участии. Такими исследованиями являются: (см. обзоры [14, 17, 24]) определение кулон-ядерной длины рассеяния протона на дейтроне, анализ асимптотик фаддеевских компонент в полном и обрезанном бисферическом базисах, формулировка уравнений Фаддеева в модели граничных условий, метод сильной связи каналов для уравнений Фаддеева, метод кластерной редукции, анализ особых спектральных свойств оператора Фаддеева, комплексный скейлинг уравнений Фаддеева и алгоритмы их численного анализа, основанные на конечноразностной аппроксимации или на разложениях искомых решений по базисным квинтетным сплайнам.

Упомянутых выше достижений вполне достаточно, чтобы утверждать, что теория дифференциальных уравнений Фаддеева исключительно плодотворна и перспективна и поэтому ее дальнейшее развитие – актуальная задача современной теории рассеяния для систем нескольких частиц.

Основные определения. Центральное взаимодействие – потенциал $V(x)$, зависящий только от расстояния x между двумя частицами, все другие взаимодействия – нецентральные. Короткодействующий потенциал $V^s(x)$ – потенциал, убывающий при $x \to \infty$, не медленнее, чем юкавский потенциал $V^Y \sim x^{-1}\exp(-x/x_0)$, $x_0 > 0$. Дальнодействующие потенциалы: кулоновский потенциал $V^c(x) \sim x^{-1}$, потенциал $V^l(x)$ с асимптотикой $V^l(x) \sim x^{-d}$, $d > 2$, при $x \to \infty$ и потенциал центробежного типа $V(x) = c/x^2$, где $x \geq 0$, а c – вещественное число. Потенциал V^l в случае $d = 2, 3, \ldots$ называется мультипольным. Магнитными называются нецентральные дальнодействующие взаимодействия: спин-орбитальное взаимодействие магнитного момента нуклона с кулоновским полем протона $V^{mls} \sim (\mathbf{l} \cdot \mathbf{s})\, x^{-3}$, $x \to \infty$, и тензорное взаимодействие магнитных моментов нуклонов $V^{mt} \sim S_{12}\, x^{-3}$, $x \to \infty$.

Низкоэнергетическое разложение (НЭР) функции, зависящей от относительного импульса рассеяния k двух частиц, как от аргумента (фаза, амплитуда, сечения рассеяния) или как от параметра (регулярная и нерегулярная волновые функции рассеяния) – асимптотическое в пределе нулевой энергии ($E \sim k^2 \to 0$) разложение по функциям аргумента k.

Эффекты Мотта, Швингера и Рамзауера – соответственно: быстрые угловые осцилляции кулоновского дифференциального сечения рассеяния двух медленных тождественных частиц, сингулярность (полюс второго порядка) дифференциального сечения рассеяния нейтрона бесспиновым ядром в направлении рассеяния вперед и локальный минимум полного сечения рассеяния электрона атомами инертных газов Ar, Kr и Xe.

Парадокс Девиса – значительное отличие величины потока солнечных нейтрино, измеренной ^{37}Cl-детектором, от ее теоретических оценок.

Кинематическое преобразование – однопараметрическое преобразование $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to \mathbf{r}' = (\mathbf{x}', \mathbf{y})'$ шестимерного вектора $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$, при котором его длина r не изменяется, а образы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ его трехмерных компонент $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ лежат в одной и той же двумерной плоскости. Если для данной системы трех частиц $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ – разные пары приведенных векторов Якоби, то r – гиперрадиус, а кинематическое преобразование – циклическая перестановка трех частиц, значение параметра (кинематического угла γ) фиксируется отношениями масс частиц и четностью этой перестановки.

Функция D^σ – линейная комбинация двух D-функций Вигнера, являющаяся в отличие от них собственной функцией оператора P полной пространственной четности системы трех частиц: $(P - \sigma)\, D^\sigma = 0$.

Трех-, двух- и одномерные (редуцированные) уравнения Шредингера или Фаддеева – системы уравнений, полученные проецированием исходных шестимерных уравнений Шредингера или Фаддеева на трехчастичные угловые базисы из D^σ-функций $D^{\ell\sigma *}_{mm'}$, бисферических функций $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}$ и гипергармоник $Y^{\ell m}_{Lab}$, где L, ℓ и m – значения гипермомента, полного углового момента и его проекции на неподвижную ось квантования.

Слагаемые V_i^s и Ψ_i^s любых разбиений $V_i = V_i^s + V_i^u$ и $\Psi_i = \Psi_i^s + \Psi_i^u$ трех парных взаимодействий V_i и фаддеевских компонент Ψ_i называются ложными слагаемыми (компонентами), если $V_1^s + V_2^s + V_3^s \equiv 0$ и соответственно $\Psi_1^s + \Psi_2^s + \Psi_3^s \equiv 0$. Если V_i^u и Ψ_i^u не имеют нетривиальных ложных компонент, т. е. не представимы в виде $V_i^u = V_i^{us} + V_i^{uu}$ и $\Psi_i^u = \Psi_i^{us} + \Psi_i^{uu}$, где $V_1^{us} + V_2^{us} + V_3^{us} \equiv 0$ и соответственно $\Psi_1^{us} + \Psi_2^{us} + \Psi_3^{us} \equiv 0$, то слагаемые V_i^u и Ψ_i^u называются физическими. Это определение предложено в [24].

Ложное решение уравнения Фаддеева в данном классе функций – любая совокупность $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ трех фаддеевских компонент, сумма которых в этом же классе – тождественный нуль: $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \equiv 0$.

Точное решение исследуемого уравнения – решение, представимое в виде конечной линейной комбинации числовых коэффициентов и элементарных и (или) известных специальных функций.

Коллапс – локализация волновой функции системы нескольких частиц в бесконечно малой окрестности их центра масс.

Коллапсирующее решение уравнения Шредингера – решение, локализующееся в бесконечно малой окрестности хотя бы одной точки.

Коллапсирующее решение уравнений Фаддеева – решение, хотя бы одна из компонент которого локализуется в бесконечно малой окрестности хотя бы одной точки.

Эффекты Томаса и Ефимова – коллапс системы трех частиц в пределе нулевого радиуса действия парных сил и логарифмическое сгущение спектра энергий связанных состояния системы трех частиц к нулю снизу при стремлении парных длин рассеяния к минус бесконечности.

Проблема 1 – проблема низкоэнергетических разложений. Анализ проблемы НЭР дан в обзорах [1, 6]. Ее оригинальное и довольно полное решение для систем двух нейтральных или одноименно заряженных частиц с эффективным (полным) центральным или нецентральным взаимодействием V^{eff} предложено в [1]–[9] и представлено в главе 1. В ней рассмотрены случаи $V^{eff} = V^s, V^c + V^s$ и $V^{eff} = V^c + V^\ell, V^c + V^\ell + V^s$, особое внимание уделено последнему самому сложному, но наиболее характерному для эффективно-двухчастичных задач ядерной, атомной и молекулярной физики случаю.

Изложенный в главе 1 подход к анализу двухчастичного низкоэнергетического рассеяния назван для краткости методом НЭР и является решением актуальной теоретической задачи, а именно первого и неизбежного этапа создания метода НЭР для систем трех частиц. Возможная для этого схема и особенности ее реализации обсуждались автором в [6].

Разработанный метод НЭР – довольно простой способ решения актуальной прикладной задачи экстраполяции фаз и сечений двухчастичного рассеяния в область низких экспериментально труднодоступных энергий. Примеры тому – обсуждаемые в главе 1 формулы для экстраполяции триплетных фаз и сечений *pp*- и *nn*-рассеяния и важные следствия этих формул – предсказанные в [3] и в [9] новые квантовомеханические явления: *nn*-аналог эффекта Рамзауера и *pp*-аналоги эффектов Мотта и Швингера.

