

P11-2005-215

Е. Г. Семерджиева¹, Т. Л. Бояджиев², Ю. М. Шукринов³

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКИХ
ЗАВИСИМОСТЕЙ В ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ
КОНТАКТАХ ПЕРЕМЕННОЙ ШИРИНЫ

¹ E-mail: elis@jinr.ru

² E-mail: todorlb@jinr.ru

³ E-mail: shukrinv@thsun1.jinr.ru

Семерджи́ева Е. Г., Бояджи́ев Т. Л., Шукри́нов Ю. М.
Численное моделирование критических зависимостей в джозефсоновских контактах переменной ширины

P11-2005-215

Рассматриваются методы и результаты решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих при численном построении критических зависимостей вида «критический ток – внешнее магнитное поле» в длинных джозефсоновских контактах с изменяющейся по экспоненциальному закону шириной. Переходы контакта из сверхпроводящего в резистивное состояние математически интерпретируются как бифуркации статических распределений магнитного потока при изменении параметров модели, в частности, приложенного магнитного поля и внешнего тока.

Каждому статическому решению соответствующей нелинейной краевой задачи ставится в соответствие регулярная задача Штурма–Лиувилля, минимальное собственное значение которой позволяет судить об устойчивости или неустойчивости решения в линейном приближении. При таком подходе критический ток для некоторого фиксированного распределения есть то значение внешнего тока, при котором соответствующее минимальное собственное значение обращается в нуль при заданном внешнем магнитном поле. Так как для заданного поля соответствующая нелинейная краевая задача модели может иметь более чем одно статическое решение, то критический ток контакта — это наибольший из критических токов возможных устойчивых распределений. Тем самым критические кривые контакта строятся как огибающие бифуркационных кривых отдельных распределений.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Semerdjieva E. G., Boyadjiev T. L., Shukrinov Yu. M.
Numerical Modelling of Critical Dependences in Exponentially Shaped Josephson Junctions

P11-2005-215

The solution procedures of some nonlinear eigenvalue problems arising at numerical construction of critical dependences in long exponentially shaped Josephson junctions are considered. For this purpose the transitions from superconducting to resistive regime of the junction mathematically are interpreted as bifurcations of static distributions of the magnetic flux under changes of the model's parameters.

Every static solution of the corresponding nonlinear boundary value problem generates the regular Sturm–Liouville problem, whose minimal eigenvalue allows one to judge stability or instability of the solution. At this approach the critical current for some fixed distribution is the value of the external current at which the minimal eigenvalue is zero for a given external magnetic field. As the nonlinear boundary value problem can have more than one static solution, the critical current of the junction is the greatest of critical currents of possible stable steady states. Thus the critical curve of the junction is constructed as an envelope of bifurcation curves corresponding to separate states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются методы и результаты решения нелинейных задач на собственные значения, возникающих при численном построении критических зависимостей вида «критический ток – внешнее магнитное поле» в длинных джозефсоновских контактах (в дальнейшем используем сокращение ДК) с изменяющейся по экспоненциальному закону шириной [1–6]. Основная идея заключается в математической интерпретации перехода контакта из сверхпроводящего в резистивное состояние как бифуркации статических распределений магнитного потока при изменении параметров модели, в частности, приложенного магнитного поля и внешнего тока. В рамках традиционной модели «одномерного» длинного ДК такой подход был впервые применен в классической работе [7] и развивался в [8].

Уравнение типа синус-Гордон для пространственно-временной эволюции магнитного потока в ДК с экспоненциально изменяющейся шириной выведено в работе [1] (общий случай переменной ширины рассмотрен в [3]). Каждому статическому решению соответствующей нелинейной краевой задачи для этого уравнения ставится в соответствие регулярная задача Штурма–Лиувилля (ЗШЛ), минимальное собственное значение (СЗ) которой позволяет судить об устойчивости или неустойчивости решения в линейном приближении. При таком подходе критический ток для некоторого фиксированного распределения есть то значение внешнего тока, при котором соответствующее минимальное СЗ обращается в нуль при заданном внешнем магнитном поле. Так как для заданного поля соответствующая нелинейная краевая задача модели может иметь более чем одно статическое решение, то критический ток ДК — это наибольший из критических токов возможных устойчивых распределений. Тем самым критические кривые (КК) контакта строятся как огибающие бифуркационных кривых (БК) отдельных распределений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим длинный джозефсоновский контакт, размер которого вдоль оси y (ширина) есть гладкая на отрезке $x \in [0, l]$ функция $W(x) = W_0 \exp\{-\sigma x\}$, где $W_0 > 0$ — ширина контакта в начале координат (см. рис. 1), а σ — параметр формы, $0 \leq \sigma \ll 1$. Здесь пространственная координата $x \in [0, l]$ нормирована на джозефсоновскую глубину проникновения λ_J , а $l > 1$ — безразмерная длина контакта.

