

P11-2005-173

Г. А. Емельяненко, В. В. Кореньков,
В. Н. Самойлов, Н. И. Воронцова

СИСТЕМА RUSEEP И ПРОБЛЕМА ПЛОХОЙ
ОБУСЛОВЛЕННОСТИ В ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Емельяненко Г. А. и др.

P11-2005-173

Система RUSEEP и проблема плохой обусловленности в линейной алгебре

В работе дается анализ состояния основных наиболее известных прикладных пакетов для решения систем линейных алгебраических уравнений, в том числе плохо обусловленных. Анализ выполнен в рамках новой универсальной системы RUSEEP. Приводится описание основных элементов этой системы. Обсуждаются результаты сравнения нового пакета JINRLINPACK с наиболее известными. Приводится новый эффективный метод выбора параметра регуляризации на основе принципа минимума неопределенности и сравниваются результаты численных расчетов при различных способах выбора параметра регуляризации.

Работа выполнена в Научном центре прикладных исследований ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Emelyanenko G. A. et al.

P11-2005-173

RUSEEP Benchmark and the Ill-Conditioning Problem in Linear Algebra

Here we present a comprehensive analysis of a few most known linear algebra software packages, including those capable of solving ill-conditioned problems. The tests are performed with the help of the new universal benchmarking system RUSEEP, a brief description of which is provided in the paper, and the results of the comparison of these programs' performance with the new software package JINRLINPACK are discussed. We propose a new highly effective method for choosing the regularization parameter based on the uncertainty principle and give the results of numerical experiments demonstrating its advantage over other existing regularization techniques.

The investigation has been performed at the Scientific Center of Applied Research, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует множество научно-прикладных тематических программных пакетов. Часто возникает практическая необходимость выбора из однотипных (по научной проблематике) пакетов наиболее оптимального для численного решения конкретной научной задачи. В работах [1, 2] была разработана и описана *система экспертной оценки тематических научно-прикладных программных пакетов RUSEEP (Russian born Universal System of Expert Evaluation of Packages)* для сравнения эффективности этих пакетов. Там же были сформулированы концепция, принципы, проблемы и задачи RUSEEP.

Предложенная система экспертной оценки тематических научно-прикладных программных пакетов (RUSEEP) является универсальной, т.е. она может быть применена к анализу программного пакета по практически любой научной проблеме. Например, в работе [1] было проанализировано современное состояние спектральной проблемы, а также известные пакеты по спектральной проблеме в рамках RUSEEP.

В процессе проведения анализа современного состояния пакетов по решению систем линейных алгебраических уравнений нами было обнаружено, что и в этой научной области, подобно спектральной проблеме, нет единой системы оценки эффективности программных пакетов. Во многих из них также лишь «угадываются» отдельные элементы системы, но сама система в целом не определена.

С учетом результатов указанных работ, а также некоторых методологических приемов анализа пакетов, использованных в [3, 4], в настоящей работе сформулированы основные задачи RUSEEP собственно для проблемы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Решение систем линейных алгебраических уравнений является, как известно, одной из сложных проблем вычислительной математики. Это один из немногих разделов, где желательно так же, как в спектральной проблеме, пользоваться многими уже готовыми прикладными пакетами. Разработка новых методов и программных модулей и их всестороннее тестирование представляет собой сложную научную проблему. Она решается, как правило, большими коллективами высококвалифицированных математиков и программистов в течение многих лет интенсивной работы [1]. Однако новые научные

задачи, в частности в теоретической и экспериментальной физике [5, 6], и новые информационные технологии выдвигают более жесткие требования как к численным алгоритмам, так и к качественно новым программным продуктам. По этой причине созданию, например, пакета JNRLINPACK для решения систем линейных алгебраических уравнений предшествовал фундаментальный анализ современного состояния проблемы. Новый научно-прикладной пакет JNRLINPACK наряду с описанным в [2] JINREISPACK по спектральной проблеме, являются составными частями универсального научно-прикладного пакета JNRLAPACK по линейной алгебре, создаваемого в ОИЯИ.

Как видно из приведенной ниже схемы (рис. 1), основу концепции RUSEEP составляют пять принципов:

- 1) принцип («озадаченного») пользователя — отбор оптимального тематического пакета пользователя;
- 2) принцип (доступной) платформы — условия работы с пакетом;
- 3) принцип (математических) возможностей — документированность и возможности пакета;
- 4) принцип (сравнительного) анализа — тесты пакета и их анализ;
- 5) принцип (графического) интерфейса — графическая среда пакета.

Более подробно с этими принципами, проблемами и задачами RUSEEP можно ознакомиться в работах [1, 2].

Как уже было отмечено выше, предложенная RUSEEP может быть применена для анализа пакетов из любой научно-прикладной области. При этом принципы и проблемы RUSEEP сохраняются, конкретизируются лишь некоторые задачи принципа (математических) возможностей в соответствии с конкретной научной проблемой.

В этой работе анализируются, в рамках RUSEEP, пакеты для решения систем линейных алгебраических уравнений. В соответствии со сказанным выше остановимся подробнее на конкретизации задач третьего принципа.

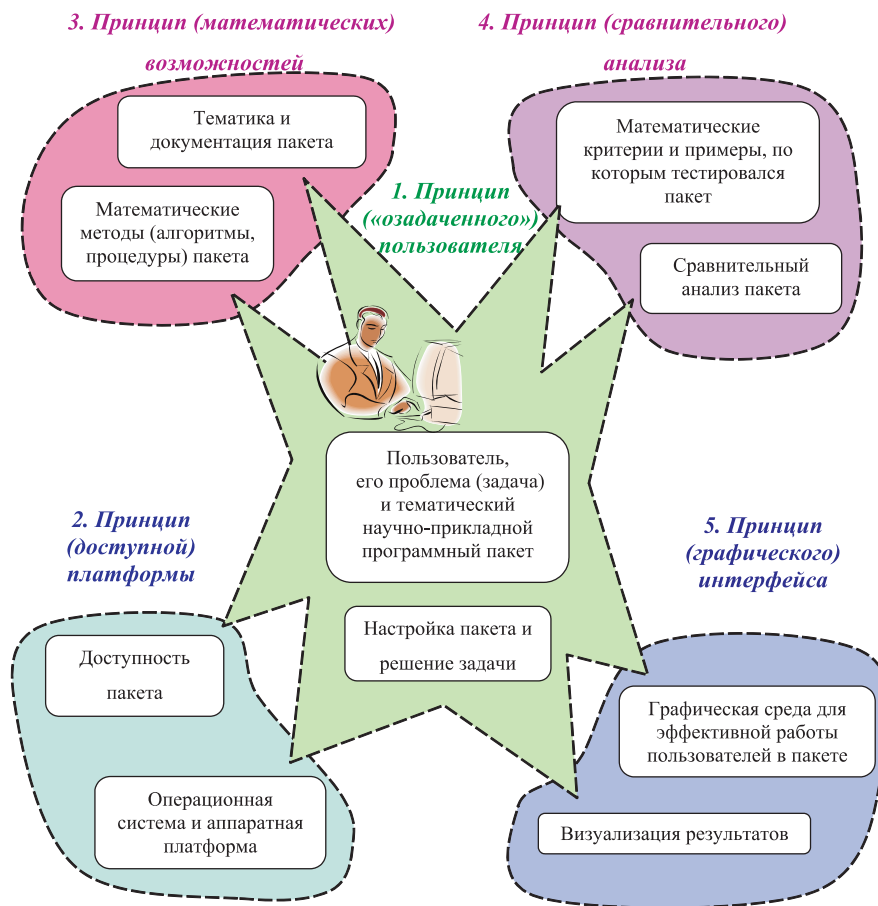
Проблема 1. Тематика и документация пакета.

Все задачи, описанные в [2], остаются неизменными для любого научно-прикладного пакета.

Проблема 2. Математические методы (алгоритмы, процедуры) пакета.

Универсальный пакет для решения систем линейных алгебраических уравнений должен быть представлен программными комплексами для каждой из следующих задач:

- решение системы линейных алгебраических уравнений, в том числе с учетом специфики матрицы системы;
- нахождение обратной матрицы;
- вычисление определителя матрицы;
- вычисление ведущих угловых миноров матрицы;
- оценка числа обусловленности матрицы и системы;
- вычисление отдельных компонент решения системы;



Принципиальная схема (модель верхнего уровня) RUSEEP (Russian born Universal System of Expert Evaluation of Packages)

— либо комбинация из представленных выше задач.

Пакет должен представлять отдельные пути решения для следующих типов матриц:

- трехдиагональная матрица общего вида (симметричная и несимметричная);
- блочно-трехдиагональная матрица;
- двухдиагональная матрица общего вида (верхнедвухдиагональная и нижнедвухдиагональная);

- ленточная матрица;
- заполненная матрица общего вида (симметричная и несимметричная);
- положительно определенная (симметричная) матрица;
- разреженная матрица.

1. АНАЛИЗ В РАМКАХ RUSEEP СОВРЕМЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В подавляющем большинстве наиболее известных пакетов и библиотек программ для решения систем линейных алгебраических уравнений используются, как известно, алгоритмы, опубликованные в [7]. Эта подборка работ различных авторов представляет собой собрание процедур, написанных на языках Алгол и Фортран, вместе с необходимыми комментариями по поводу методов и важными вычислительными деталями. Уместно здесь отметить [4], что, как правило, разработка пакетов значительно отстает от имеющихся на «математическом рынке» новых численных методов. Свидетельством этого, в частности, является разработка нового пакета JINRLINPACK на основе [9–12]. Ниже приведена табл. 1 результатов сравнительного анализа современного состояния пакетов LAPACK, CERNLIB, MATLAB, NAG, JINRLINPACK по RUSEEP. Анализ результатов, приведенных в табл. 1, легко выполнить с учетом приведенных ниже пояснений к обозначениям, принятым в этой таблице. В частности, из табл. 1 видно, что пакет JINRLINPACK находится еще в настоящее время в стадии разработки. В табл. 1 не заполнен последний столбец. Его содержание отражено в приводимых ниже табл. 2–11, из которых видно также, что собственно численные алгоритмы пакета JINRLINPACK в реализованной версии уже достаточно конкурентоспособные.

Пояснения к табл. 1. В первом столбце таблицы указаны имена исследованных в работе пакетов, в последующих столбцах — элементы системы RUSEEP.

В таблице используются следующие обозначения:

+ (в цветном варианте на фоне зеленого цвета) — элемент в пакете присутствует и отвечает требованиям RUSEEP;

± (в цветном варианте на фоне фиолетового цвета) — элемент в пакете присутствует, но лишь частично отвечает требованиям RUSEEP;

– (в цветном варианте на фоне красного цвета) — элемент в пакете отсутствует.

Таблица 1

Таблица сравнительного анализа известных научно-прикладных математических пакетов в рамках системы RUSEEP	Доступность	Требования		Документация	Поддержка пакета	Характер решаемой проблемы	Тип матриц	Макс размерность	Информация о численных методах	Библиотека тестов	Её применение	Сравнительный анализ с другими пакетами	Возможность графической визуализации	Современный графический интерфейс	Интеллектуальный анализатор исходной задачи	Выход о системе критериев пакета и математических результатов тестов
		Платформа	Операционная система													
LAPACK	Через Internet полностью доступен	PC SMP MPP	Win Unix	+	+		Любые	$S:N-10^4$ $M:N-10^6$	+	+	+	+	+	+	+	
CERNLIB	полностью доступен	PC	Win Unix	+	+		Любые	$N-10^5$	+	+	+	+	+	+	+	
NAG	Платная или демо-версия	PC SMP	Win Unix	+	+		Любые	$S:N-10^3$ $M:N-10^5$	+	+	+	+	+	+	+	
MATLAB	Платная или демо-версия	PC SUN ALPHA HP	Win Unix Mac	+	+		Любые	$S:N-10^4$ $M:N-10^6$	+	+	+	+	+	+	+	
JNRLINPACK		PC, R+	Win, R+	R	R		Любые	$S:N-10^7$	R+	R+	R	R+	R+	R	R	

Также используются следующие сокращения:

PC — однопроцессорный, IBM-совместимый компьютер;

SMP — симметричные мультипроцессорные системы;

MPP — массивно-параллельные системы;

$S : N \sim 10^m$ — показатель однопроцессорной системы с указанием $N \sim 10^m$ максимального порядка матриц;

$M : N \sim 10^m$ — показатель мультипроцессорной системы с указанием $N \sim 10^m$ максимального порядка матриц;

R (в цветном варианте на фоне темно-серого цвета) — элемент детально не проработан;

R+ (в цветном варианте на фоне светло-серого цвета) — элемент в стадии разработки;

Win — Windows 9x, Windows 2000, Windows XP;

Mac — Mac OS platform, Apple.