Проблема 2 – проблема оптимальной редукции. Оптимальная редукция трехчастичных шестимерных уравнений Фаддеева к уравнениям с меньшим числом аргументов включает в себя анализ кинематического преобразования в задаче трех частиц, выделение полного набора ε всех сохраняющихся для данного класса парных взаимодействий квантовых чисел трехчастичной системы, учет физических особенностей системы, анализ всех возникающих при редукции матричных элементов и вывод наиболее удобных для их вычисления представлений. Такими матричными элементами в двумерных уравнениях Фаддеева являются ядра интегральных операторов, а в одномерных – коэффициенты Рейнала-Реваи.

Анализ проблемы оптимальной редукции дан автором в обзоре [14], а ее оригинальное решение, предложенное в [10]–[14], представлено в главе 2.

Проблема 3 – проблема ложных слагаемых. Анализ ложных слагаемых в задаче трех частиц в дифференциальных формулировках Шредингера и Фаддеева дан автором в работах [15]–[17]. В них обсуждались два факта.

Во-первых, если парные взаимодействия, восстановленные по двухчастичным экспериментальным данным имеют ложные слагаемые, то эти слагаемые могут проявиться лишь при использовании таких реалистических парных взаимодействий в задаче трех и более частиц.

Во-вторых, в силу определения физических слагаемых парных взаимодействий трехчастичное уравнение Шредингера содержит только физические слагаемые, следовательно, именно они, а не сами парные взаимодействия определяют и динамику трехчастичной системы, и тип разрешенной симметрии волновых функций, и особенности строения их фаддеевских компонент. Уже поэтому с квантовомеханической точки зрения представляются актуальными три задачи: обобщение и анализ понятия ложных слагаемых парных взаимодействий и фаддеевских компонент на случай трех разных частиц, доказательство критериев существования физических слагаемых, выделение таких слагаемых в явном виде.

Оригинальное решение этих задач впервые дано автором в [16, 17] и обсуждается в разделах 3.2, 3.3 и 3.5 главы 3.

Проблема 4 – проблема точных решений уравнений Фаддеева. Ее полное решение состоит из доказательства критериев существования классов точных решений, анализа строения и описания простых способов вычисления всех элементов этих классов. Известны три класса точных решений трехчастичных дифференциальных уравнений Фаддеева: класс точных решений в случае осцилляторных парных взаимодействий (см. обзоры [14, 24]), класс ложных решений, впервые наиболее полно исследованный автором в [14, 15, 24] и открытый им же в [18]–[20] класс точных решений в случае парных взаимодействий центробежного типа.

Итоги известных исследований ложных решений уравнений Фаддеева суммировались автором в обзорах [14, 24]. Предложенный им в [14, 15, 24] анализ ложных решений дан в разделе 3.4 главы 3. Раздел 3.6 исчерпывает результаты исследований [18]–[20] класса точных решений в случае парных взаимодействий центробежного типа.

Проблема 5 – проблема коллапса. Ее особую сложность доказывает хотя бы следующий факт. Эффект Томаса (коллапс) известен с 1935 года, но его объяснение было найдено значительно позже, а именно через 26 лет в работе Р.А. Минлоса и Л.Д. Фаддеева, доказавших, что этот эффект – следствие неограниченности снизу энергетического спектра уравнений Скорнякова–Тер-Мартиросяна для системы трех тождественных бозонов с нулевым полным угловым моментом ℓ в случае парных S-волновых взаимодействий нулевого радиуса действия.

Уже для такой системы, но в случае парных S-волновых взаимодействий центробежного типа, впервые данный автором в [21, 24] и представленный в разделе 3.7 главы 3 анализ достаточного условия коллапса и строения физически приемлемого класса решений дифференциальных уравнений Шредингера и Фаддеева актуален по следующим причинам. Такой анализ является существенным этапом расширения теории дифференциальных уравнений Фаддеева на случай взаимодействий центробежного типа и тем самым открывает возможность физически и математически корректного моделирования эффектов Томаса и Ефимова.

Проблема 6 – проблема асимптотических разложений вблизи точек парного и тройного ударов. Эту проблему можно решить, следуя известному в теории дифференциальных уравнений подходу в два этапа: первый из них – вывод формальных асимптотических разложений (ФАР), второй – доказательство их хотя бы асимптотической сходимости и дифференцируемости. В случае чисто кулоновских парных потенциалов известны многочисленные реализации первого этапа (см. обзор [17]), основанные на классических схемах Т. Като и В.А. Фока, предложенных ими для уравнения Шредингера в точках парного и тройного ударов соответственно. Реализации второго этапа в общем случае неизвестны.

Вывод и анализ ФАР для волновой функции и ее фаддеевских компонент – довольно сложная проблема: ее оптимальное и полное решение состоит из редукции уравнений Шредингера и Фаддеева к наиболее простым для исследования и расчета ключевым рекуррентным цепочкам уравнений минимально возможной размерности, доказательстве однозначной разрешимости таких цепочек и анализе их строения от функционального вида парных взаимодействий при малых значениях их аргументов.

Анализ проблемы ФАР дан автором в обзоре [17]. Ее оптимальное и полное решение предложено в работах [17, 22, 23] и представлено в главе 4. Созданные в этих работах методы называются оптимальными методами ФАР для анализа строения решений трех- и двумерных уравнений Шредингера и Фаддеева вблизи точек парного и тройного ударов.

Проблема 7 – проблема численного интегрирования уравнений Фаддеева. Ее полное решение, основанное на дискретных сеточных аналогах редуцированных уравнений Фаддеева и поставленных граничных условий, подразумевает разработку простых и экономичных алгоритмов численного анализа, доказательство методами вычислительной математики поточечной сходимости таких алгоритмов при измельчении используемой сетки, а при отсутствии такого доказательства – разработку методики тестирования алгоритмов, включающей в себя способы использования точных решений уравнений Фаддеева в качестве эталонных и способы численного определения порядков поточечной сходимости.

Особо значимым и интересным представляется создание оптимальных алгоритмов, основанных на дискретных аналогах. Оптимальным считается алгоритм, включающий в себя наиболее полно всю известную информацию о строении искомого решения, в частности – связи в точках парного и тройного ударов; позволяющий аппроксимировать и искомое решение, и все его необходимые частные производные, не только в узлах сетки, но и во всей области изменения аргументов; и наконец, оперирующий с системой линейных уравнений, матрица которой максимально разрежена имеет небольшую размерность и легко вычисляемые элементы.

Для всех известных дискретных аналогов уравнений Фаддеева до сих пор не установлены ни критерий, ни достаточные условия какой-либо сходимости вычисляемого на заданной сетке узлов решения к искомому. До тех пор пока теоремы сходимости не доказаны представляется актуальным и необходимым численное тестирование дискретных аналогов на поточечную сходимость и развитие методов определения порядков приближений искомого решения и его производных на всем множестве изменения аргументов и особенно в физически важных подмножествах.

Анализ современного состояния проблемы численного интегрирования уравнений Фаддеева дан автором в обзоре [24]. Оригинальное решение этой проблемы, включающее в себя и оптимальные сплайн-алгоритмы, и методику их тестирования, предложено в работах [24, 25], представлено в главе 5 и для краткости названо методом сплайн-разложений для численного анализа трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева.