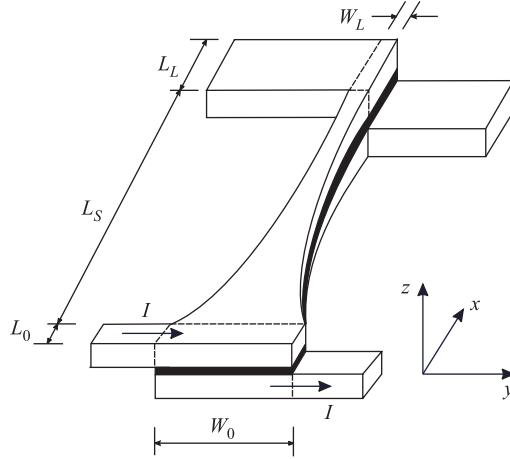


Рис. 1. Схема ДК переменной ширины

Основной величиной, описывающей пространственно-временные процессы в контакте, является разность фаз волновых функций $\phi(t, x)$ двух сверхпроводников (см., например, монографию [10]). Время t отнесено к плазменной частоте. При помощи подходящей нормировки функцию $\phi(t, x)$ можно интерпретировать как безразмерный магнитный поток внутри ДК. Тогда производная $\phi_x(t, x)$ представляет собой распределение напряженности магнитного поля вдоль контакта в момент времени t , а $\phi_t(t, x)$ есть электрическое поле (разность потенциалов), направленное вдоль оси z . Здесь и далее нижним индексом обозначено дифференцирование по соответствующей независимой переменной.

Вывод уравнения и краевых условий для функции $\phi(t, x)$ рассматривался, например, в работах [1–3]. В достаточно общем случае такая задача может быть записана в следующем виде:

$$\phi_{tt} + \alpha\phi_t - \phi_{xx} + \sigma\phi_x + \sin\phi - g(x) = 0, \quad (1.1a)$$

$$x \in (0, l), \quad t > 0,$$

$$\phi_x(0) = H_l, \quad \phi_x(l) = H_r. \quad (1.1b)$$

Конкретные выражения для тока $g(x)$ и граничных полей H_l и H_r определяются геометрией контакта, иначе говоря, способом отбора внешнего тока. В случае «геометрии с перекрытием» (overlap geometry) ток $g(x) = \gamma(x) + \sigma h_e$, а постоянные в правых частях (1.1b) имеют вид $H_l = h_e$, $H_r = h_e$. Здесь h_e — внешнее магнитное поле вдоль оси y (см. рис. 1). Внешний ток $\gamma(x)$ в такой модели непрерывно распределен вдоль оси x контакта. Если пренебречь поверхностными эффектами, то в первом приближении $\gamma(x)$ может

рассматриваться как постоянный параметр $|\gamma| \leq 1$ (ток нормирован на критический ток мейсснеровского решения в поле $h_e = 0$). Величина h_e есть безразмерная напряженность внешнего магнитного поля, которое направлено вдоль оси y . Тогда слагаемое $\sigma(\phi_x - h_e)$ в уравнении (1.1) есть ток, обусловленный переменной шириной контакта.