При оценке качества (по сути содержания последнего столбца табл. 1) алгоритмов численного решения X систем линейных алгебраических уравнений $WX = Y$, W : C_2 — двухдиагональная, C_3 — трехдиагональная, $A = A^T$ — симметричная, $A \neq A^T$ — несимметричная матрицы, принято рассматривать устойчивость (относительно вычислительных и наследственных погрешностей) *величин*: число обусловленности системы (естественное число обусловленности), число обусловленности матрицы системы (стандартное число обусловленности), невязка, относительная погрешность решения. Важной характеристикой численного метода является также полное время счета решения.

Тестирование численных алгоритмов решения систем линейных алгебраических уравнений всех рассмотренных в данной работе математических пакетов производилось на тестах из широко известной в мировой математической литературе библиотеки тестов [12]. При этом при тестировании использовались следующие подпрограммы из пакетов:

MCC — программы Lin2dsysccmSolver, Lin3dsysccmSolver и LinsysccmSolver из пакета JINRLINPACK (алгоритмы метода критических компонент [9–11]);

GS — программа DEQN из библиотеки CERNLIB [13] (модифицированные алгоритмы метода исключения Гаусса);

QR — программа DGELS из пакета LAPACK [14] (алгоритмы QR-метода);

SVD — подпрограмма-функция PSOL из библиотеки LINA [16] (алгоритм метода сингулярного разложения с использованием исчерпания);

TRM — подпрограмма SLAY из библиотеки LIBJINR (алгоритмы метода регуляризации по А. Н. Тихонову [16–18]).

Поясим, прежде всего, сокращения и обозначения, принятые в приводимых ниже табл. 2–15:

Таблица 3.

$$C_2 : \{q_i = \varepsilon^*, i = 1, \dots, m; \quad r_i = 1 - \varepsilon^*, i = 2, \dots, m; \varepsilon^* = 0.01\};$$

$$X : \{x_i = 1/(2i + \varepsilon^*), i = 1, \dots, m\}; Y : \{y_i = \frac{(2i + 3\varepsilon^*)}{(2i + \varepsilon^*)(2i + \varepsilon^* + 2)},$$

$$i = 1, \dots, m - 1; \quad y_m = \frac{\varepsilon^*}{2m + \varepsilon^*}\};$$

N	$\frac{econd(W,Y) = \ Y\ /\ W\ }{cond(W)} \quad \frac{\ X\ }{\ X\ }$	Program	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$		
					δ_L	δ_X	δ_R
3	$\frac{0.523057}{5.102e05} \parallel \frac{0.3038}{9.754e05} = \frac{0.5809}{9.754e05}$	MCC	0.523057	0	5.6959e-13	6.6825e-13	0
		INV	0.523057	7.3447e-16	4.2528e-13	4.9870e-13	3.7473e-10
		GS	0.523057	9.1809e-17	4.2719e-13	5.0137e-13	4.6841e-11
		QR	0.523057	0	1.5750e-13	1.8493e-13	0
		SVD	0.523057	0	1.6151e-13	1.8971e-13	0
		TRM	0.523056	1.3108e-12	5.6987e-07	6.6873e-07	6.6877e-07
4	$\frac{0.552395}{5.345e07} \parallel \frac{0.3282}{9.676e07} = \frac{0.5941}{9.676e07}$	MCC	0.552395	0	2.4710e-12	2.9659e-12	0
		INV	0.552395	9.1942e-14	2.0792e-11	2.4983e-11	4.9143e-06
		GS	0.552395	6.6263e-19	1.7348e-11	2.0823e-11	3.5418e-11
		QR	0.552395	0	1.3909e-12	1.6693e-12	0
		SVD	0.552395	2.3990e-16	6.1629e-13	7.3957e-13	1.2823e-08
		TRM	0.549468	1.1948e-10	5.3266e-03	6.3860e-03	6.3862e-03
5	$\frac{0.569113}{5.457e09} \parallel \frac{0.3429}{9.589e09} = \frac{0.6025}{9.589e09}$	MCC	0.569113	0	4.1051e-10	4.9964e-10	0
		INV	0.569113	1.0971e-11	5.5352e-10	6.7692e-10	5.9869e-02
		GS	0.569113	6.3363e-19	3.5448e-09	4.3144e-09	3.4577e-09
		QR	0.569113	0	1.1117e-09	1.3530e-09	0
		SVD	0.569113	2.3295e-16	7.7971e-10	9.4900e-10	1.2712e-06
		TRM	0.806954	6.4353e-10	0.294739	0.406361	3.5117
6	$\frac{0.579938}{5.508e11} \parallel \frac{0.3527}{9.498e11} = \frac{0.6082}{9.498e11}$	MCC	0.579938	0	7.7891e-08	9.5704e-08	0
		INV	0.579938	3.5084e-09	3.0209e-08	3.6121e-08	1.9324e03
		GS	0.579938	5.5718e-17	1.3034e-07	1.6015e-07	3.0689e-05
		QR	0.579938	0	1.8731e-08	2.3015e-08	0
		SVD	0.579938	1.6715e-16	1.6322e-07	2.0055e-07	9.2066e-05
		TRM	0.814624	9.4979e-11	0.288092	0.402534	5.2314e01
7	$\frac{0.587526}{5.508e13} \parallel \frac{0.3598}{9.498e13} = \frac{0.6124}{9.498e13}$	MCC	0.587532	3.0165e-19	9.9316e-06	1.2287e-05	1.6615e-05
		INV	0.587526	5.3328e-08	4.8804e-07	6.2101e-07	2.9373e06
		GS	0.587525	7.7222e-17	3.0569e-06	3.7817e-06	4.2534e-03
		QR	0.587533	3.0165e-19	1.1809e-05	1.4609e-05	1.6615e-05
		SVD	0.587533	2.6187e-16	1.1981e-05	1.4823e-05	1.4424e-02
		TRM	0.819633	5.4183e-14	0.283183	0.399408	2.9844
8	$\frac{0.593144}{3.362e15} \parallel \frac{0.3651}{5.668e15} = \frac{0.6155}{5.668e15}$	MCC	0.593088	0	9.3628e-05	1.1643e-04	0
		INV	0.593489	1.8009e-05	5.8194e-04	7.1828e-04	6.0546e10
		GS	0.593706	9.3177e-17	9.4576e-04	1.1764e-03	3.1326e-01
		QR	0.593151	0	1.1687e-05	1.4534e-05	0
		SVD	0.825178	1.5266e-14	0.281193	0.399996	5.1324e01
		TRM	0.825178	1.5266e-14	0.281193	0.399996	5.1324e01
9	$\frac{0.597471}{5.378e15} \parallel \frac{0.3693}{9.001e15} = \frac{0.6180}{9.001e15}$	MCC	0.629970	0	5.1588e-02	6.5423e-02	0
		INV	0.647046	2.5735e-03	7.6617e-02	9.7103e-02	1.3840e13
		GS	0.576568	8.4088e-17	3.6254e-02	4.4833e-02	4.5223e-01
		QR	0.564487	0	5.8433e-02	7.1867e-02	0
		SVD	0.121082	1.3046e-16	3.93443	4.09707	7.0161e-01
		TRM	0.121082	1.3046e-16	3.93443	4.09707	7.0161e-01
10	$\frac{0.600908}{5.409e15} \parallel \frac{0.3726}{9.002e15} = \frac{0.6201}{9.002e15}$	MCC	0.982293	0	0.388260	0.691074	0
		INV	1.122811	0.177847	0.464819	0.808551	9.6197e14
		GS	0.299888	8.5383e-17	1.00377	1.11283	4.6184e-01
		QR	0.055487	0	9.82963	11.6112	0
		SVD	0.022532	1.5920e-16	25.6693	25.8642	8.6111e-01
		TRM	0.022532	1.5920e-16	25.6693	25.8642	8.6111e-01

Таблица 4.

$$C_2 : \{q_i = 7/5, i = 1, \dots, m; r_i = 11/3, i = 2, \dots, m\}; X : \{x_i = 1/(2i + 1), i = 1, \dots, m\} Y : \{y_i = \frac{(152i + 118)}{15(2i + 1)(2i + 3)}, i = 1, \dots, m - 1; y_m = \frac{7}{5(2m + 1)}\};$$

N	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W)} = \frac{\ Y\ /\ W\ }{\ X\ }$	Program	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_y	$\delta_L \leq \delta_x \leq \delta_R$		
10	$\frac{0.778653}{1.895e04} \parallel \frac{0.3577}{2.434e04} = \frac{0.4593}{0.4593}$	MCC	0.778653	0	6.5985e-14	1.2002e-13	4.2077e-12
		INV	0.778653	1.5703e-14	2.3324e-14	4.2795e-14	2.9757e-10
		GS	0.778656	7.5740e-17	3.6564e-06	6.6448e-06	4.2077e-12
		QR	0.778656	0	3.6564e-06	6.6448e-06	4.2077e-12
		SVD	0.778656	2.7829e-16	3.6564e-06	6.6448e-06	7.3185e-12
		TRM	0.778656	3.3464e-13	3.6529e-06	6.6385e-06	1.2700e-09
15	$\frac{0.783889}{2.363e06} \parallel \frac{0.3661}{3.014e06} = \frac{0.4670}{0.4670}$	MCC	0.783889	0	2.0755e-13	3.8431e-13	5.2468e-10
		INV	0.783889	5.3198e-12	9.8579e-13	6.2139e-12	1.2571e-05
		GS	0.783652	8.1016e-17	3.0218e-04	5.5893e-04	5.2468e-10
		QR	0.783652	3.7570e-18	3.0218e-04	5.5893e-04	5.2468e-10
		SVD	0.783652	3.1917e-16	3.0218e-04	5.5893e-04	6.9768e-10
		TRM	0.783612	4.0073e-11	3.5339e-04	6.5362e-04	1.8959e-05
20	$\frac{0.786898}{2.928e08} \parallel \frac{0.3706}{3.721e08} = \frac{0.4710}{0.4710}$	MCC	0.786898	0	1.0219e-11	1.9068e-11	6.5013e-08
		INV	0.786898	5.7120e-10	5.3304e-10	7.7630e-10	1.6725e-01
		GS	0.808742	1.3499e-16	2.7010e-02	5.2269e-02	6.5013e-08
		QR	0.808742	0	2.7010e-02	5.2269e-02	6.5013e-08
		SVD	0.808742	5.1265e-16	2.7010e-02	5.2269e-02	1.0750e-07
		TRM	0.852830	5.7750e-09	7.7310e-02	0.163682	1.6952
25	$\frac{0.788837}{3.621e10} \parallel \frac{0.3734}{4.590e10} = \frac{0.4734}{0.4734}$	MCC	0.788837	1.8366e-18	3.7824e-08	7.0943e-08	8.0401e-06
		INV	0.788837	8.0351e-09	8.3377e-08	1.5805e-07	2.9095e02
		GS	0.136373	1.3763e-16	4.78442	5.18906	8.0401e-06
		QR	0.136373	1.2116e-16	4.78442	5.18906	8.0401e-06
		SVD	0.136373	5.0658e-16	4.78442	5.18906	1.5948e-05
		TRM	0.854170	2.6750e-10	7.6488e-02	0.162844	2.0249
30	$\frac{0.790188}{4.471e12} \parallel \frac{0.3753}{5.658e12} = \frac{0.4750}{0.4750}$	MCC	0.790185	0	3.6011e-06	6.7776e-06	9.9274e-04
		INV	0.790192	9.2094e-06	5.5297e-06	8.8589e-06	4.1175e07
		GS	0.001478	8.7511e-15	533.812	535.343	9.9274e-04
		QR	0.001478	6.4504e-15	533.812	535.343	9.9274e-04
		SVD	0.001478	2.4537e-14	533.812	535.343	2.2441e-03
		TRM	0.855125	1.2084e-10	7.5939e-02	0.162280	1.1719
35	$\frac{0.791181}{5.483e14} \parallel \frac{0.3768}{6.930e14} = \frac{0.4762}{0.4762}$	MCC	0.791255	0	9.3087e-05	1.7665e-04	1.2174e-01
		INV	0.791622	3.5363e-04	5.5617e-04	6.9611e-04	1.9390e11
		GS	0.000014	2.4315e-12	5.6731e+04	5.6732e+04	1.2174e-01
		QR	0.000014	1.5421e-12	5.6731e+04	5.6732e+04	1.2174e-01
		SVD	0.000014	2.5959e-12	5.6731e+04	5.6732e+04	2.4608e-01
		TRM	0.855836	1.0291e-10	7.5545e-02	0.161870	4.8606e-01
40	$\frac{0.791943}{3.152e16} \parallel \frac{0.3778}{3.981e16} = \frac{0.4771}{0.4771}$	MCC	0.797869	0	7.4278e-03	1.4178e-02	6.9987
		INV	0.785928	1.6513e-02	7.6534e-03	3.6254e-02	5.2049e14
		GS	1.291e-07	1.4758e-10	6.1323e+06	6.1323e+06	6.9987
		QR	1.291e-07	9.9495e-11	6.1323e+06	6.1323e+06	6.9987
		SVD	0.000014	2.5959e-12	5.6731e+04	5.6732e+04	2.4608e-01
		TRM	0.805346	9.0068e-11	1.6642e-02	3.2175e-02	1.9883e01

Таблица 5.