Глава 1 посвящена низкоэнергетическим разложениям в задаче двух частиц. В этой главе на основе линейной (разд. 1.2-1.4 и п. 1.6.3) и нелинейных (пп. 1.6.1, 1.6.2) версий метода фазовых строится и применяется метод НЭР. Неоспоримые преимущества этого метода: простота, выделение в явном виде всех неаналитических по импульсу столкновения k множителей и слагаемых низкоэнергетических разложений, энергонезависимость ключевых уравнений и как ее следствие – возможность расчетов с прецизионной точностью.

Раздел 1.2 посвящен формулировкам задач для регулярной и нерегулярной радиальных волновых функций u_ℓ^+ и u_ℓ^- рассеяния двух нейтральных или заряженный частиц в случае центрального потенциала $V^{eff}(x)$ и произвольных углового момента ℓ и импульса рассеяния k.

Доказано, что вместо одномерной задачи рассеяния Шредингера (исходная формулировка) при низких энергиях выгоднее использовать две краевые задачи: линейные системы двух дифференциальных уравнений первого порядка для амплитудных функций c_ℓ^+, s_ℓ^+ и c_ℓ^-, s_ℓ^-, подчиненных найденным условиям при $x \to 0$. Чтобы сформулировать эти задачи, для u_ℓ^+ использовалось давно известное в методе фазовых функций разложение, содержащее нормировочный множитель N_ℓ^+ и функции c_ℓ^+, s_ℓ^+, а для u_ℓ^- – оригинальное представление [7], содержащее множители N_ℓ^-, α_ℓ и функции c_ℓ^-, s_ℓ^- и $\alpha_\ell u_\ell^+$, затем фаза рассеяния и все множители выражались алгебраически через значения функций $c_\ell^\pm$, $s_\ell^\pm$ при $x = \infty$.

В разделе 1.3 построена теория возмущений для одномерной задачи рассеяния Шредингера с центральным потенциалом $V^{eff} = V^c + V$ и произвольным необязательно целым угловым моментом $\ell > 0$.

Доказано, что эта теория не имеет аналогов и при условии

$$[\,2\pi/(2\ell+1)\,]^{1/2} \int_b^\infty dt\,|V(t)|\,t < \ln\sqrt{3}\,, \quad b \geq 0\,,$$

применима для поточечной аппроксимации в области $x \geq b$ волновых функций $u_\ell^\pm$. Доказательство основано на представлении волновых функций $u_\ell^\pm$ через амплитудные функции $c_\ell^\pm$, $s_\ell^\pm$ и анализе методом сжимающих отображений незацепляющихся интегральных уравнений Вольтерра, выведенных из уравнений для функций $c_\ell^\pm$, $s_\ell^\pm$.

Предложены модификации теории возмущений на случаи $V^c \leq 0$ и все возможные способы ее применения, например для аппроксимации функций $c_\ell^\pm$, $s_\ell^\pm$, $u_\ell^\pm$ и фазы рассеяния дальнодействующим потенциалом V в пределе нулевой энергий и в пределе большого углового момента.

Раздел 1.4 посвящен низкоэнергетическим разложениям в пяти случаях $V^{eff} = V^s$, V^l, $V^c + V^s$, $V^c + V^l$, $V^c + V^l + V^s$.

В п. 1.4.1 для каждого из них обсуждаются фундаментальное квантовомеханические понятие длины рассеяния и известные способы ее вычисления. В итоге доказывается, что в случае $V^{eff} = V^c + V^l + V^s$ все обсужденные подходы к вычислению длины $a^{cl,s}$ рассеяния и модифицированной функции эффективного радиуса $K^{cl,s}$, порожденных потенциалом V^s в поле $V^c + V^l$, довольно сложно реализовать с высокой точностью.

В п. 1.4.2 для всех случаев $V^{eff} = V^s$, $V^c + V^s$, $V^c + V^l$, $V^c + V^l + V^s$, но при $V^c > 0$, дано единообразное и простое решение задачи построения НЭР волновых функций $u_\ell^\pm$ и функции эффективного радиуса.

Последовательность решения: функции $c_\ell^\pm$, $s_\ell^\pm$ заменяются рядами, в которых малый параметр (импульс k) отделен от аргумента x; краевые задачи для $c_\ell^\pm$, $s_\ell^\pm$ сводятся к ключевым рекуррентным цепочкам энергонезависимых уравнений для искомых компонент $c_{\ell n}^\pm(x)$, $s_{\ell n}^\pm(x)$ таких рядов и для этих компонент ставятся граничные условия при $x \to 0$; волновые функции $u_\ell^\pm$ выражаются рядами по функциям $c_{\ell n}^\pm$, $s_{\ell n}^\pm$ и известным функциям импульса; длина рассеяния и другие коэффициенты НЭР функции эффективного радиуса (эффективный радиус и параметр формы) определяются алгебраическими соотношениями через значения $c_{\ell n}^\pm(x)$, $s_{\ell n}^\pm(x)$ при $x = \infty$; асимптотическая сходимость всех НЭР в пределе $k \to 0$ доказывается с помощью представленной выше теории возмущений.

В разделе 1.5 как особенности сечений рассеяния обсуждаются эффекты Мотта, Швингера и Рамзауера и известные угловые и низкоэнергетические особенности амплитуд и дифференциальных сечений рассеяния, порожденного мультипольной добавкой в отталкивающем кулоновском поле. Далее доказывается, что в пределе низких энергий, в отличие от классического, квантовомеханическое дифференциальное сечение двух тождественных заряженных частиц, порожденное центральным мультипольным взаимодействием в кулоновском поле, быстро осциллирует. Это явление названо кулон-мультипольным аналогом эффекта Мотта.

Раздел 1.6 посвящен низкоэнергетическим столкновениям нуклонов.

В п. 1.6.1 исследована роль магнитного взаимодействия $V^m \equiv V^{m\ell s} + V^{mt}$ протонов в их триплетном столкновении. Использовались системы нелинейных фазовых уравнений В.В. Бабикова для заряженных частиц и авторский способ определения из таких систем кулон-ядерных длин $A^{c,s}_{\ell,j}$.

Дан квантовомеханический и численный анализ фаз $\delta^{c,ms}_{\ell,j}$ и дифференциального сечения $d\sigma^{c,ms}$ рассеяния, порожденного суммой магнитного и ядерного взаимодействий V^m и V^s в кулоновском поле V^c протонов.
В итоге доказано, что для корректной экстраполяции pp-фаз и сечения, отсчитанных от кулоновских, в область энергий $E < 10$ МэВ следует учитывать оба взаимодействия V^m и V^s. Для такой экстраполяции выведены простые и явные формулы, содержащие в качестве параметров только длины $A^{c,s}_{\ell,j}$. Предсказаны новые явления: pp-аналоги эффектов Мотта и Швингера. Первый состоит в быстрых осцилляциях сечения $d\sigma^{c,ms}$, а второй – в том, что такое сечение имеет полюса второго порядка в направлении рассеяния вперед и назад.

В п. 1.6.2 исследована роль взаимодействия V^{mt} магнитных моментов нейтронов в их триплетном рассеянии. Использовались системы нелинейных фазовых уравнений В.В. Бабикова для незаряженных частиц.

В итоге квантовомеханического и численного анализа фаз дифференциального и полного сечений доказано, что для их корректной экстраполяции в область $E < 10$ МэВ следует учитывать и магнитное и ядерное взаимодействия. Для этого выведены явные экстраполяционные формулы, содержащие как параметры только ядерные длины $A^{s}_{\ell,j}$. Предсказано новое явление: nn-аналог эффекта Рамзауэра – обусловленный взаимным воздействием ядерного и магнитного взаимодействий локальный минимум полного сечения триплетного nn-рассеяния при $E \approx 20$ кэВ.