В модели ДК с inline-геометрией отбор тока происходит с небольших областей в окрестности концов $x = 0$ и $x = l$ контакта. Простейшая точечная модель в этом случае приводит к следующим выражениям для постоянных H_l и H_r в правых частях (1.16): $H_l = h_e - \varkappa_r l \gamma$, $H_r = h_e + \varkappa_r l \gamma$. В общем случае коэффициенты \varkappa_r и \varkappa_l удовлетворяют условию $\varkappa_l + \varkappa_r \leq 1$. Выбор $\varkappa_l = \varkappa_r = 1/2$ отвечает модели с симметричным отбором тока с обоих торцов контакта. При $\varkappa_l = 0$, $\varkappa_r = 1$ ($\varkappa_l = 1$, $\varkappa_r = 0$) ток течет только через правый (левый) край контакта (см. [2, 4]). Случай $\varkappa_l = 0$, $\varkappa_r = 0$ соответствует краевым условиям для контакта с overlap-геометрией.

Слагаемое α характеризует диссипативные эффекты в контакте, так что слагаемое $\alpha \phi_t$ выполняет роль силы «трения», обусловленной переносом нормальных электронов. С хорошим приближением можно положить $\alpha = \text{const}$.

Настоящая работа посвящена численному исследованию устойчивости и бифуркаций статических решений $\varphi(x)$ задачи (1.1) при изменении параметров модели. Тем самым при дальнейших рассмотрениях вид начальных условий для функций $\phi(0, x)$ и $\phi_t(0, x)$ в момент $t = 0$ несуществен, ввиду чего они не выписываются.

С физической точки зрения необходимость изучения статических решений непосредственно вытекает из экспериментов по измерению зависимостей вида «критический ток – магнитное поле». На рис. 2 представлена условная схема эксперимента по замеру КК. Контакт расположен так, что внешнее

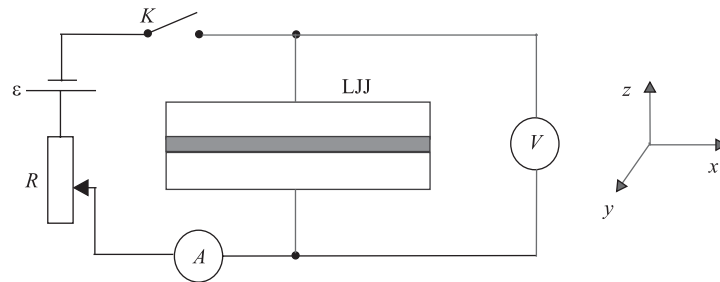


Рис. 2. Схема эксперимента по определению критического тока

магнитное поле h_e приложено в направлении оси y . Посредством реостата R можно изменять ток γ через переход. Величина тока регистрируется амперметром A . Опыт показывает наличие двух режимов работы ДК. В джозефсоновском (сверхпроводящем) режиме выводы вольтметра «закорочены»

контактом, так что измеряемое вольтметром V падение напряжения на контакте равно нулю. При этом ток через контакт обусловлен куперовскими парами электронов [10]. С увеличением тока сверхпроводящее состояние сохраняется до тех пор, пока ток γ меньше некоторого критического значения $\gamma_{\text{кр}}$, которое называется критическим током [10]. При достижении критического тока контакт «скачком» переходит в резистивный режим, в результате чего напряжение, регистрируемое вольтметром, становится отличным от нуля.

Пусть $\phi(t, x)$ — решение задачи (1.1). В соответствии с соотношением Джозефсона $v(t, x) = \phi_t(t, x)$ определим среднее по длине контакта мгновенное напряжение, связанное с решением $\phi(t, x)$, как функционал

$$\bar{v}(t) = \frac{1}{l} \int_0^l \phi_t(t, x) dx. \quad (1.2)$$

Падение напряжения на контакте, наблюдаемое в эксперименте, есть

$$\langle \bar{v} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \bar{v}(t) dt,$$

где $\bar{v}(t)$ вычисляется для решения (1.1) с наибольшим критическим током. Но в джозефсоновском режиме функционал $\langle \bar{v}(t) \rangle$ равен нулю. Следовательно, производная любого решения $\phi_t(t, x) = 0$. С математической точки зрения это означает, что возможные распределения магнитного потока в контакте в джозефсоновском режиме работы являются устойчивыми решениями нелинейной статической краевой задачи

$$-\varphi_{xx} + \sigma \varphi_x + \sin \varphi - g(x) = 0, \quad (1.3a)$$

$$\varphi_x(0) = H_l, \quad \varphi_x(l) = H_r, \quad (1.3b)$$

которая вытекает непосредственно из (1.1).