$\varepsilon^* = 10^{-7}, \tilde{\varepsilon}^* = 10^{-4}; C_2 : \{q_1 = \varepsilon^*, q_i = -1, i = 2, \dots, m-1, i \neq k, q_k = \tilde{\varepsilon}^*, q_m = \tilde{\varepsilon}^*; r_i = 2, i = 2, \dots, m\}; Y : \{y_1 = (\varepsilon^* - 2)(1 + \varepsilon^*), y_i = (-1)^i 3(1 + \varepsilon^*), i = 2, \dots, m-1, i \neq k, y_k = (-1)^k (2 - \tilde{\varepsilon}^*)(1 + \varepsilon^*); y_m = (-1)^{m+1} \tilde{\varepsilon}^*(1 + \varepsilon^*)\}; X : \{x_i = (-1)^{i+1}(1 + \varepsilon^*), i = 1, \dots, m\}$

N	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W)} = \frac{\ Y\ /\ W\ }{\ X\ }$	Program	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$			
					δ_L	δ_X	δ_R	
5	$\frac{0.890209}{1.639e16} \parallel \frac{1.9906}{1.842e16} \parallel \frac{2.2361}{2.2361}$	MCC	0.890176	2.2204e-16	3.6344e-05	8.1263e-05	3.6392	
		INV	0.890209	5.3954e-13	2.0000e-08	4.4721e-08	8.8431e03	
		GS	0.890214	2.2204e-16	2.3013e-05	5.1456e-05	3.6392	
		QR	0.890209	2.2204e-16	3.6344e-05	8.1262e-05	3.6392	
		SVD						
		TRM	0.993859	3.4022e-16	1.6936e-01	3.0605e-01	5.5762	
7	$\frac{0.879318}{2.215e16} \parallel \frac{2.3265}{2.519e16} \parallel \frac{2.6458}{2.6458}$	MCC	0.879250	2.2204e-16	7.6729e-05	2.0296e-04	4.9182	
		INV	0.879318	4.1475e-13	1.4286e-08	3.7796e-08	9.1867e03	
		GS	0.879322	2.2204e-16	5.8024e-05	1.5349e-04	4.9182	
		QR	0.879318	2.2204e-16	7.6729e-05	2.0296e-04	4.9182	
		SVD						
		TRM	0.923620	2.2456e-16	4.8243e-02	1.5729e-01	4.9740	
9	$\frac{0.896861}{2.361e16} \parallel \frac{2.6906}{2.633e16} \parallel \frac{3.0000}{3.0000}$	MCC	0.896666	2.2204e-16	2.1775e-04	6.5269e-04	5.2424	
		INV	0.896861	3.3364e-11	1.1098e-08	3.3333e-08	7.8772e05	
		GS	0.896864	2.2204e-16	2.0698e-04	6.2043e-04	5.2424	
		QR	0.896861	2.2204e-16	2.1775e-04	6.5269e-04	5.2424	
		SVD						
		TRM	0.948998	2.5846e-16	4.2473e-02	1.6609e-01	6.1022	
11	$\frac{0.912195}{2.429e16} \parallel \frac{3.0254}{2.663e16} \parallel \frac{3.3166}{3.3166}$	MCC	0.911560	2.2204e-16	6.9718e-04	2.3043e-03	5.3934	
		INV	0.912195	1.5916e-10	9.0273e-09	3.0152e-08	3.8660e06	
		GS	0.912198	2.2204e-16	6.8749e-04	2.2724e-03	5.3934	
		QR	0.912195	2.2204e-16	6.9718e-04	2.3043e-03	5.3934	
		SVD						
		TRM	0.952569	2.2204e-16	1.5184e-02	5.4993e-02	5.3934	
13	$\frac{0.924090}{2.473e16} \parallel \frac{3.3319}{2.676e16} \parallel \frac{3.6056}{3.6056}$	MCC	0.921906	2.2204e-16	2.3696e-03	8.4258e-03	5.4910	
		INV	0.924090	2.1228e-10	7.6026e-09	2.7736e-08	5.2497e06	
		GS	0.924092	2.2204e-16	2.3699e-03	8.4267e-03	5.4910	
		QR	0.924090	2.2204e-16	2.3696e-03	8.4258e-03	5.4910	
		SVD						
		TRM	0.904455	2.6254e-16	1.9953e-02	8.3921e-02	6.4926	
15	$\frac{0.933328}{2.505e16} \parallel \frac{3.6148}{2.684e16} \parallel \frac{3.8730}{3.8730}$	MCC	0.925423	2.2204e-16	8.5428e-03	3.1327e-02	5.5621	
		INV	0.933328	1.4422e-09	6.0923e-09	2.5868e-08	3.6127e07	
		GS	0.933330	2.2204e-16	8.5431e-03	3.1328e-02	5.5621	
		QR	0.933328	2.2204e-16	8.5428e-03	3.1327e-02	5.5621	
		SVD						
		TRM	0.964985	2.3416e-16	9.8400e-03	4.1211e-02	5.8657	
17	$\frac{0.940638}{2.529e16} \parallel \frac{3.8784}{2.688e16} \parallel \frac{4.1231}{4.1231}$	MCC	0.908960	2.2204e-16	3.4852e-02	1.1766e-01	5.6154	
		INV	0.940638	5.9832e-09	3.6225e-09	2.5133e-08	1.5132e08	
		GS	0.940640	2.2204e-16	3.4852e-02	1.1766e-01	5.6154	
		QR	0.940638	2.2204e-16	3.4852e-02	1.1766e-01	5.6154	
		SVD						
		TRM	0.928008	2.2204e-16	2.7792e-02	3.0587e-01	5.6154	

Таблица 6.

$C_2 : \{q_i = 3, i = 1, \dots, m; r_i = 7, i = 2, \dots, m\}; Y : \{y_i = 10, i = 1, \dots, m - 1; y_m = 3\}; X : \{x_i = 1, i = 1, \dots, m\}$

N	$\frac{econd(W,Y) = \ Y\ /\ W\ }{cond(W)} \ X\ $	Program	T.sec	$\frac{econd(W,X)}{cond(W,Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$		
10	$\frac{0.962795}{7.982e03} = \frac{3.0446}{8.290e03} = \frac{3.1623}{3.1623}$	MCC	0	0.962795	0	0	0	1.7723e-12
		INV	0	0.962795	7.2886e-14	5.9684e-14	1.4850e-13	5.8178e-10
		GS	0	0.962795	0	0	0	1.7723e-12
		QR	0	0.962795	0	0	0	1.7723e-12
		SVD	0	0.962795	3.0042e-16	1.1094e-14	5.7319e-14	2.3980e-12
		TRM	0	0.962795	1.8686e-13	2.9827e-10	1.4915e-09	1.4915e-09
20	$\frac{0.979446}{3.913e07} = \frac{4.3802}{3.995e07} = \frac{4.4721}{4.4721}$	MCC	0	0.979446	0	0	0	8.6884e-09
		INV	0	0.979446	2.0848e-11	6.5781e-12	2.7029e-11	8.1578e-04
		GS	0	0.979446	0	0	0	8.6884e-09
		QR	0	0.979446	0	0	0	8.6884e-09
		SVD	0	0.979446	3.0695e-16	2.7447e-11	1.9408e-10	1.2011e-08
		TRM	0	0.980261	1.5339e-10	8.3106e-04	6.0014e-03	6.0022e-03
30	$\frac{0.985829}{1.886e11} = \frac{5.3996}{1.914e11} = \frac{5.4772}{5.4772}$	MCC	0	0.985829	0	0	0	4.1877e-05
		INV	0	0.985829	4.3136e-07	2.2761e-07	1.3964e-06	8.1354e04
		GS	0	0.985829	0	0	0	4.1877e-05
		QR	0	0.985829	0	0	0	4.1877e-05
		SVD	0	0.985829	3.1761e-16	8.7532e-08	7.5805e-07	5.9901e-05
		TRM	0	0.986342	2.4388e-14	5.2044e-04	4.5975e-03	4.5996e-03
40	$\frac{0.989191}{9.022e14} = \frac{6.2562}{9.121e14} = \frac{6.3246}{6.3246}$	MCC	0	0.989191	0	0	0	2.0032e-01
		INV	0	0.987762	5.0149e-03	1.4459e-03	1.0505e-02	4.5244e12
		GS	0	0.989191	0	0	0	2.0032e-01
		QR	0	0.989191	0	0	0	2.0032e-01
		SVD	0	0.988875	3.2018e-16	3.1892e-04	3.1405e-03	2.8887e-01
		TRM	0	0.988997	6.4664e-16	1.9562e-04	1.9376e-03	5.8340e-01
50	$\frac{0.991264}{7.540e16} = \frac{7.0093}{7.606e16} = \frac{7.0711}{7.0711}$	MCC	0	0.991264	0	0	0	1.6742e01
		INV	0	0.054685	5.6309	17.1267	18.2461	4.2457e17
		GS	0	0.991264	0	0	0	1.6742e01
		QR	0	0.991264	0	0	0	1.6742e01
		SVD	0	0.991264	0	0	0	1.6742e01
		TRM	0	0.991264	0	0	0	1.6742e01
100	$\frac{0.995542}{7.575e16} = \frac{9.9554}{7.609e16} = \frac{10.000}{10.000}$	MCC	0	0.995542	0	0	0	1.6820e01
		INV	0	0.995542	0	0	0	1.6820e01
		GS	0	0.995542	0	0	0	1.6820e01
		QR	0	0.995542	0	0	0	1.6820e01
		SVD	0	0.995542	0	0	0	1.6820e01
		TRM	0.22	0.934054	2.0753e-16	6.5830e-02	0.437402	1.5720e01
200	$\frac{0.997748}{7.592e16} = \frac{14.1103}{7.609e16} = \frac{14.1421}{14.1421}$	MCC	0	0.997748	0	0	0	1.6857e01
		INV	0	0.997748	0	0	0	1.6857e01
		GS	0.38	0.997748	0	0	0	1.6857e01
		QR	0	0.997748	0	0	0	1.6857e01
		SVD	0	0.997748	0	0	0	1.6857e01
		TRM	0	0.997748	0	0	0	1.6857e01
500	$\frac{0.999094}{7.603e16} = \frac{22.3404}{7.609e16} = \frac{22.3607}{22.3607}$	MCC	0	0.999094	0	0	0	1.6882e01
		INV	0	0.999094	0	0	0	1.6882e01
		GS	4.23	0.999094	0	0	0	1.6882e01
		QR	0.11	0.999094	0	0	0	1.6882e01
		SVD	0	0.999094	0	0	0	1.6882e01
		TRM	0	0.999094	0	0	0	1.6882e01

Продолжение таблицы 6.