В п. 1.6.3 исследовались вклады поляризационного потенциала V^p в фазу синглетного pp-рассеяния и в S-фактор реакции $pp \to de^+\nu_e$. Вычислить ее ядерный матричный впервые с прецизионной точностью удалось только за счет использования для волновой функции pp-рассеяния ее низкоэнергетического разложения, найденного описанным в п. 1.4.2 методом. В итоге доказано, что вклад от поляризационного потенциала V^p в S-фактор pp-реакции пренебрежимо мал по сравнению с известными неопределенностями ядерного взаимодействия, и поэтому учет поляризации протона не решает парадокс Девиса.

Стоит отметить, что все полученные в разделе 1.6 выводы о фазах и сечениях pp- и nn-рассеяния значимы и достоверны в силу их доказанной модельной независимости по отношению к выбору ядерного взаимодействия из всех известных фазовоэквивалентных NN-взаимодействий.

Предложенные подходы и выполненный в их рамках анализ роли магнитных взаимодействий в NN–рассеянии в пределе низких энергий могут быть использованы для планирования и обработки новых экспериментов в ядерной, атомной и молекулярной физике.

Основные результаты главы 1. Для задачи рассеяния двух одноименно заряженных или незаряженных частиц предложен новый метод построения и анализа низкоэнергетических разложений регулярной и нерегулярной волновых функций, фаз, сечений рассеяния и функций эффективного радиуса.

Этим методом впервые линейная версия метода фазовых функций дополнена простым способом вычисления нерегулярной радиальной волновой функции рассеяния двух частиц в случае центрального потенциала; для одномерной задачи рассеяния Шредингера построена неимеющая аналогов в теории потенциального рассеяния теория возмущений, являющаяся асимптотическим методом и в пределе низких энергий, и в пределе большого необязательно целого углового момента; дано простое решение проблемы определения модифицированных параметров рассеяния(длины рассеяния, эффективного радиуса и параметра формы), порожденного короткодействующим потенциалом в суммарном поле, образованным кулоновским потенциалом и дальнодействующим потенциалом, убывающим быстрее центробежного; решены задачи корректной (учитывающей взаимодействия, порожденные магнитным моментом нуклона) экстраполяции фаз и сечений триплетных pp- и nn-столкновений в область энергий ниже 10 МэВ; предсказаны кулон-мультиполный аналог эффекта Мотта, pp-аналоги эффектов Мотта и Швингера и nn-аналог эффекта Рамзауера; с прецизионной точностью вычислен вклад поляризуемости протона в S-фактор реакции $pp \to d\,\nu_e\, e^+$.

Глава 2 посвящена кинематическому преобразованию в задаче трех частиц и редукции дифференциальных уравнений Шредингера и Фаддеева. Главная особенность предложенного подхода – введение в теорию и широкое применение оператора кинематического преобразования:

$$K(\gamma) = P\, \exp(-i\gamma\, J)\,, \qquad J \equiv -i\, \left(\mathbf{x} \cdot \nabla_y - \mathbf{y} \cdot \nabla_x\right)\,.$$

В разделах 2.2-2.8 оператор K используется, чтобы дополнить теорию квантового углового момента для задачи трех частиц новым анализом кинематического преобразования широко используемых трехчастичных угловых базисов $\{Y_{b\beta}(\hat{x})\}$, $\{Y_{a\alpha}(\hat{y})\}$, $\{\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\}$, $\{Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\}$, $\{D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)\}$ и разложений функций по таким базисам.

В разделе 2.2 вводятся декартовы и отвечающие им гиперсферические координаты Якоби $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ и (r, Ω), где $\Omega \equiv (\hat{x}, \hat{y}, \varphi)$, $r \equiv (x^2 + y^2)^{1/2}$, $\varphi \equiv \mathrm{arctg}(y/x)$, затем поясняется геометрический смысл их кинематического преобразования в общем и в двух особых случаях: когда все частицы расположены в координатной плоскости $\mathcal{P}$ и на одной прямой $\mathcal{L}$.

В разделе 2.3 определяются операторы P_{ij}, P, R перестановки, отражения и поворотов и вводится оператор K кинематического преобразования.

В разделе 2.4 перечисляются свойства трехчастичных угловых базисов, а в разделе 2.5 поясняется связь между теоремами сложения и кинематическим преобразованием. В разделах 2.6, 2.7, 2.8 соответственно описывается кинематическое преобразование бисферических, гиперсферических и D^σ-рядов.

В разделе 2.6 кинематическое преобразование бисферических рядов сведено к вычислению отображений их компонент однократными интегральными операторами, впервые для таких операторов доказано спектральное представление, а для их ядер выведены наиболее удобные для анализа и вычисления функциональные разложения в виде двойных сумм по присоединенным полиномам Лежандра Θ_{am}.

В разделе 2.7 показано, что матричные элементы оператора кинематического преобразования в базисе гипергармоник отличаются от коэффициентов Рейнала-Реваи определенными фазовыми множителями, впервые для таких матричных элементов получены и исследованы представления в виде однократных интегралов, в виде решений конечных систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка и в виде решений конечных систем алгебраических линейных уравнений, однозначная разрешимость всех выведенных систем доказана.

В разделе 2.9 оператор кинематического преобразования K использован для анализа строения и редукции уравнений Шредингера и Фаддеева.

В п. 2.9.1 перечислены известные операторные и спектральные свойства свободного трехчастичного гамильтониана H_0.

В п. 2.9.2 даны матричные представления центральных и нецентральных парного и полного взаимодействий во всех угловых базисах.

В пп. 2.9.3 и 2.9.4 обсуждены строение и редукция уравнений Шредингера и Фаддеева, записанных в декартовых или гиперсферических координатах Якоби, в случае центральных или нецентральных парных взаимодействий.

В п. 2.9.4 выведены редуцированные уравнения Фаддеева:

трехмерные уравнения в D^σ-базисе, двумерные уравнения для компонент, быстро убывающих с ростом гиперрадиуса и не имеющих нулей высокого порядка в пределе малых расстояний между частицами, и приближенные конечные системы двумерных и одномерных дифференциальных уравнений для систем из двух тяжелых и одной легкой частиц.

Основные результаты главы 2. Квантовая теория углового момента для задачи трех частиц с парными центральными или включенными в конечном числе парциальных волн взаимодействиями существенно дополнена введением оператора кинематического преобразования и выполненным с помощью этого оператора анализом кинематических образов сферических функций, бисферических и гиперсферических гармоник, D^σ-функций и разложений по таким базисам трехчастичной волновой функции и ее фаддеевских компонент.

В результате анализа предложены новые редуцированные трех- и двух- и одномерные уравнений Фаддеева в виде наиболее удобном как для исследования искомых решений, так и для их вычисления: трехмерные уравнения Фаддеева в базисе D^σ-функций, двумерные интегродифференциальные уравнения Фаддеева в базисе бисферических гармоник для искомых парциальных компонент, не имеющими нулей при нулевых значениях якобиевских координат и быстро убывающих в пределе больших расстояний между частицами, и приближенные двумерные и одномерные дифференциальные уравнения Фаддеева для систем из двух тяжелых и одной легкой частиц; для интегральных операторов двумерных уравнений Фаддеева доказано спектральное представление, а для вычисления ядер этих операторов получено удобное функциональное разложение в виде двукратной суммы; доказано, что коэффициенты Рейнала-Реваи, содержащиеся в одномерных уравнениях Фаддеева, представимы как одномерные интегралы и подчиняются выведенным и однозначно разрешимым конечным системам линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и системам линейных алгебраических уравнений.

Глава 3 посвящена ложным слагаемым парных взаимодействий и фаддеевских компонент, а также точным и коллапсирующим решениям уравнений Шредингера и Фаддеева. Представленные в главе методы построения и анализа ложных слагаемых и точных решений основаны на разложениях по гипергармоникам $Y_{Lab}^{\ell m}$ и исключительно просты: исходная задача сводится к анализу матричных уравнений $\mathbf{A}\,\mathbf{B} = 0$ с легко вычисляемой матрицей $\mathbf{A}$ и конечным столбцом $\mathbf{B}$ искомых констант.

В разделе 3.2 дана матричная формулировка уравнений Шредингера и Фаддеева и введен трехмерный матричный проектор $\mathbf{\Pi}^s$, компоненты которого – операторы вполне определенных кинематических преобразований, затем доказано, что компоненты проекционных образов $\mathbf{\Pi}^s \mathbf{V}$ и $\mathbf{\Pi}^s \mathbf{\Psi}$ столбцов $\mathbf{V} \equiv (V_1, V_2, V_3)^T$ и $\mathbf{\Psi} \equiv (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)^T$ – ложные слагаемые V_i^s и Ψ_i^s парных взаимодействий и фаддеевских компонент. Таким образом дано обобщение стандартного понятия "ложные слагаемые" парных взаимодействии и фаддеевских компонент на общий случай систем трех частиц, не содержащих тождественных.

Раздел 3.3 посвящен физическим и ложным слагаемым центральных и нецентральных парных взаимодействий. Дано корректное определение физических слагаемых; доказана однозначность разбиений взаимодействий на ложные и физические слагаемые; представлены методы их выделения из взаимодействий, в частности, из осцилляторных и кулоновских; доказан и исследован критерий существования разбиений центральных взаимодействий на ложные и физические слагаемые; показано, что в таких разбиениях ложными могут быть только члены разложений взаимодействий по гипергармоникам Y^{00}_{L00} с гипермоментом $L = 0$ и (или) $L = 2$.

В разделе 3.4 представлен метод построения ложных решений уравнений Фаддеева. Сначала строится система фундаментальных ложных решений, затем общее ложное решение представляется линейной комбинацией таких решений и числовых констант. Построение каждого фундаментального решения сводится к определению конечного числового столбца $\mathbf{B}^L$ из уравнения $\mathbf{M}^L \mathbf{B}^L = 0$, где матрица $\mathbf{M}^L$ составлена из коэффициентов Рейнала-Реваи и поэтому зависит лишь от отношений масс частиц.

В п. 3.4.1 исследован случай центральных парных взаимодействий, когда система трех частиц имеет полный набор $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$ сохраняющих квантовых чисел. Доказано, что при $E > 0$ трех- и двумерные уравнения Фаддеева всегда имеют регулярные ложные решения с данным набором ε квантовых чисел, а любое ложное решение есть линейная комбинация числовых констант и фундаментальных ложных решений, каждая фаддеевская компонента которых – произведение функции Бесселя $J_{L+2}(r\sqrt{E})$ и конечной линейной комбинации гипергармоник $Y^{\ell m}_{Lab}$, $\forall\, (a, b)$, и числовых констант B^L_{iab}, выраженных явно через коэффициенты Рейнала-Реваи.

В п. 3.4.2 исследован случай нецентральных парных взаимодействий, включенных в конечном числе ($b \leq d < \infty$) парциальных волн. Доказано, что в этом случае двумерные уравнения Фаддеева имеют ложные решения с данным набором квантовых чисел ε, тогда и только тогда, когда отношения массы частиц таковы, что вполне определенная матрица $\mathbf{M}^L$, составленная из коэффициентов Рейнала-Реваи, вырождена; если ложное решение существует, то оно – линейная комбинация функций $J_{L+2}(r\sqrt{E})$, легко вычисляемых констант B^L_{iab} и гипергармоник $Y^{\ell m}_{Lab}$ с индексом $b \leq d$.

В разделе 3.5 даны примеры разбиений фаддеевских компонент на физические и ложные слагаемые, доказано существование такого разбиения для систем из трех тождественных частиц с $\ell = 0$ и S-волновыми парными взаимодействиями запирающего типа, а в частном случае осцилляторных взаимодействий физические и ложные слагаемые найдены в явном виде.

В разделе 3.6 описан метод построения и анализа класса факторизованных точных решений уравнений Шредингера и Фаддеева с взаимодействиями центробежного типа: $V_i = c_i x_i^{-2}$, $i = 1, 2, 3$. Любой элемент этого класса – произведения функции Бесселя $J_{t+2}(r\sqrt{E})$ и конечных $(L \leq t < \infty)$ линейных комбинаций гипергармоник $Y^{\ell m}_{Lab}$ и искомых коэффициентов B^L_{iab} с любыми допустимыми значениями индексов a и b.

В п. 3.6.1 доказан критерий существования класса факторизованных точных решений. В случае центральных взаимодействий такой класс пустой, а в случае нецентральных – непустой, тогда и только тогда, когда отношения масс частиц и значения констант c_1, c_2, c_3 таковы, что конечная и ленточная матрица $\mathbf{A}^t$ с элементами, выраженными явно через эти константы и коэффициенты Рейнала-Реваи, вырождена. Построение точного решения сведено к определению собственных вектор-столбцов $\mathbf{B}$ задачи $\mathbf{A}^t\mathbf{B} = 0$, предложены простые рекурсивные способы их вычисления с прецизионной точностью в общем случае и в пределе одной или двух бесконечно больших по модулю констант c_1, c_2, c_3.

В п. 3.6.2 метод построения точных решений, описанный в п. 3.6.1, подробно пояснен для случая S-волновых взаимодействий и $\ell = 0$.

В п. 3.6.3 в этом же случае исследованы простейшие $(t = 4)$ точные решения. Для таких решений доказана теорема существования и единственности во всех случаях: три частицы – разные, две из них – тождественные или все три – тождественные. Чтобы найденные решения можно было бы использовать как эталонные, коэффициенты их конечных разложений в ряды Фурье вычислены и затабулированы.

В разделе 3.7 даны примеры коллапсирующих решений, доказано достаточное условие коллапса и существования физически приемлемых волновых функций связанных состояний трех тождественных бозонов в случае $\ell = 0$ и S-волновых взаимодействий центробежного типа с потенциалами $V_i(x_i) = c\,x_i^{-2} = c\,r^{-2}\,(\sec\varphi_i)^2$, $i = 1,2,3$. Для доказательства исходные шестимерные уравнения Фаддеева подстановкой

$$\Psi_i(r,\Omega_i) = 2\,r^{-2}\operatorname{cosec}2\varphi_i\,Z_p(z)\,f(\varphi_i;p^2)\,\mathcal{Y}_{00}^{00}(\hat{x}_i,\hat{y}_i)\,,\qquad z \equiv r\sqrt{E}\,,$$

сводятся к совокупности двух уравнений, связанных между собой только постоянной p^2 разделения аргументов r и Ω_i. Первое уравнение – уравнение Бесселя для функции $Z_p(z)$ с условием $\sqrt{z}\,Z_p \to 0$ при $z \to 0$ и описанным в п. 3.7.1 спектром $\{E, Z_p\}$. Второе уравнение является одномерным интегродифференциальным уравнением Фаддеева для функции $f(\varphi;p^2)$, $\varphi \equiv \varphi_1$, с условиями $f = 0$ на концах отрезка $[0,\pi/2]$ и содержит произведение V^{eff} потенциала $c\,(\sec\varphi)^2$ и суммы единичного и интегрального операторов I и h_{0000}^0. При выключении оператора h_{0000}^0 такая основная угловая задача становится вспомогательной угловой задачей – дифференциальным уравнением для функции Φ с условиями $\Phi = 0$ при $\varphi = 0, \pi/2$. Задачи для функций Φ и f интерпретируются как задачи Шредингера о спектре ($\{p^2,\Phi\}$ или $\{p^2,f\}$) частицы, движущейся на отрезке $\varphi \in [0,\pi/2]$ с энергией p^2 соответственно в поле $c\,(\sec\varphi)^2$, пропорциональном квадрату секанса расстояния φ, и в нелокальном поле V^{eff}.