500	0.998901		MCC	0	0.998736	1.4996e-16	1.6593e-04	1.8218e-02	8.8538e-02
	5.976e14	22.3361	INV						
			GS	4.4	0.998901	1.3473e-16	2.4147e-06	2.1976e-03	7.9543e-02
			QR	3.24	0.977669	8.2528e-16	6.1964e-03	1.1150e-01	4.8725e-01
	5.983e14	22.3607	SVD	11.7	0.998898	6.3267e-16	1.5163e-06	1.7414e-03	3.7353e-01
		TRM	23.0	0.998901	5.6091e-12	5.3521e-12	7.5787e-07	3.3116e03	
700	0.999213		MCC	0	0.999213	1.0613e-16	5.3712e-16	2.6951e-14	1.2290e-13
	1.158e03	26.4367	INV						
			GS	11.2	0.999213	1.0701e-16	3.0884e-15	3.9896e-15	1.2392e-13
			QR	7.91	0.999213	7.9344e-16	9.3996e-16	1.3716e-13	9.1880e-13
	1.159e03	26.4575	SVD	29.8	0.999213	6.7122e-16	9.3996e-16	1.4596e-14	7.7727e-13
		TRM	63.1	0.999213	4.4927e-15	5.6398e-15	4.7060e-12	5.2025e-12	
800	0.999310		MCC	0	0.999145	1.3967e-16	1.6542e-04	1.8190e-02	8.2492e-02
	5.933e14	28.2648	INV						
			GS	18.1	0.999310	2.5749e-16	2.7283e-06	2.3360e-03	1.5208e-01
			QR	11.4	0.999158	7.8252e-16	3.5691e-04	2.6720e-02	4.6216e-01
	5.937e14	28.2843	SVD	56.3	0.999307	7.3099e-16	5.9637e-07	1.0921e-03	4.3172e-01
		TRM	110.	0.999310	1.4178e-11	1.4163e-11	2.1323e-07	8.3735e03	
1000	0.999448		MCC	0	0.999448	1.0081e-16	8.9877e-16	3.8341e-14	1.6674e-13
	1.654e03	31.6053	INV						
			GS	32.2	0.999448	1.6084e-16	4.1568e-15	4.7202e-15	2.6603e-13
			QR	21.5	0.999448	8.3280e-16	8.9877e-16	4.7940e-13	1.3775e-12
	1.655e03	31.6228	SVD	85.8	0.999448	7.7081e-16	2.3593e-15	2.0028e-14	1.2749e-12
		TRM	186.	0.999448	2.8944e-15	2.1346e-15	2.7495e-12	4.7873e-12	

m — порядок матрицы рассматриваемой системы;

$econd(W, Y) = \|W^{-1}\|_2 \cdot \|Y\|_{\mathbb{E}} / \|X\|_{\mathbb{E}}$ — естественное число обусловленности;

$cond(W) = \|W^{-1}\|_2 \cdot \|W\|_2$ — стандартное число обусловленности;

$\delta_Y = \frac{\|W\tilde{X} - Y\|_{\mathbb{E}}}{\|Y\|_{\mathbb{E}}}$ — невязка;

$\delta_X = \frac{\|\tilde{X} - X\|_{\mathbb{E}}}{\|X\|_{\mathbb{E}}}$ — относительная погрешность \tilde{X} — найденного решения системы;

$\delta_L = \frac{|\|\tilde{X}\|_{\mathbb{E}} - \|X\|_{\mathbb{E}}|}{\|X\|_{\mathbb{E}}}$;

$\frac{\|W^{-1}\|_2 \cdot \|W\tilde{X} - Y\|_{\mathbb{E}}}{\|X\|_{\mathbb{E}}} = \delta_R = \delta_Y econd(W, Y)$ — нижняя и верхняя границы δ_X . При этом $\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$.

ε_1 — относительная погрешность вещественной арифметики ЭВМ.

Таблица 7.

$C_3 : \{q_i = 1, i = 1, \dots, m; r_i = 1 - \varepsilon^*, p_i = 1 + \varepsilon^*, i = 2, \dots, m\};$
 $\varepsilon^* = 10^{-7} \quad X : \{x_i = 1, i = 1, \dots, m\} Y : \{y_1 = 2 - \varepsilon^*; y_i = 3,$
 $i = 2, \dots, m - 1; y_m = 2 + \varepsilon^*\}$

N	$\frac{econd(W,Y) = \ Y\ /\ W\ }{cond(W)} \ X\ $	Program	T.sec	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$		
10	$\frac{0.9688976}{1.672e01} \parallel \frac{3.0642}{1.725e01} = \frac{3.1623}{3.1623}$	MCC	0	0.968976	8.9509e-17	1.4043e-16	3.6486e-16	1.4966e-15
		INV	0	0.968976	3.8858e-16	4.2130e-16	1.1797e-15	6.4971e-15
		GS	0	0.968976	1.3369e-16	0	7.0217e-17	2.2353e-15
		QR	0	0.968976	9.9301e-17	1.4043e-16	8.0136e-16	1.6603e-15
		SVD	0	0.968976	3.3028e-16	2.8087e-16	9.6914e-16	5.5223e-15
		TRM	0	0.968976	3.4129e-16	1.4043e-16	3.2920e-15	5.7064e-15
20	$\frac{0.979116}{5.765e14} \parallel \frac{4.3787}{5.888e14} = \frac{4.4721}{4.4721}$	MCC	0	0.979011	1.7451e-16	8.8670e-07	1.3317e-03	1.0238e-01
		INV	0	1.529e-13	3.1064e12	6.4040e12	6.4040e12	1.8225e27
		GS	0	0.979116	6.1403e-17	9.0170e-07	1.3430e-03	3.6025e-02
		QR	0	0.978931	1.6066e-16	1.0160e-03	4.5089e-02	9.4260e-02
		SVD	0	0.978962	2.5995e-16	6.6175e-05	1.1505e-02	1.5251e-01
		TRM	0	0.979116	1.2142e-09	1.2142e-09	4.2221e-09	7.1237e05
30	$\frac{0.984675}{5.082e01} \parallel \frac{5.3933}{5.161e01} = \frac{5.4772}{5.4772}$	MCC	0	0.984675	1.2696e-16	0	1.2114e-15	6.4520e-15
		INV	0	0.984675	5.1690e-16	2.2204e-16	1.5201e-15	2.6269e-14
		GS	0	0.984675	8.8175e-17	1.6216e-16	3.5573e-16	4.4811e-15
		QR	0	0.984675	1.3771e-16	0	2.7127e-15	6.9982e-15
		SVD	0	0.984675	2.9309e-16	1.6216e-16	3.2688e-15	1.4895e-14
		TRM	0	0.984675	1.1601e-15	1.2973e-15	5.3611e-14	5.8956e-14
50	$\frac{0.990078}{5.779e14} \parallel \frac{7.0009}{5.837e14} = \frac{7.0711}{7.0711}$	MCC	0	0.989902	1.0638e-16	1.7814e-04	1.8876e-02	6.4032e-02
		INV	0	5.942e-13	7.9433e11	1.6662e12	1.6662e12	4.7811e26
		GS	0	0.990078	7.9919e-17	2.3732e-06	2.1787e-03	4.8103e-02
		QR	0	0.985291	6.0254e-16	2.9838e-03	7.7308e-02	3.6267e-01
		SVD	0	0.989854	3.3758e-16	4.5645e-04	3.0218e-02	2.0319e-01
		TRM	0.05	0.990078	4.6361e-10	4.6361e-10	5.8660e-09	2.7905e05
60	$\frac{0.991574}{1.005e02} \parallel \frac{7.6807}{1.013e02} = \frac{7.7460}{7.7460}$	MCC	0	0.991574	9.4992e-17	1.1466e-16	2.7833e-15	9.5467e-15
		INV	0	0.991574	6.1069e-16	3.4399e-16	3.8563e-15	6.1374e-14
		GS	0	0.991574	8.8923e-17	3.4399e-16	3.6514e-16	8.9367e-15
		QR	0	0.991574	7.1718e-16	2.2933e-16	7.5171e-15	7.2076e-14
		SVD	0	0.991574	3.3868e-16	1.1466e-16	9.8032e-15	3.4037e-14
		TRM	0.06	0.991574	6.7879e-16	1.1466e-16	2.3545e-14	6.8219e-14
80	$\frac{0.993529}{5.751e14} \parallel \frac{8.8864}{5.789e14} = \frac{8.9443}{8.9443}$	MCC	0	0.993382	1.5657e-16	1.4877e-04	1.7250e-02	9.1341e-02
		INV	0	1.198e-12	3.9362e11	8.2917e11	8.2917e11	2.2964e26
		GS	0	0.993527	9.7537e-17	3.7312e-06	2.7318e-03	5.6903e-02
		QR	0	0.967009	6.9125e-16	1.1388e-03	4.7737e-02	4.0328e-01
		SVD	0.11	0.993359	3.3551e-16	1.9295e-04	1.9645e-02	1.9574e-01
		TRM	0.06	0.993529	1.4534e-10	1.4534e-10	1.3030e-08	8.4791e04
100	$\frac{0.994750}{1.656e02} \parallel \frac{9.9475}{1.665e02} = \frac{10.0000}{10.0000}$	MCC	0	0.994750	1.2298e-16	0	4.0835e-15	2.0365e-14
		INV	0	0.235779	1.9910	3.2190e00	4.2000	3.2971e02
		GS	0	0.994750	1.5559e-16	1.7764e-16	1.1127e-15	2.5766e-14
		QR	0	0.994750	7.4552e-16	1.7764e-16	2.4675e-14	1.2346e-13
		SVD	0.28	0.994750	4.1071e-16	1.7764e-16	4.9965e-15	6.8014e-14
		TRM	0.27	0.994750	8.4105e-16	5.3291e-16	8.3863e-14	1.3928e-13
200	$\frac{0.997300}{5.997e14} \parallel \frac{14.1039}{6.014e14} = \frac{14.1421}{14.1421}$	MCC	0	0.997142	1.3656e-16	1.5815e-04	1.7785e-02	8.1865e-02
		INV	0	0.997299	1.4928e-16	8.4590e-06	4.1132e-03	8.9491e-02
		GS	0.33	0.997299	8.3855e-16	6.3848e-03	1.1318e-01	5.0271e-01
		QR	0.39	0.972739	4.9280e-16	7.3378e-05	1.2115e-02	2.9543e-01
		SVD	1.26	0.997299	5.6957e-11	5.6953e-11	1.3113e-07	3.4146e04
		TRM	1.6	0.997300	5.6957e-11	5.6953e-11	1.3113e-07	3.4146e04
300	$\frac{0.998183}{4.974e02} \parallel \frac{17.2890}{4.983e02} = \frac{17.3205}{17.3205}$	MCC	0	0.998183	8.9496e-17	2.0512e-16	1.1415e-14	4.4515e-14
		INV	0	0.998183	1.6093e-16	1.6409e-15	2.5469e-15	8.0046e-14
		GS	1.26	0.998183	7.8017e-16	2.0512e-16	1.3141e-14	3.8806e-13
		QR	0.82	0.998183	5.3972e-16	4.1023e-16	6.5710e-15	2.6846e-13
		SVD	3.03	0.998183	3.0958e-15	3.6921e-15	1.4449e-12	1.5399e-12
		TRM	5.05	0.998183	3.0958e-15	3.6921e-15	1.4449e-12	1.5399e-12

Таблица 8.