В п. 3.7.2 дан полный анализ точного спектра $\{p^2,\Phi\}$: при любом действительном параметре c доказана теорема существования решений $\Phi(\varphi;p^2)$; предложен способ их вычисления, основанный на разложениях в ряды Гаусса ${}_2F_1$; показано, что при $c \geq 0$ спектр – вещественный и дискретный, а при $c < 0$ – спектр сплошной и возможен коллапс частицы ($p^2 = -\infty$) в точку $\varphi = 0$.

В п. 3.7.3 исследован вещественный спектр $\{p^2,f\}$: выведены явные асимптотики любого решения f при $\varphi \to 0\,\pi/2$; предложены способы вычисления спектра, основанные на фурье- и сплайн-разложениях; численно показано, что при $c \geq 0$ спектр – дискретный, а при $c < 0$ спектр – сплошной и возможен коллапс частицы в точку $\varphi = \pi/2$.

В п. 3.7.4 исследовано двухпараметрическое (параметры: константа p^2 разделения аргументов r, Ω_i и полная энергия E) семейство физически приемлемых решений уравнений Фаддеева и соответствующих им волновых функций трехбозонных связанных состояний; доказано, что коллапс трех бозонов возможен при любой отрицательной константе ($c < 0$) парного взаимодействия $V_i = c/x_i^2$; показано как такие функции можно использовать для моделирования эффектов Томаса и Ефимова и для построения новых нерелятивистских кварковых моделей.

Полученные в главе 3 ложные решения уравнений Фаддеева, факторизованные решения этих уравнений в случае парных взаимодействий центробежного типа, а также точные вещественные собственные функции краевой задачи Шредингера с потенциалом, пропорциональным квадрату секанса расстояния, предложено использовать как эталонные.

Основные результаты главы 3.

1. Предложены простые методы выделения ложных и физических слагаемых парных взаимодействий и построения двух классов точных решений уравнений Фаддеева: класса всех ложных решений, а в случае парных взаимодействий центробежного типа – класса факторизованных решений, представимых в виде произведения зависящей от гиперрадиуса функции Бесселя и конечных линейных комбинаций гипергармоник.

В рамках предложенных подходов впервые: доказаны критерии существования физических слагаемых центральных парных взаимодействий и обоих классов точных решений в случае центральных и нецентральных парных взаимодействий; дан анализ физических условий, достаточных для существования разбиений осцилляторных и кулоновских взаимодействий на ложные и физические слагаемые.

2. Теория дифференциальных уравнений Фаддеева расширена выполненным качественным и численным анализом дифференциальных уравнений Фаддеева для системы трех тождественных бозонов с нулевым полным моментом и S-волновыми взаимодействиями центробежного типа.

В итоге анализа впервые найден и исследован класс точных факторизованных решений, представимых в виде произведений зависящей от гиперрадиуса функции Бесселя и функции гиперугла, подчиненной интегродифференциальной краевой задаче с однородными граничными условиями; доказана теорема существования и единственности точных решений такого класса, а чтобы точные решения можно было бы использовать как эталонные, коэффициенты их разложений затабулированы; доказано, что коллапс трех бозонов возможен при любой отрицательной константе парного взаимодействия; попутно с доказательством дан качественный и численный анализ спектра и коллапса частицы в поле, пропорциональном квадрату секанса расстояния, и в нелокальном поле центробежного типа; получено и исследовано двухпараметрическое (параметры: константа разделения аргументов и полная энергия) семейство физически приемлемых волновых функций связанных состояний трех бозонов; показано как использовать эти функции для моделирования слабосвязанных трехбозонных состояний, эффектов Томаса и Ефимова и для построения новых нерелятивистских кварковых моделей.

Глава 4 посвящена анализу разложений при малых расстояниях между тремя частицами в довольно общем случае, когда короткодействующие потенциалы всех трех центральных или S-волновых парных взаимодействий – ряды по целым степеням их аргументов. Впервые все разложения определены в виде бесконечных рядов, а их строение исследовано в трех типичных для ядерной физики случаях: в пределе нулевых аргументов потенциалы имеют сингулярность кулоновского типа (случай А)), пропорциональны первой степени их аргументов (случай Б)), или же являются рядами только по четным степеням их аргументов (случай В)).

В разделе 4.2 представлен оптимальный метод построения и анализа ФАР вблизи точки парного удара ($x \to 0$, $y > 0$). Главное преимущество метода – исключительная простота: все ключевые для его реализации цепочки рекуррентных уравнений являются алгебраическими, и поэтому их решение не вызывает никаких принципиальных затруднений.

В п. 4.2.1 получены разложения парных и полного взаимодействий V_i и V в виде рядов по целым степеням аргумента x и полиномам Лежандра $P_s(u)$ переменной $u \equiv \cos\theta = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}/(xy)$.

В п. 4.2.2 случай центральных парных взаимодействий исследован по следующей схеме. В исходном шестимерном уравнении Шредингера полное взаимодействие заменяется найденным рядом, а общее решение $\Psi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – рядом по целым степеням $n = 0, 1, \ldots$ аргумента x и искомым функциям $\Psi^n(\hat{x},\mathbf{y})$. В итоге эти функции подчиняются алгебраической, рекуррентной и, как удалось, доказать однозначно разрешимой цепочке уравнений. Проецированием использованного разложения решения Ψ, его компонент $\Psi^n(\hat{x},\mathbf{y})$ и определяющих их цепочек уравнений на базисы из бисферических или D^σ-функций выводятся степенные по x разложения

$$\Psi^\varepsilon_{ab}(x,y) = \sum_{n=b}^{\infty} x^n\, \Psi^{\varepsilon n}_{ab}(y)\,, \qquad \Psi^{\varepsilon y}_{m'}(x,y,\theta) = \sum_{n=m'}^{\infty} x^n \sum_{b=m'}^{n} \Psi^{\varepsilon ny}_{bm'}(y)\,\Theta_{bm'}(u)$$

проекций $\Psi^\varepsilon_{ab}(x,y)$ или $\Psi^{\varepsilon y}_{m'}(x,y,\theta)$ волновой функции Ψ^ε, подчиненных двух- или трехмерным уравнениям Шредингера, и рекуррентные цепочки алгебраических уравнений. Доказывается, что эти цепочки однозначно определяют проекции $\Psi^{\varepsilon n}_{ab}$ и $\Psi^{\varepsilon ny}_{bm'}$ через некоторые функции $f^{nx}_a(y)$ и $f^{ny}_{m'}(y)$.

В п. 4.2.3 сначала выводятся разложения решений уравнений Фаддеева в случае центральных взаимодействий. Для этого в двух- или в трехмерных уравнениях Фаддеева компоненты Ψ^ε_{ab} или $\Psi^{\varepsilon y}_{m'}$ волновой функции Ψ^ε

заменяются их найденными в п. 4.2.2 рядами, а фаддеевские парциальные компоненты Ψ^{ε}_{iab} или $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$ – искомыми рядами

$$\Psi^{\varepsilon}_{iab}(x,y) = \sum_{n=b}^{\infty} x^n\, \Psi^{\varepsilon n}_{iab}(y)\,, \quad \Psi^{\varepsilon y}_{im'}(x,y,\theta) = \sum_{n=m'}^{\infty} x^n \sum_{b=m'}^{n} \Psi^{\varepsilon n y}_{ibm'}(y)\,\Theta_{bm'}(u)\,.$$

Далее для искомых компонент $\Psi^{\varepsilon n}_{iab}$ или $\Psi^{\varepsilon n y}_{ibm'}$ этих рядов выводятся однозначно разрешимые рекуррентные цепочки алгебраических уравнений. Затем на примере S-волновых парных взаимодействий, доказывается, что в случае нецентральных взаимодействий удобнее в отличие от случая центральных взаимодействий сначала вывести ряды для решений $\{\Psi^{\varepsilon}_{iab}\}$ двумерных уравнений Фаддеева, а затем, используя эти ряды, построить разложения искомого решения $\{\Psi^{\varepsilon}_{ab}\}$ двумерного уравнения Шредингера.