$C_3 : \{q_i = 6, i = 1, \dots, m; r_i = 3, p_i = 4, i = 2, \dots, m\}; X : \{x_i = 1, i = 1, \dots, m\} Y : \{y_1 = 9; y_i = 13, i = 2, \dots, m - 1; y_m = 10\}$

N	$\frac{econd(W, Y) = \ Y\ /\ W\ }{cond(W)} \ X\ $	Program	T.sec	$\frac{econd(W, X)}{cond(W, Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_x \leq \delta_R$		
10	$\frac{0.973446}{1.039e02} = \frac{3.0783}{1.067e02}$	MCC	0	0.973446	0	0	0	0
		INV	0	0.973446	0	0	0	2.3070e-14
		GS	0	0.973446	0	0	0	0
		QR	0	0.973446	1.5716e-16	2.8087e-16	2.7684e-15	1.6329e-14
		SVD	0	0.973446	2.1280e-16	1.4043e-16	8.9262e-15	2.2110e-14
		TRM	0	0.973446	1.0851e-15	4.7747e-15	1.0627e-13	1.1274e-13
50	$\frac{0.991668}{1.843e04} = \frac{7.0122}{1.858e04}$	MCC	0	0.991668	0	0	0	0
		INV	0	0.991668	0	0	0	0
		GS	0	0.991668	0	0	0	0
		QR	0	0.991668	7.7732e-16	1.1970e-13	8.0897e-12	1.4326e-11
		SVD	0	0.991668	3.0904e-16	2.8890e-15	1.8193e-13	5.6956e-12
		TRM	0.05	0.991668	8.3900e-16	2.0474e-13	1.3825e-11	1.5463e-11
100	$\frac{0.995601}{4.921e07} = \frac{9.9560}{4.943e07}$	MCC	0	0.995601	0	0	0	0
		INV	0	0.995601	0	0	0	0
		GS	0.06	0.995601	0	1.7764e-16	2.0050e-14	0
		QR	0.06	0.995601	1.0748e-15	3.6827e-10	3.5131e-08	5.2891e-08
		SVD	0.22	0.995601	4.7734e-16	2.6192e-11	2.4985e-09	2.3490e-08
TRM	0.33	0.995601	5.3257e-14	2.7479e-08	2.6210e-06	2.6209e-06		
150	$\frac{0.997013}{6.550e10} = \frac{12.2109}{6.569e10}$	MCC	0	0.997013	0	0	0	0
		INV	0	0.997013	0	0	0	0
		GS	0.11	0.997013	0	1.8725e-13	2.1911e-11	0
		QR	0.11	0.997013	8.8809e-16	3.0177e-07	3.5184e-05	5.8170e-05
		SVD	0.66	0.997013	4.7719e-16	3.0745e-08	3.5913e-06	3.1256e-05
		TRM	0.94	0.997013	9.4489e-14	6.1613e-13	8.3031e-11	6.1890e-03
200	$\frac{0.997740}{4.356e13} = \frac{14.1102}{4.366e13}$	MCC	0	0.997740	0	0	0	0
		INV	0	0.997740	0	0	0	0
		GS	0.28	0.997740	9.6846e-18	9.3452e-11	1.2607e-08	4.2186e-04
		QR	0.28	0.997306	9.0529e-16	4.3532e-04	2.3014e-02	3.9434e-02
		SVD	1.27	0.997725	5.2779e-16	1.4679e-05	1.7692e-03	2.2991e-02
		TRM	1.65	0.997740	6.8110e-15	5.9035e-15	1.6870e-12	2.9669e-01
300	$\frac{0.998479}{8.173e16} = \frac{17.2942}{8.186e16}$	MCC	0	0.998479	0	0	0	0
		INV	0	0.998479	0	0	0	0
		GS	1.21	0.997601	0	8.8042e-04	3.6353e-02	0
		QR	1.05	0.097786	7.2132e-16	9.21085	10.1678	5.8953e01
		SVD	5.0	0.998479	8.3410e-16	1.8460e-15	2.4472e-13	6.8171e01
TRM	5.0	0.998479	8.3410e-16	1.8460e-15	2.4472e-13	6.8171e01		
400	$\frac{0.998854}{6.406e16} = \frac{19.9771}{6.413e16}$	MCC	0	0.998854	0	0	0	0
		INV	0	0.998854	0	0	0	0
		GS	2.41	0.000018	9.0540e-13	5.559e04	5.559e04	5.8000e04
		QR	1.92	0.112776	6.2892e-16	7.85698	8.80559	4.0289e01
		SVD	11.6	0.998854	9.1327e-16	0	1.6385e-14	5.8504e01
TRM	11.6	0.998854	9.1327e-16	0	1.6385e-14	5.8504e01		
500	$\frac{0.999081}{7.760e16} = \frac{22.3401}{7.767e16}$	MCC	0	0.999081	0	0	0	0
		INV	0	0.999081	0	0	0	0
		GS	3.19	0.125915	5.6196e-16	6.93454	7.87596	4.3608e01
		QR	3.19	0.125915	5.6196e-16	6.93454	7.87596	4.3608e01
		SVD	22.9	0.999081	8.6982e-16	0	1.4818e-14	6.7498e01
TRM	22.9	0.999081	8.6982e-16	0	1.4818e-14	6.7498e01		

Таблица 9.

$$A : \{a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i = 1, \dots, m-1; j = 1, \dots, m, a_{m1} = 333,$$

$$a_{mj} = \frac{1}{m+j-1}, j = 2, \dots, m\} F : \{f_i = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k+1)(i+k-1)},$$

$$i = 1, \dots, m-1; f_m = \sum_{k=2}^m \frac{1}{(2k+1)(m+k-1)} + 111;$$

$$Z : \{z_i = 1/(2i+1), i = 1, \dots, m\}$$

N	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W)} = \frac{\ Y\ /\ W\ }{\ X\ }$	Program	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_γ	$\delta_L \leq \delta_x \leq \delta_R$		
5	$\frac{0.761011}{1.189e07} = \frac{0.33357}{1.563e07}$	MCC	0.761011	3.7479e-16	1.4057e-14	1.7928e-10	4.4563e-09
		INV	0.761011	1.0533e-15	1.8794e-13	1.1472e-10	1.2524e-08
		GS	0.761011	1.2794e-16	2.5329e-16	2.7796e-12	2.6401e-09
		QR	0.761011	1.9407e-16	7.3453e-15	9.9813e-11	2.6401e-09
		SVD	0.761011	3.7479e-16	1.4057e-14	1.7928e-10	4.4563e-09
		TRM	0.761011	4.4864e-16	1.4564e-13	3.3821e-09	5.3343e-09
6	$\frac{0.749538}{3.628e08} = \frac{0.33356}{4.841e08}$	MCC	0.749538	1.8391e-16	7.1100e-15	9.7815e-10	8.0556e-08
		INV	0.749538	2.8205e-14	1.9420e-12	7.7876e-10	1.0233e-05
		GS	0.749538	1.1451e-18	4.9895e-16	9.7522e-11	8.0556e-08
		QR	0.749538	5.2269e-16	1.7338e-14	2.5538e-09	1.8963e-07
		SVD	0.749538	1.8391e-16	7.1100e-15	9.7815e-10	8.0556e-08
		TRM	0.749538	5.9529e-16	4.3583e-13	1.7348e-07	2.1597e-07
7	$\frac{0.741247}{1.127e10} = \frac{0.33355}{1.521e10}$	MCC	0.741247	4.3343e-16	1.0609e-14	1.8541e-08	4.8848e-06
		INV	0.741247	3.1297e-12	4.6086e-10	1.8563e-08	3.5272e-02
		GS	0.741247	2.5588e-16	9.8689e-16	3.2323e-09	2.8838e-06
		QR	0.741247	5.4110e-16	1.4557e-14	2.2513e-08	6.0982e-06
		SVD	0.741247	4.3343e-16	1.0609e-14	1.8541e-08	4.8848e-06
		TRM	0.741247	5.1451e-16	2.1224e-12	1.8506e-06	5.7985e-06
8	$\frac{0.734975}{3.548e11} = \frac{0.33355}{4.828e11}$	MCC	0.734975	1.2921e-16	1.3455e-15	5.0536e-08	7.8780e-05
		INV	0.734975	2.2387e-11	1.4146e-09	1.3268e-07	7.9429
		GS	0.734975	1.2794e-16	3.6696e-16	7.6112e-08	7.8780e-05
		QR	0.734975	4.1099e-16	5.8714e-15	6.3025e-08	1.4582e-04
		SVD	0.734975	1.2921e-16	1.3455e-15	5.0536e-08	7.8780e-05
		TRM	0.734975	7.9551e-13	3.8532e-11	2.1092e-05	2.8225e-01
9	$\frac{0.730064}{1.128e13} = \frac{0.33354}{1.545e13}$	MCC	0.730064	8.9537e-16	1.3547e-12	1.6417e-06	1.0100e-02
		INV	0.730064	4.4209e-10	2.1776e-09	3.5449e-06	4.9868e03
		GS	0.730064	1.2795e-16	4.4350e-13	9.4675e-07	2.5046e-03
		QR	0.730064	2.6637e-16	5.0668e-13	1.0093e-06	3.0047e-03
		SVD	0.730064	8.9537e-16	1.3547e-12	1.6417e-06	1.0100e-02
		TRM	0.730064	1.4496e-12	1.8083e-10	1.9440e-05	1.6351e01
10	$\frac{0.726114}{3.613e14} = \frac{0.33353}{4.975e14}$	MCC	0.726114	2.0096e-16	2.4077e-09	6.9393e-05	8.0223e-02
		INV	0.726117	3.0279e-08	4.6129e-06	7.5350e-05	1.0940e07
		GS	0.726114	1.2796e-16	1.9029e-11	6.1706e-06	8.0223e-02
		QR	0.726114	9.2186e-16	2.2413e-10	2.1173e-05	3.3307e-01
		SVD	0.726114	2.0096e-16	2.4077e-09	6.9393e-05	8.0223e-02
		TRM	0.726114	2.6939e-12	3.1558e-10	2.1609e-05	9.7331e02
11	$\frac{0.722867}{1.162e16} = \frac{0.33352}{1.608e16}$	MCC	0.722866	3.5010e-16	2.4258e-06	2.2026e-03	4.0682
		INV	0.722812	3.1056e-07	7.6308e-05	8.4990e-03	3.6087e09
		GS	0.722864	1.2796e-16	4.9927e-06	3.1600e-03	2.5801e00
		QR	0.722865	1.9560e-16	2.9755e-06	2.4395e-03	2.5801e00
		SVD	0.722866	3.5010e-16	2.4258e-06	2.2026e-03	4.0682
		TRM	0.722867	5.1191e-12	4.8358e-10	2.7243e-05	5.9484e04
12	$\frac{0.720152}{3.478e17} = \frac{0.33352}{4.830e17}$	MCC	0.712190	5.9271e-16	1.1179e-02	0.149944	2.0614e02
		INV	0.708899	1.6236e-05	1.5874e-02	0.165736	5.6469e12
		GS	0.718933	1.3574e-18	1.6953e-03	5.8253e-02	7.7226e01
		QR	0.717468	4.1023e-17	3.7416e-03	8.6587e-02	7.7226e01
		SVD	0.712190	5.9271e-16	1.1179e-02	0.149944	2.0614e02
		TRM	0.720152	4.9913e-12	3.4193e-10	2.5644e-05	1.7360e06

Таблица 10.

$$F : \{f_i = (m - i) \sum_{k=1}^{i+1} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=1}^i \frac{(-1)^k}{k}, i = 1, \dots, m - 1; f_m = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^k}{k}\};$$

$$A : \{a_{ij} = n - i + 1, i = 1, \dots, m; a_{ij+1} = n - i; j = 1, \dots, i; a_{ij} = 0, i = 1, \dots, m; j = i + 2, \dots, m\} Z : \{z_i = (-1)^i / i, i = 1, \dots, m\}$$