В пп. 4.2.2, 4.2.3 все компоненты $\Psi^{\varepsilon n}_{ab}$, $\Psi^{\varepsilon n y}_{bm'}$ и $\Psi^{\varepsilon n}_{iab}$, $\Psi^{\varepsilon n y}_{ibm'}$ с $n \leq 3$ удалось найти в явном виде, что в предположении об асимптотической сходимости и дифференцируемости рядов Ψ^{ε}_{ab}, $\Psi^{\varepsilon y}_{m'}$ и Ψ^{ε}_{iab}, $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$ позволило исключить из них неизвестные функции f^{nx}_{a}, $f^{ny}_{m'}$ с $n \leq 3$ и впервые в трех случаях А), Б) и В) вывести для решений $\{\Psi^{\varepsilon}_{ab}\}$, $\{\Psi^{\varepsilon y}_{m'}\}$ и $\{\Psi^{\varepsilon}_{iab}\}$, $\{\Psi^{\varepsilon y}_{im'}\}$ двух- и трехмерных уравнений Шредингера и Фаддеева в точке парного удара ($x = 0$, $y > 0$) все связи, содержащие частные производные порядка $k \leq 4$.

В разделе 4.3 представлен метод построения ФАР для уравнений Шредингера и Фаддеева вблизи точки тройного удара. Метод реализуется по отличной от классической схемы В.А. Фока и более простой схеме: сначала строятся фундаментальные решения $\{\Phi^{L}_{iab}\}$, $\forall L$, двумерных уравнений Фаддеева в виде рядов по целым степеням гиперрадиуса r, его логарифма s и искомым функциям $\Phi^{Lnm}_{iab}(\varphi_i)$ одного гиперугла; затем общее решение этих уравнений $\{\Psi^{\varepsilon}_{iab}\}$ представляется линейными комбинацией всех решений $\{\Phi^{L}_{iab}\}$ и некоторых коэффициентов X^{L}_{iab}; далее по такому решению восстанавливаются разложения фаддеевских D^{σ}-компонент $\Psi^{\varepsilon y}_{im'}$, разложения волновой функции Ψ^{ε} и ее бисферических и D^{σ}-компонент (Ψ^{ε}_{ab} и $\Psi^{\varepsilon y}_{m'}$), подчиненных двух- и трехмерным уравнениям Шредингера.

Главное преимущество метода состоит в том, что: ключевой для его реализации является рекуррентная цепочка обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с известной функцией Грина, и поэтому решение всей цепочки несложно найти численно, используя эту функцию или же разложения по полиномам Якоби.

В п. 4.3.1 метод описан для систем из трех тождественных частиц с любым полным угловым моментом, но с S-волновыми парными взаимодействиями, а п. 4.3.2 – для систем трех разных или тождественных частиц, но с центральными парными взаимодействиями. Для исследованных трехчастичных систем впервые дан анализ строения всех полученных рядов; доказано, что в таких рядах при данной степени n гиперрадиуса r максимальная степень m его логарифма s не превышает числа $M(n) = [n/2], [n/6], 0$ соответственно в случае А), Б), В); для решений трех- и двумерных уравнений Шредингера и Фаддеева в точке $r = 0$ получены связи, содержащие частные производные по r порядка $k \leq 3$.

Выведенные в разделах 4.2 и 4.3 связи для решений двух- и трехмерных уравнений Шредингера и Фаддеева предложено использовать в вычислительной практике как дополнительные граничные условия, включение которых улучшает поточечную сходимость вычисляемого решения к точному решению вблизи точек парного и тройного ударов.

Основные результаты главы 4.

1. Предложен оптимальный метод построения разложений волновых функций и их фаддеевских компонент вблизи точки парного удара.
Метод реализован в случаях трех разных и двух тождественных частиц с центральными или S-волновыми взаимодействиями, имеющими или не имеющими кулоновские сингулярности в пределе малых расстояний.
Этим методом впервые получены в явном виде четыре первых слагаемых разложений регулярных решений трех- и двумерных уравнений Шредингера и Фаддеева вблизи точки парного удара; для таких решений в точке парного удара выведены обобщения условия Т. Като – линейные связи между частными производными вплоть до четвертого порядка.

2. Предложен оптимальный метод построения разложений фоковского типа волновых функций и их фаддеевских компонент вблизи точки тройного удара. Метод единообразно реализован для систем трех разных или трех тождественных частиц с центральными или S-волновыми парными взаимодействиями в трех случаях, а именно: когда в пределе малых расстояний между двумя частицами все потенциалы имеют кулоновские сингулярности, пропорциональны расстоянию или же являются рядами по четным степеням расстояния. В результате реализации метода впервые дан анализ зависимости строения разложений волновой функции и ее фаддеевских компонент от типа разложений потенциалов; в точке тройного удара для волновой функции и ее фаддеевских компонент получена совокупность граничных условий в виде линейных связей между производными по гиперрадиусу не выше третьего порядка.

Глава 5 посвящена сплайнам и дискретным аналогам уравнений Фаддеева. В ней даны описание, анализ и модельные примеры применения различных реализаций разработанного метода сплайн-разложений для численного решения трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева.

Основные преимущества метода: поточечная сплайн-аппроксимация и искомого решения, и его частных производных вплоть до производных четвертого порядка; простота, обусловленная тем, что предложенные дискретные сплайн-аналоги уравнений Фаддеева – линейные системы с существенно разреженными матрицами блочной структуры; экономичность алгоритмов численного анализа таких аналогов, обеспеченная применением предложенного блочного аналога схемы исключения Гаусса.

Эффективность метода убедительно подтверждена модельными расчетами, в которых как эталонные применялись найденные в главе 3 точные решения трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева, тем самым попутно доказана прикладная значимость точных решений для отладки и анализа численных алгоритмов.

Раздел 5.2 является поясненным авторскими примерами и замечаниями элементарным введением в теорию сплайн-функций: в п. 5.2.1 описаны определения сеток, сплайнов и два представления сплайнов (кусочно-полиномиальное и разложение по базисным сплайнам), а в п. 5.2.2 обсуждены задачи интерполяции и численного дифференцирования.

Раздел 5.3 посвящен описанию и анализу всех известных дискретных аналогов двумерных уравнений Фаддеева в координатах r, φ и основанных на этих аналогах алгоритмов 1-5. Авторскими являются сплайн-алгоритмы $2, 3, 4$ обычной точности и их модификации $3', 3'', 4', 4''$ повышенной точности, алгоритм $4''$ – наиболее гибкий и экономичный.

Для большей ясности описание дано на примере самой простой и сформулированной в п. 5.3.1 задачи на связанные состояния трех тождественных бозонов с нулевым полным угловым моментом и S-волновыми несингулярными короткодействующими парными взаимодействиями.

При анализе алгоритмов особое внимание уделено не изученным другими авторами проблемам поточечной сплайн-аппроксимации искомого решения и его частных производных.