N	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W)} = \frac{\ Y\ /\ W\ }{\ X\ }$	Program	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$		
5	$\frac{0.375365}{2.430e02} = \frac{0.45412}{6.475e02}$	MCC	0.375365	3.5336e-16	3.8543e-15	4.6130e-15	8.5866e-14
		INV	0.375365	3.2797e-14	2.0373e-14	2.2040e-14	7.9697e-12
		GS	0.375365	2.4167e-16	4.7720e-15	5.1754e-15	5.8726e-14
		QR	0.375365	1.0515e-15	3.8543e-15	4.6268e-15	2.5551e-13
		SVD	0.375365	3.5336e-16	3.8543e-15	4.6130e-15	8.5866e-14
		TRM	0.375365	1.1487e-13	2.5003e-11	2.7927e-11	2.7913e-11
8	$\frac{0.327785}{9.035e04} = \frac{0.40511}{2.756e05}$	MCC	0.327785	9.4151e-16	1.2936e-14	1.5052e-14	8.5065e-11
		INV	0.327785	1.4299e-12	5.7773e-12	7.0834e-12	1.2919e-07
		GS	0.327785	4.6245e-17	9.3210e-13	1.0761e-12	2.0061e-11
		QR	0.327785	2.3722e-16	9.8887e-13	1.1415e-12	2.1433e-11
		SVD	0.327785	9.4151e-16	1.2936e-14	1.5052e-14	8.5065e-11
		TRM	0.327785	6.0894e-12	4.7653e-07	5.5015e-07	5.5018e-07
10	$\frac{0.306838}{8.758e06} = \frac{0.38198}{2.854e07}$	MCC	0.306838	7.3001e-16	1.6003e-10	1.8659e-10	6.3934e-09
		INV	0.306838	1.5007e-10	4.4884e-11	8.0235e-11	1.3143e-03
		GS	0.306838	1.2070e-16	1.1316e-10	1.3194e-10	1.9446e-09
		QR	0.306838	7.7161e-17	2.1008e-10	2.4495e-10	1.9446e-09
		SVD	0.306838	7.3000e-16	1.6003e-10	1.8659e-10	6.3933e-09
		TRM	0.305214	7.0758e-10	5.3201e-03	6.1971e-03	6.1970e-03
13	$\frac{0.282407}{1.659e10} = \frac{0.35396}{5.874e10}$	MCC	0.282407	2.2682e-16	1.9320e-08	2.2721e-08	3.7629e-06
		INV	0.282407	2.7337e-07	3.3510e-07	5.0004e-07	4.5352e03
		GS	0.282407	2.0023e-16	7.3314e-08	8.6220e-08	3.6836e-06
		QR	0.282407	9.1081e-16	1.2771e-08	1.5019e-08	1.5110e-05
		SVD	0.282407	2.2682e-16	1.9319e-08	2.2721e-08	3.7629e-06
		TRM	0.536601	4.3227e-09	0.473711	0.849893	7.1714e01
15	$\frac{0.269130}{3.690e12} = \frac{0.33834}{1.371e13}$	MCC	0.269127	6.2989e-16	1.2678e-05	1.4966e-05	2.3243e-03
		INV	0.269121	1.2007e-04	3.6304e-05	8.1182e-05	4.4306e08
		GS	0.269130	1.6779e-16	2.8631e-06	3.3799e-06	8.1933e-04
		QR	0.269128	7.8752e-16	7.4613e-06	8.8079e-06	2.9059e-03
		SVD	0.269127	6.2989e-16	1.2678e-05	1.4966e-05	2.3243e-03
		TRM	0.314873	4.1102e-13	0.145275	1.51656	1.5167
16	$\frac{0.263163}{6.067e13} = \frac{0.33125}{2.305e14}$	MCC	0.263263	4.2716e-16	3.7647e-04	4.4512e-04	2.5916e-02
		INV	0.263184	9.7893e-04	7.6979e-05	7.4582e-04	5.9392e10
		GS	0.263309	6.0641e-17	5.5277e-04	6.5359e-04	1.3471e-02
		QR	0.263299	3.5670e-16	5.1615e-04	6.1029e-04	2.1641e-02
		SVD	0.263263	4.2716e-16	3.7647e-04	4.4512e-04	2.5916e-02
		TRM	0.493321	5.9640e-10	0.466547	0.845605	3.6184e04
17	$\frac{0.257594}{1.078e15} = \frac{0.32459}{4.186e15}$	MCC	0.252385	5.7741e-16	2.0640e-02	2.4337e-02	6.2245e-01
		INV	0.259587	2.0742e-02	7.6777e-03	1.0023e-02	2.2360e13
		GS	0.257015	1.2044e-16	2.2547e-03	2.6680e-03	2.3936e-01
		QR	0.257513	6.9641e-16	3.1478e-04	3.7263e-04	7.5073e-01
		SVD	0.252385	5.7741e-16	2.0640e-02	2.4337e-02	6.2245e-01
		TRM	0.481268	1.4957e-13	0.464759	0.845872	1.6124e02
18	$\frac{0.252356}{1.800e16} = \frac{0.31830}{7.132e16}$	MCC	0.266697	4.3824e-16	5.3775e-02	6.4488e-02	7.8883
		INV	0.265261	0.229378	4.8651e-02	8.2428e-02	4.1288e15
		GS	0.286430	7.6136e-17	0.118962	0.145089	3.9967
		QR	0.279883	1.1578e-15	9.8353e-02	0.119272	2.0840e01
		SVD					
		TRM	0.213562	1.5747e-15	0.181650	0.208976	2.8345e01

Таблица 11.

$$A : \{a_{ij} = \frac{1}{i-j+m}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m, \}; F : \{f_i = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k(i-k+m)}, i = 1, \dots, m\}; Z : \{z_i = 1/i, i = 1, \dots, m\}$$

N	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W)} = \frac{\ Y\ /\ W\ }{\ X\ }$	Program	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$		
5	$\frac{\frac{0.591499}{2.819e05} \parallel \frac{0.7156}{4.766e05}}{1.2098}$	MCC	0.591499	9.9006e-17	5.1391e-13	5.1423e-12	6.2593e-11
		INV	0.591499	2.6093e-12	1.6122e-12	1.0071e-11	7.3556e-07
		GS	0.591499	1.4851e-16	4.1920e-13	4.3866e-12	6.2593e-11
		QR	0.591499	1.5654e-16	3.8213e-13	3.8582e-12	6.2593e-11
		SVD	0.591499	9.9006e-17	5.1391e-13	5.1422e-12	6.2593e-11
		TRM	0.591499	1.2097e-12	3.7622e-08	3.4097e-07	3.4101e-07
6	$\frac{\frac{0.551880}{8.251e06} \parallel \frac{0.6740}{1.495e07}}{1.2212}$	MCC	0.551880	1.9036e-16	1.3979e-11	2.1032e-10	1.8321e-09
		INV	0.551880	3.3841e-10	2.2739e-10	9.2470e-10	2.7922e-03
		GS	0.551880	1.1376e-16	3.7657e-12	5.3339e-11	1.8321e-09
		QR	0.551880	1.3461e-16	1.9019e-11	2.8043e-10	1.8321e-09
		SVD	0.551880	1.9036e-16	1.3979e-11	2.1032e-10	1.8321e-09
		TRM	0.551865	4.8826e-11	2.7115e-05	4.0283e-04	4.0286e-04
7	$\frac{\frac{0.519984}{2.472e08} \parallel \frac{0.6393}{4.754e08}}{1.2296}$	MCC	0.519984	2.2787e-16	7.6473e-10	1.8579e-08	5.6329e-08
		INV	0.519984	1.0977e-08	8.4635e-09	2.9002e-08	2.7135
		GS	0.519984	1.5899e-16	4.5845e-10	1.0940e-08	5.4888e-08
		QR	0.519984	7.8414e-17	6.8698e-10	1.6747e-08	5.4888e-08
		SVD	0.519984	2.2787e-16	7.6473e-10	1.8579e-08	5.6329e-08
		TRM	0.519922	3.5231e-10	1.1941e-04	8.5994e-02	8.7091e-02
8	$\frac{\frac{0.493560}{7.531e09} \parallel \frac{0.6100}{1.526e10}}{1.2359}$	MCC	0.493560	2.0433e-16	7.9381e-09	3.0949e-07	1.6722e-06
		INV	0.493560	6.1139e-08	7.7439e-08	8.3669e-07	4.6044e02
		GS	0.493560	1.2584e-16	1.6200e-09	6.2165e-08	1.6722e-06
		QR	0.493560	3.3618e-16	2.7735e-09	1.1121e-07	2.5318e-06
		SVD	0.493560	2.0433e-16	7.9381e-09	3.0949e-07	1.6722e-06
		TRM	0.494878	1.1315e-09	2.6645e-03	5.1037e-02	8.5213
9	$\frac{\frac{0.471181}{2.324e11} \parallel \frac{0.5847}{4.931e11}}{1.2409}$	MCC	0.471181	3.1361e-16	1.3290e-07	8.1191e-06	7.2883e-05
		INV	0.471181	7.0968e-06	2.8738e-08	1.4611e-05	1.6493e06
		GS	0.471181	1.0653e-16	2.0260e-07	1.2522e-05	5.1602e-05
		QR	0.471181	3.9765e-16	6.1938e-08	3.7432e-06	9.2414e-05
		SVD	0.471181	3.1361e-16	1.3290e-07	8.1191e-06	7.2883e-05
		TRM	0.473976	5.3249e-09	5.8969e-03	8.0065e-02	1.2375e03
10	$\frac{\frac{0.451896}{7.237e12} \parallel \frac{0.5626}{1.602e13}}{1.2449}$	MCC	0.451894	3.5623e-16	3.3404e-06	3.0969e-04	2.5780e-03
		INV	0.451874	8.1412e-05	4.8889e-05	3.8706e-04	5.8918e08
		GS	0.451896	1.0537e-16	1.7282e-07	2.0302e-05	1.6069e-03
		QR	0.451895	1.0907e-16	7.5591e-07	6.6065e-05	1.6069e-03
		SVD	0.451894	3.5623e-16	3.3404e-06	3.0969e-04	2.5780e-03
		TRM	0.450785	3.5254e-10	2.4637e-03	0.175449	2.5513e03
11	$\frac{\frac{0.435041}{2.236e14} \parallel \frac{0.5430}{5.139e14}}{1.2482}$	MCC	0.434919	2.4266e-16	2.7999e-04	1.7885e-02	5.4259e-02
		INV	0.435460	3.0501e-03	9.6332e-04	2.4217e-02	6.8200e11
		GS	0.434914	7.6192e-17	2.9071e-04	1.8310e-02	4.9648e-02
		QR	0.434978	1.7752e-16	1.4385e-04	1.1561e-02	4.9648e-02
		SVD	0.434919	2.4266e-16	2.7999e-04	1.7885e-02	5.4259e-02
		TRM	0.435796	1.2944e-10	1.7339e-03	1.9027e-02	2.8943e04
12	$\frac{\frac{0.420137}{4.378e15} \parallel \frac{0.5256}{1.042e16}}{1.2510}$	MCC	0.419840	2.0379e-16	7.0755e-04	3.3957e-02	9.7209e-01
		INV	0.407509	4.5442e-02	3.0987e-02	0.324733	1.9895e14
		GS	0.414575	1.5564e-16	1.3415e-02	0.168792	9.7209e-01
		QR	0.410843	3.7553e-16	2.2621e-02	0.209649	1.6441
		SVD					
		TRM	0.423667	2.0000e-09	8.3322e-03	9.9311e-02	8.7560e06

Таблица 12.

$A : \{ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m \}$ – матрица Гильберта порядка m ;
 $Y : \{ y_i = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k(i+k-1)}, i = 1, \dots, m \}; \quad X : \{ x_i = 1/i, i = 1, \dots, m \}$

N	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W)} = \frac{\ Y\ /\ W\ }{\ X\ }$	Program	$\frac{econd(W,Y)}{cond(W,Y)}$	δ_Y	$\delta_L \leq \delta_X \leq \delta_R$		
					δ_L	δ_X	δ_R
5	$\frac{0.994698}{4.741e05} = \frac{1.2034}{4.766e05} \cdot 1.2098$	MCC	0.994698	8.8311e-17	0	9.5485e-12	4.1868e-11
		INV	0.994698	8.6371e-13	4.5389e-13	3.3618e-11	4.0948e-07
		GS	0.994698	7.2106e-17	0	9.8557e-12	3.4185e-11
		QR	0.994698	2.5323e-16	1.8354e-16	1.1036e-12	1.2006e-10
		SVD	0.994698	7.5854e-16	9.1769e-16	4.2197e-12	3.5962e-10
		TRM	0.994698	1.1725e-13	7.3415e-16	5.5394e-08	5.5588e-08
7	$\frac{0.990702}{4.709e08} = \frac{1.2181}{4.754e08} \cdot 1.2296$	MCC	0.990702	1.1641e-16	1.8059e-16	1.2709e-08	5.4817e-08
		INV	0.990702	1.3710e-09	1.2358e-09	1.4896e-08	6.4560e-01
		GS	0.990702	6.7209e-17	1.8059e-16	9.9384e-09	3.1649e-08
		QR	0.990702	2.4077e-16	3.6118e-16	1.2618e-08	1.1338e-07
		SVD	0.990702	3.9093e-16	7.2236e-16	1.0661e-08	1.8409e-07
		TRM	0.990702	4.1848e-11	6.0162e-09	1.0974e-04	1.9706e-02
9	$\frac{0.986848}{4.867e11} = \frac{1.2246}{4.931e11} \cdot 1.2409$	MCC	0.986848	3.5918e-16	8.1871e-12	4.0465e-06	1.7481e-04
		INV	0.986849	2.6005e-07	7.8464e-08	1.5004e-05	1.2657e05
		GS	0.986848	1.0506e-16	6.7848e-12	3.6836e-06	5.1133e-05
		QR	0.986848	1.7224e-16	1.1993e-11	4.8975e-06	8.3829e-05
		SVD	0.986848	8.4908e-16	8.8120e-11	1.3275e-05	4.1325e-04
		TRM	0.986848	6.4664e-11	1.2340e-09	4.9796e-05	3.1472e01
10	$\frac{0.985014}{1.580e13} = \frac{1.2262}{1.604e13} \cdot 1.2449$	MCC	0.985014	1.8856e-16	3.3683e-09	8.2077e-05	2.9792e-03
		INV	0.984960	8.2701e-05	5.5283e-05	8.0116e-04	1.3067e09
		GS	0.985014	9.7543e-17	3.5477e-10	2.6637e-05	1.5412e-03
		QR	0.985014	1.3239e-16	4.4762e-10	2.9921e-05	2.0918e-03
		SVD	0.985014	2.0182e-16	7.0019e-11	1.1834e-05	3.1888e-03
		TRM	0.985014	1.1040e-10	1.9639e-09	6.2869e-05	1.7443e03
11	$\frac{0.983247}{5.222e14} = \frac{1.2273}{5.311e14} \cdot 1.2482$	MCC	0.983148	1.4695e-16	1.0131e-04	1.4235e-02	7.6737e-02
		INV	0.983254	5.2456e-04	6.5461e-06	3.0233e-02	2.7393e11
		GS	0.983208	9.1882e-17	3.9501e-05	8.8884e-03	4.7981e-02
		QR	0.983216	8.9274e-16	3.1488e-05	7.9358e-03	4.6619e-01
		SVD	0.983181	5.2859e-16	6.7104e-05	1.1585e-02	2.7603e-01
		TRM	0.983247	1.9246e-10	3.3752e-09	8.2478e-05	1.0050e05
12	$\frac{0.981547}{1.348e16} = \frac{1.2279}{1.374e16} \cdot 1.2510$	MCC	0.940599	1.1401e-16	4.3533e-02	0.298264	1.5369
		INV	0.659601	1.8379e-02	0.488091	1.11482	2.4775e14
		GS	0.972031	1.2653e-16	9.7894e-03	0.140267	1.7056
		QR	0.968101	7.2816e-16	1.3888e-02	0.167242	9.8156
		SVD					
		TRM	0.981547	1.7809e-10	5.1633e-09	1.0189e-04	2.4007e06
13	$\frac{0.979911}{1.558e17} = \frac{1.2282}{1.590e17} \cdot 1.2534$	MCC	0.060389	2.6925e-16	15.2267	16.1959	4.1949e01
		INV	0.011864	3.12276	81.5889	82.6067	4.8653e17
		GS	0.495327	1.7309e-16	0.978310	1.70696	2.6967e01
		QR	0.166249	6.1645e-16	4.89424	5.80879	9.6043e01
		SVD					
		TRM	0.979911	1.6906e-10	7.6141e-09	1.2364e-04	2.6340e07
14	$\frac{0.978336}{4.909e17} = \frac{1.2282}{5.018e17} \cdot 1.2554$	MCC	0.163084	2.2221e-16	4.99898	5.91505	1.0908e02
		INV	0.077208	0.267698	11.6715	12.6477	1.3141e17
		GS	0.102603	2.0877e-16	8.53519	9.48261	1.0249e02
		QR	0.280657	3.3853e-16	2.48587	3.33936	1.6618e02
		SVD					
		TRM	0.978336	3.1062e-10	1.1201e-08	1.5008e-04	1.5248e08

Далее в табл. 13–15 приведены усредненные значения описанных выше характеристик $\bar{\delta}_L$, $\bar{\delta}_X$, $\bar{\delta}_R$, $\bar{\delta}_Y$ для протестированных систем линейных алге-

Таблица 13. Средние значения характеристик при $(1 \leq \mu(W) \leq 1/\sqrt{\varepsilon_1})$, $\bar{N}_1 = 175$

	Program	$\bar{\delta}_Y$	$\bar{\delta}_L$	$\bar{\delta}_X$	$\bar{\delta}_R$
$C_2 X = Y$ $N_1 = 10$ $\bar{\mu}(C_2) = 1.13e07$	MCC	1.3362e-16	7.8079e-12	1.4052e-11	9.3324e-10
	INV	3.4928e-12	6.9509e-12	1.4276e-11	1.2427e-04
	GS	1.3362e-16	8.3186e-12	1.5009e-11	9.3324e-10
	QR	1.3362e-16	7.8079e-12	1.4052e-11	9.3324e-10
	SVD	3.2247e-16	9.0695e-12	3.0778e-11	2.7247e-09
	TRM	1.6410e-10	4.1647e-03	7.6656e-03	7.6630e-03
$C_3 X = Y$ $N_2 = 84$ $\bar{\mu}(C_3) = 9.03e05$	MCC	1.396e-13	1.999e-15	4.733e-15	3.427e-12
	INV	1.518e-01	2.245e-01	3.165e-01	2.080e01
	GS	1.388e-13	2.214e-15	3.388e-15	3.630e-12
	QR	6.016e-13	7.618e-12	5.448e-10	8.245e-10
	SVD	5.533e-12	2.811e-12	4.451e-11	4.707e-10
	TRM	3.164e-10	5.847e-09	3.745e-08	3.784e-08
$AX = Y$ $A \neq A^T$ $N_3 = 45$ $\bar{\mu}(A) = 4.10e06$	MCC	1.117e-15	4.138e-12	3.431e-10	3.388e-09
	INV	1.980e-11	1.217e-11	5.211e-10	2.676e-04
	GS	5.651e-16	2.760e-12	3.293e-11	2.005e-09
	QR	3.385e-15	6.748e-12	4.889e-09	7.189e-09
	SVD	1.308e-15	4.116e-12	1.333e-09	3.358e-09
	TRM	2.692e-11	1.243e-04	1.810e-04	1.939e-04
$AX = Y$ $A = A^T$ $N_4 = 36$ $\bar{\mu}(A) = 3.64e06$	MCC	7.371e-16	4.187e-12	8.270e-11	8.394e-10
	INV	7.399e-12	1.436e-11	3.267e-10	4.759e-05
	GS	4.416e-16	2.646e-12	2.928e-11	3.794e-10
	QR	3.510e-15	2.289e-12	1.867e-09	3.838e-09
	SVD	4.352e-16	8.461e-12	7.399e-11	5.283e-10
	TRM	8.741e-16	3.890e-13	2.856e-11	1.088e-09

браических уравнений $WX = Y$ при $1 \leq \mu(W) \leq 1/\sqrt{\varepsilon_1}$ — хорошей обусловленности, $1/\sqrt{\varepsilon_1} < \mu(W) \leq 1/\varepsilon_1$ — плохой обусловленности, $\mu(W) \geq 1/\varepsilon_1$ — патологически плохой обусловленности этих систем соответственно:

$$\bar{\delta}_L = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} (\delta_L)_l; \quad \bar{\delta}_X = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} (\delta_X)_l;$$

$$\bar{\delta}_R = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} (\delta_R)_l; \quad \bar{\delta}_Y = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} (\delta_Y)_l;$$

$$\bar{\mu}(W) = \frac{1}{N_j} \sum_{l=1}^{N_j} \text{cond}(W)_l;$$

где $\bar{N}_i = \sum_{j=1}^s N_j$, N_j — число примеров данного типа; s — число типов примеров в таблице; i — номер таблицы.

Таблица 14. Средние значения характеристик при
($1/\sqrt{\varepsilon_1} < \mu(W) \leq 1/\varepsilon_1$), $\bar{N}_2 = 62$

	Program	δ_Y	δ_L	δ_X	δ_R
$C_2 X = Y$ $N_1 = 15$ $\bar{\mu}(C_2) = 2.64e14$	MCC	1.4836e-16	7.0057e-05	1.2743e-04	2.2364e-02
	INV	3.6827e-04	1.9740e-04	8.6439e-04	3.2987e11
	GS	1.4836e-16	7.3354e-05	1.3375e-04	2.2364e-02
	QR	1.4836e-16	7.0057e-05	1.2736e-04	2.2364e-02
	SVD	5.6917e-16	6.6489e-05	2.9139e-04	8.6348e-02
	TRM	4.8974e-10	1.0842e-01	1.8893e-01	4.7762
$C_3 X = Y$ $N_2 = 8$ $\bar{\mu}(C_3) = 4.53e14$	MCC	1.0246e-16	1.1543e-04	1.3119e-02	6.0463e-02
	INV	1.4315e12	2.9665e12	2.9665e12	8.4342e26
	GS	9.8755e-17	2.5760e-06	1.8625e-03	5.7820e-02
	QR	7.1177e-16	2.3140e-03	5.5573e-02	2.9398e-01
	SVD	4.7431e-16	1.0072e-04	9.7611e-03	2.0939e-01
	TRM	2.3750e-10	2.3753e-10	1.4068e-07	1.4026e05
$AX = Y$ $A \neq A^T$ $N_3 = 21$ $\bar{\mu}(A) = 2.61e14$	MCC	6.2337e-16	1.0149e-03	2.0510e-03	3.8013e-02
	INV	1.1897e-03	4.1997e-04	1.6935e-03	1.1001e12
	GS	3.2278e-16	1.4779e-04	1.0323e-03	1.8468e-02
	QR	9.0515e-16	4.7017e-05	6.0242e-04	5.5378e-02
	SVD	6.2391e-16	1.0149e-03	2.0510e-03	3.8013e-02
	TRM	5.0053e-08	1.4243e-01	3.3744e-01	3.3742e03
$AX = Y$ $A = A^T$ $N_4 = 18$ $\bar{\mu}(A) = 1.60e14$	MCC	4.6953e-16	8.1606e-06	8.0616e-04	1.1632e-02
	INV	3.3759e-05	1.0941e-05	1.7547e-03	1.5293e10
	GS	6.8707e-16	4.1985e-06	5.0442e-04	2.0489e-02
	QR	1.5955e-15	2.9916e-05	5.6098e-04	5.0963e-02
	SVD	6.8639e-16	6.0107e-06	6.5452e-04	5.5103e-02
	TRM	6.2736e-11	4.0112e-03	2.1744e-02	5.9348e03

Анализ численных результатов, приведенных в табл. 2–16, показывает, что программы MCC, основанные на методе критических компонент [9–12] из нового пакета JINRLINPACK, по основным показателям не хуже, а в табл. 4 и 8 даже лучше известных аналогичных пакетов.

Программа SVD прекращает работу (незаполненные строки в таблицах) при патологически плохой обусловленности ($\mu(W) \geq 1/\varepsilon_1$), несмотря на то, что там могут быть разумные результаты, например, табл. 6, 8.

Программа TRM, основанная на методе регуляризации А. Н. Тихонова для небольших чисел обусловленности, в среднем дает точностные характеристики немного хуже, чем остальные методы, но в случае плохой обусловленности результаты, полученные этой программой, оказываются лучше (табл. 7–9, 12).

Таблица 15. Средние значения характеристик при $(\mu(W) \geq 1/\varepsilon_1)$, $\bar{N}_3 = 49$

	Program	δ_Y	δ_L	δ_X	δ_R
$C_2 X = Y$ $N_1 = 35$ $\bar{\mu}(C_2) = 4.18e16$	MCC	4.2229e-16	2.0241e01	2.0384e01	1.2011e01
	INV	4.6739e03	6.0546e03	6.0551e03	3.5296e20
	GS	4.2075e-16	2.0085e01	2.0220e01	1.2046e01
	QR	4.1694e-16	2.0241e01	2.0384e01	1.1925e01
	SVD	7.4156e-16	8.6993e-02	3.2188e-01	1.0855e01
	TRM				
$C_3 X = Y$ $N_2 = 4$ $\bar{\mu}(C_3) = 7.79e16$	MCC	0	0	0	0
	INV				
	GS	4.5270e-13	2.7796e04	2.7796e04	2.9000e04
	QR	6.3740e-16	6.0006	6.7123	3.5713e01
	SVD				
	TRM	8.7531e-16	6.2803e-16	7.2367e-14	6.5762e+01
$AX = Y$ $A \neq A^T$ $N_3 = 4$ $\bar{\mu}(A) = 1.45e17$	MCC	4.0077e-16	1.6416e-02	6.2648e-02	5.4767e01
	INV	6.8709e-02	2.3897e-02	1.4535e-01	1.0834e15
	GS	2.2204e-16	3.3519e-02	9.3824e-02	2.1194e01
	QR	4.9435e-16	3.1180e-02	1.0449e-01	2.5573e01
	SVD	5.0253e-10	4.7496e-02	7.7085e-02	2.6379e06
	TRM				
$AX = Y$ $A = A^T$ $N_4 = 6$ $\bar{\mu}(A) = 6.41e18$	MCC	2.6277e-16	3.5213	4.0536	9.4735e02
	INV	5.6823e-01	1.7492e01	1.8154e01	1.0548e17
	GS	9.2350e-17	5.2816	5.7438	9.3216e01
	QR	5.2177e-16	1.8694e01	1.9316e01	4.2647e03
	SVD	1.1792e-10	3.2023e-02	1.8701e-01	1.5652e08
	TRM				

Кроме того, в случае двух- и трехдиагональной матрицы программы MCC имеют также и лучшие временные характеристики для любых обусловленностей систем уравнений. Но для матриц общего вида программы MCC уступают по времени программам GS и QR. Это связано со значительными затратами времени на редукцию системы $WX = Y$ общего вида к системам с двух- и трехдиагональной матрицей.