В п. 5.3.2 представлен и исследован алгоритм 1 (конечно-разностная аппроксимация по переменным r и φ); в п. 5.3.3 – алгоритм 2 (сплайн-аппроксимация по аргументу φ); в п. 5.3.4 – алгоритм 3 (аппроксимация сплайнами $S_{3311}(r, \varphi)$) и его модификации $3', 3''$; в п. 5.3.5 – алгоритм 4 (приближение сплайном $S_{3311}(r,\varphi)$, разложенными по кубическим базисным сплайнам класса C^2) и его модификации $4', 4''$; в п. 5.3.6 – алгоритм 5 (приближение сплайном $S_{3322}(r,\varphi)$, разложенным по эрмитовым кубическим базисным сплайнам).

В п. 5.3.7 дано сравнение и численный анализ алгоритмов 1-5; описана оригинальная методика тестирования сплайн-алгоритмов на поточечную сходимость и численного определения порядков их поточечной аппроксимации при измельчении сетки. Методика пояснена результатами одного из возможных тестов двух алгоритмов 4 и $4''$. Тест заключался в поточечном сравнении вычисленного решения двумерного уравнения Фаддеева в случае S-волновых взаимодействий центробежного типа с найденным в главе 3 точным решением этого же уравнения.

Раздел 5.4 содержит описание и результаты теста на поточечную сходимость одномерного аналога сплайн-алгоритма $4''$. Описание дано на примере задачи о спектре коллапсирующих решений одномерного уравнения фаддеевского типа с нулевыми граничными условиями.

Раздел 5.5 содержит краткий обзор известных сплайн-алгоритмов численного интегрирования трехмерных уравнений Фаддеева; описание трехмерного аналога сплайн-алгоритма $4''$ и иллюстрирующих его быструю и поточечную сходимость примеров использования найденных в главе 3 ложных решений трехмерных уравнений Фаддеева в качестве эталонных; пояснения способов учета найденных в главе 4 связей.

Основные результаты главы 5. Предложен и развит метод сплайн-разложений для экономичного численного анализа трех-, двух- и одномерных уравнений Фаддеева. Этот метод – наиболее полный из всех известных, так как включает в себя: набор простых сплайн-алгоритмов обычной и повышенной точности; описанные способы включения полученных связей в точках парного и тройного ударов и применения найденных точных решений как эталонных; предложенную методику тестирования сплайн-алгоритмов на поточечную сходимость при измельчении сетки и численного определения порядков аппроксимации решения редуцированных фаддеевских уравнений и его частных производных.

Заключение состоит из кратких пояснений места созданных методов функциональных разложений в современной теоретической физике и их возможных обобщений для анализа задачи четырех и более частиц.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Пупышев В.В., Соловцова О.П. "Дальнодействующие потенциалы в ядерной физике низких энергий". ЭЧАЯ, 1996, т. 27, вып. 4, с. 859-922.

[2] Pupyshev V.V., Solovtsova O.P. "Effects of electric polarizability of nuclei in low-energy collisions and action radius of the polarization potential". Int. J. Mod. Phys. A, 1992, v. 7, no. 12, pp. 2713-2739.

[3] Pupyshev V.V., Solovtsova O.P. "Ramsauer effect in triplet neutron-neutron scattering". Phys. Lett. B, 1995, v. 354, no. 1-2, pp. 1-6.

[4] Пупышев В.В., Соловцова О.П. "Влияние взаимодействия магнитных моментов нейтронов на нейтрон-нейтронное рассеяние". ЯФ, 1996, т. 59, № 10, с. 1807–1816.

[5] Пупышев В.В., Соловцова О.П. "Поляризуемость дейтрона и S-волновое π^+d-рассеяние в области энергий ниже 1 кэВ". ЯФ, 1988, т. 48, вып. 1(7), с. 60-64.

[6] Пупышев В.В. "Низкоэнергетические разложения в ядерной физике". ЭЧАЯ, 1997, т. 28, вып. 6, с. 1457-1528.

[7] Pupyshev V.V. "Perturbation theory for the one-dimensional Schrödinger scattering problem". J. Phys. A: Math. Gen. 1995, v. 28, no. 11, pp. 3305-3318.

[8] Пупышев В.В. "Экстраполяция триплетных фаз протон-протонного рассеяния в область низких энергий". ЖЭТФ, 2003, т. 124, вып. 6, с. 1222-1231.

[9] Пупышев В.В. "Экстраполяция дифференциального сечения триплетного pp-рассеяния в область низких энергий". Письма в ЖЭТФ, 2005, т. 82, вып. 5, с. 275-278.

[10] Пупышев В.В. "Спектральные свойства ядер $h^0_{00,00}$ интегральных операторов системы интегродифференциальных уравнений Фаддеева". ЯФ, 1986, т. 43, вып. 1, с. 260-267.

[11] Пупышев В.В. "К теории интегродифференциальных трехчастичных уравнений". ТМФ, 1989, т. 81, № 1, с. 86-93.

[12] Пупышев В.В. "Некоторые свойства коэффициентов Рейнала-Реваи". ЯФ, 1998, т. 61, № 11, с. 1960-1964.

[13] Пупышев В.В. "Коэффициенты Рейнала-Реваи как функции кинематического угла". ЯФ, 1999, т. 62, № 11, с. 1955-1965.

[14] Пупышев В.В. "Некоторые методы и результаты аналитических исследований задачи трех ядерных частиц". ЭЧАЯ, 1999, т. 30, вып. 6, с. 1562-1649.

[15] Пупышев В.В. "Ложные решения уравнений Фаддеева с центральными потенциалами". ТМФ, 1996, т. 107, № 3, с. 501-512.

[16] Пупышев В.В. "Ложные слагаемые в задаче трех частиц". ТМФ, 2000, т. 125, № 2, с. 253-271.

[17] Пупышев В.В. "Некоторые разложения в задаче трех частиц". ЭЧАЯ, 2002, т. 33, вып. 4, с. 844-914.

[18] Pupyshev V.V. "Some exact solutions of the three-identical-particle problem with S-wave inverse square potentials". Phys. Lett. A. 1989, v. 140, no. 4, pp. 151-154.

[19] Пупышев В.В. "К задаче трех частиц с парными взаимодействиями, обратно пропорциональными квадратам расстояний". ТМФ, 2001, т. 128, № 2, с. 268-287.

[20] Пупышев В.В. "Точные решения задачи трех частиц с S-волновыми взаимодействиями центробежного типа". ЯФ, 2003, т. 66, № 1, с. 64-76.

[21] Pupyshev V.V. "An example of three-body collapse". J. Phys. A: Math. Gen. 2003, v. 36, no. 1, pp. L13-L20.

[22] Pupyshev V.V. "Asymptotic expansions of wave functions of three identical particles for small hyperradius and S-vawe potentials". Few-Body Systems, 1990, v. 8, no. 3, pp. 105-122.

[23] Пупышев В.В. "Строение регулярных решений трехчастичного уравнения Шредингера вблизи точки парного удара". ТМФ, 2003, т. 136, № 1, с. 90-114.

[24] Пупышев В.В. "Методы сплайн-функций в проблеме нескольких тел". ЭЧАЯ, 2004, т. 35, вып. 2, с. 257-347.

[25] Пупышев В.В. "Использование бикубических сплайнов для решения интегродифференциальных уравнений Фаддеева". ЯФ, 1986, т. 43, вып. 5, с. 1318-1326.

Получено 6 октября 2005 г.

Отпечатано методом прямого репродуцирования
с оригинала, предоставленного автором.

Подписано в печать 10.10.2005.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,07. Тираж 100 экз. Заказ № 55059.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/