2. О СПОСОБАХ ВЫБОРА ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛОХО ОБУСЛОВЛЕННЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений в пакете JINRLINPACK использованы как модифицированные методы [9–11], так и метод регуляризации [16–18]. При этом для выбора параметра регуляризации α обычно используются широко известные методы:

Таблица 16. Средние значения характеристик табл. 13–15, $N=286$

	Program	δ_Y	δ_L	δ_X	δ_R
$\bar{\mu}(W) = 2.88e06$ $\bar{N}_1 = 175$	MCC	6.745e-14	2.373e-12	1.060e-10	1.099e-09
	INV	6.908e-02	1.022e-01	1.440e-01	9.466
	GS	6.687e-14	1.731e-12	1.535e-11	6.486e-10
	QR	2.904e-13	6.309e-12	1.904e-09	3.087e-09
	SVD	2.656e-12	4.667e-12	3.811e-10	1.354e-09
	TRM	1.682e-10	2.699e-04	4.846e-04	4.878e-04
$\bar{\mu}(W) = 2.57e14$ $\bar{N}_2 = 62$	MCC	3.9657e-16	3.7797e-04	2.6523e-03	2.9464e-02
	INV	7.5339e+10	1.5613e11	1.5613e11	4.4391e25
	GS	3.5744e-16	6.9356e-05	7.6877e-04	2.5075e-02
	QR	8.9754e-16	3.4015e-04	7.5684e-03	7.6896e-02
	SVD	6.0950e-16	3.7458e-04	2.2147e-03	7.6782e-02
	TRM	1.7121e-08	7.5637e-02	1.6632e-01	2.0964e04
$\bar{\mu}(W) = 8.33e17$ $\bar{N}_3 = 49$	MCC	3.6661e-16	1.4890e01	1.5061e01	1.2905e02
	INV	3.3386e03	4.3277e03	4.3282e03	2.5213e20
	GS	1.9608e-14	1.1984e03	1.1986e03	1.2567e03
	QR	4.5027e-16	1.7473e01	1.7706e01	5.4615e02
	SVD	6.4707e-11	6.7094e-02	2.4865e-01	2.2612e07
	TRM				

- 1) $\gamma_\eta(\alpha) = \|z_\eta^\alpha\|^2$;
 - 2) $\beta_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - F_\delta\|^2$;
 - 3) $\rho_\eta(\alpha) = \|A_h z_\eta^\alpha - F_\delta\|^2 - (\delta + h \|z_\eta^\alpha\|)^2$ — обобщенная невязка;
- а) если $\|F_\delta\| \leq \delta$, то $z_\eta = 0$.
- б) если $\|F_\delta\| > \delta$, то
- если $\alpha^* > 0$ — корень уравнения $\rho_\eta(\alpha) = 0$, то $z_\eta = z_\eta^\alpha$;
 - если $\rho_\eta(\alpha) > 0$, то $z_\eta = \lim z_\eta^\alpha$.

В пакете JINRLINPACK для выбора оптимального значения параметра α используется следующая (не итерационного типа) формула:

$$\alpha_{opt} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\lambda_m}}{2} \cdot \frac{\delta_L}{1 - \delta_L}, & \text{если } \text{cond}(A) < 1/\sqrt{\varepsilon_1}, \\ \frac{\sqrt{\lambda_m}}{2} \cdot \frac{\delta_L}{1 - \delta_L} \sqrt{\delta_L(2 - \delta_L)}, & \text{если } \text{cond}(A) \geq 1/\sqrt{\varepsilon_1}, \end{cases} \quad (1)$$

где λ_m, λ_1 — минимальное и максимальное собственные значения $A^T A$

$$\delta_L \leq 3 \left[\frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{\lambda_m}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_m}} \cdot \left(\left(1 - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_m}\right) \cdot \frac{\|f\|}{\|y\|} + 1 \right) \right]^{2/3}; \quad (2)$$

$$\lambda_m \leq \min_{i=1,n} | \Lambda_{i+1} - r_{i+1} G_i^{-1} p_{i+1} |;$$

Таблица 17 Результаты численного решения плохо обусловленных СЛАУ при различных способах выбора параметра α . Для системы $AX = Y$, где

$$A : \{ a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, m \} \text{ — матрица Гильберта;}$$

$$Y : \{ y_i = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k(i+k-1)}, i = 1, \dots, m \}; \quad X : \{ x_i = 1/i, i = 1, \dots, m \}$$

N	Program	α	δ_Y	δ_L	δ_X
5 cond=4.766E05	MCC		8.83e-17	0	9.54e-12
	TRM(α_1)	2,06E-18	1,12E-13	5,51E-16	5,32E-08
	TRM(α_2)	3,75E-176	1,17E-13	7,34E-16	5,54E-08
	TRM(α_3)	2,94E-11	1,05E-09	7,17E-08	3,79E-04
	MCC(α_{opt})	7.31E-020	1.17E-13	9.17E-16	5.53E-08
8 cond=1.526E+10	MCC		1.36e-16	2.46e-14	2.21e-07
	TRM(α_1)	2,67E-19	8,16E-13	1,44E-05	5,36E-03
	TRM(α_2)	1,69E-11	7,17E-10	2,43E-08	2,21E-04
	TRM(α_3)	2,07E-15	5,91E-13	4,84E-10	3,11E-05
	MCC(α_{opt})	1.14E-15	4.94E-13	8.83E-10	4.20E-05
9 cond=4.931E11	MCC		3.59e-16	8.19e-12	4.05e-06
	TRM(α_1)	8,85E-20	2,12E-11	1,65E-03	5,74E-02
	TRM(α_2)	5,51E-13	6,47E-11	1,23E-09	4,98E-05
	TRM(α_3)	8,60E-15	1,05E-12	1,84E-10	1,91E-05
	MCC(α_{opt})	1.17E-15	2.85E-12	3.97E-09	8.92E-05
10 cond=1.604E13	MCC		1.89e-16	3.37e-09	8.21e-05
	TRM(α_1)	1,27E-19	6,75E-12	1,38E-04	1,66E-02
	TRM(α_2)	1,14E-12	1,10E-10	1,96E-09	6,29E-05
	TRM(α_3)	5,99E-18	2,17E-12	1,36E-06	1,65E-03
	MCC(α_{opt})	1.20E-15	8.46E-13	2.25E-10	2.12E-05
11 cond=5.311E14	MCC		1.47e-16	1.01e-04	1.42e-02
	TRM(α_1)	1,89E-19	7,54E-13	5,41E-06	3,29E-03
	TRM(α_2)	2,36E-12	1,92E-10	3,38E-09	8,25E-05
	TRM(α_3)	2,48E-17	1,38E-12	9,12E-08	4,27E-04
	MCC(α_{opt})	1.25E-15	8.44E-13	6.01E-10	3.47E-05
12 cond=1.374E16	MCC		1.14e-16	4.35e-02	0.2983
	TRM(α_1)	2,38E-19	1,54E-12	3,39E-05	8,23E-03
	TRM(α_2)	2,44E-12	1,78E-10	5,16E-09	1,02E-04
	TRM(α_3)	1,02E-16	7,42E-13	6,14E-09	1,11E-04
	MCC(α_{opt})	4.47E-16	1.32E-12	9.95E-09	1.41E-04
13 cond=1.590E17	MCC		2.69e-16	1.52e01	1.62e01
	TRM(α_1)	1,26E-19	1,70E-12	4,30E-05	9,27E-03
	TRM(α_2)	2,51E-12	1,69E-10	7,61E-09	1,24E-04
	TRM(α_3)	2,45E-15	7,36E-13	2,88E-10	2,40E-05
	MCC(α_{opt})	4.23E-16	1.76E-12	9.46E-09	1.38E-04

$$\frac{\|f\|}{\|y\|} \geq (\|A\| = \lambda_{\max}) \leq \max_{i=1,n} \{ |p_i| + |q_i| + |r_{i+1}| \}, \text{ где } \{ \Lambda_i \}, \{ G_i \}, \{ p_i, q_i, r_i \} \text{ из [11].}$$

Формулы (1), (2) получены на основе принципа неопределенности [19]. В табл. 17 приведены результаты решения плохо обусловленных систем уравнений методом регуляризации при различных способах выбора параметра, а также модифицированного (регуляризованного) метода критических компонент — $MCC_{(opt)}$.

В заключение отметим следующее. Показана возможность применения системы RUSEEP для анализа пакетов практически из любой научной области, в частности, определены основные проблемы, следующие из принципов, и связанные с ними задачи для проблемы решения систем линейных алгебраических уравнений. Проводится анализ результатов сравнения нового пакета JINRLINPACK с наиболее известными аналогичными. Приводится новый эффективный метод выбора параметра регуляризации на основе принципа минимума неопределенности и сравниваются результаты численных расчетов при различных способах выбора параметра регуляризации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Емельяненко Г.А. и др. Элементы системы RUSEEP и новый научно-прикладной пакет JINREISPACK. Сборник научных трудов кафедры системного анализа и управления. Выпуск 4 (в печати).
2. Емельяненко Г.А. и др. Принципы RUSEEP и пакет JINREISPACK. Сообщение ОИЯИ Р11-2005-172. Дубна, 2005.
3. Райс Дж. Матричные вычисления и математическое обеспечение: Пер. с англ. М.: Мир, 1984.
4. Numerical methods for constrained optimization. Edited by P.E. Gill and W. Murray. National Physical Laboratory Teddington, Middlesex. (Пер. с англ. В.Ю. Лебедева под ред. А.А. Петрова. М.: Мир, 1977.
5. Артемов В.М., Волков А.Д. Определение параметров формфакторов $\lambda+$ и $\lambda0$ в КЗ-распаде. Препринт ОИЯИ Р1-95-330. Дубна, 1995.
6. Винницкий С.И., Пузынин И.В., Чулуунбаатар О. Ньютоновская итерационная схема с вариационным функционалом Швингера для решения задачи рассеяния. ОИЯИ 11-2001-61. Дубна, 2001.
7. Уилкинсон Дж., Райни К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М.: Машиностроение, 1976.

8. *Емельяненко Г. А.* Блочно-трехдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач. Автореферат докторской диссертации. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск 1992; ОИЯИ 11-92-4. Дубна, 1992.
9. *Emel'yanenko G. A., Emelianenko M. G., Rakhmonov T. T., Dushanov E. B., Konovalova G. Yu.* On efficiency of critical-component method for solving degenerated and ill-posed systems of linear algebraic equations. JINR preprint E11-98-302. Dubna, 1998.
10. *Емельяненко Г. А., Душанов Э. Б., Рахмонов Т. Т., Сапожников А. П.* Машинно-независимый пакет программ JINRLINPACK для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений. Дубна, 2000.
11. *Емельяненко Г. А., Душанов Э. Б., Емельяненко М. Г., Рахмонов Т. Т., Сапожников А. П.* Сообщение ОИЯИ, P11-2000-287. Дубна, 2000.
12. *Фаддеева В. Н., Колотилина Л. Ю.* Вычислительные методы линейной алгебры, набор матриц для тестирования. Л. АН СССР, 1982.
13. CERNLIB – CERN Program Library: <http://cernlib.web.cern.ch/cernlib/>
14. LAPACK – Linear Algebra Package: www.netlib.org
15. *Малышев А. Н.* Введение в вычислительную линейную алгебру (с приложением алгоритмов на ФОРТРАНе). Новосибирск: Наука, 1991.
16. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
17. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987.
18. *Ильин В. П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000.
19. *Emel'yanenko G. A., Samoilov V. N., Emelianenko M. G.* The uncertainty principle in numerical linear algebra. Proceedings of the International Conference on Computational Mathematics. Part I. Novosibirsk, 2002.

Получено 3 ноября 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 26.12.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,56. Уч.-изд. л. 1,88. Тираж 310 экз. Заказ № 55159.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/