2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Численный эксперимент показывает, что для заданной совокупности параметров модели $p \equiv \{l, \sigma, h_e, \gamma\}$ нелинейная краевая задача (1.3) имеет, как правило, более чем одно решение $\varphi(x, p)$ (в дальнейшем зависимость от p выписываем только при необходимости). В физическом эксперименте реализуется с некоторой вероятностью одно из соответствующих устойчивых распределений магнитного потока. Однако свойства решений и, в частности, их устойчивость могут меняться при варьировании параметров p . Поэтому

для того чтобы определить конечное состояние контакта, необходимо исследовать статические решения на устойчивость.

Для этой цели рассмотрим пространственно-временное возмущение вида

$$\phi(t, x) = \varphi(x) + \varepsilon e^{-\alpha t/2} \sum_n [a_n e^{-i\omega_n t} \psi_n(x) + a_n^* e^{i\omega_n t} \psi_n^*(x)] \quad (2.1)$$

статического решения $\varphi(x)$ [7, 9]. Здесь a_n — комплекснозначные амплитуды, через a_n^* обозначены соответствующие комплексно-сопряженные величины. Подставляя разложение (2.1) в уравнение (1.1а) и условия (1.1б), в первом приближении по параметру ε приходим к задаче Штурма–Лиувилля

$$-\psi_{xx} + \sigma \varphi_x + q(x)\psi = \lambda\psi, \quad (2.2a)$$

$$\psi_x(0) = 0, \quad \psi_x(l) = 0, \quad (2.2б)$$

которая замыкается добавлением условия нормировки

$$\int_0^l \psi^2(x) dx - 1 = 0. \quad (2.3)$$

Величина λ есть спектральный параметр. Потенциал ЗШТЛ определяется известным статическим решением $\varphi(x)$ по формуле $q(x) = \cos \varphi(x)$. При этом собственные значения λ_n и частоты ω_n связаны соотношениями $\lambda_n^2 = \omega_n^2 + \alpha^2/4$.

Напомним некоторые хорошо известные свойства задачи (2.2), (2.3) (подробности см. в классической книге [12]). Так как потенциал $q(x)$ ограничен, причем $|q(x)| \leq 1$, то на конечном интервале изменения переменной x существует [12] ограниченная снизу счетная последовательность вещественных собственных значений (СЗ)

$$-1 \leq \lambda_{\min} \equiv \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$

задачи (2.2). Каждому СЗ λ_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, соответствует единственная вещественная собственная функция (СФ) $\psi_n(x)$, удовлетворяющая условию нормировки (2.3). При этом число нулей СФ $\psi_n(x)$ на интервале $(0, l)$ равно номеру n СЗ. В частности, СФ $\psi_0(x)$, соответствующая минимальному СЗ λ_0 , не имеет нулей на $(0, l)$.

Отметим, что ввиду зависимости решения $\varphi(x, p)$ от множества параметров p модели потенциал ЗШТЛ и, следовательно, соответствующие СЗ и СФ ЗШТЛ также зависят от этих параметров, т. е. $\lambda_n = \lambda_n(p)$ и $\psi_n = \psi_n(x, p)$.

Будем говорить [7], что в некоторой области $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$ изменения параметров статическое решение $\varphi(x)$ является устойчивым в линейном приближении, если в этой области минимальное СЗ $\lambda_0(p) > 0$. Такое определение

устойчивости означает (см. например, [7, 16]), что все экспоненты под знаком суммы в правой части (2.1) осциллирующие. Если $\lambda_0(p) < 0$, то в разложении (2.1) появляется быстрорастущая во времени компонента и решение $\varphi_s(x)$ неустойчиво.

Точки $p \in \mathcal{P}$, удовлетворяющие условию

$$\lambda_0(p) = 0, \quad (2.4)$$

являются точками бифуркации (ветвления) решения $\varphi(x, p)$. Значения параметров p_{cr} , для которых имеет место равенство (2.4), называются бифуркационными или критическими для этого решения. Для единообразия решение $\varphi(x, p_{cr})$ будем соответственно называть бифуркационным (критическим).

Фиксация значений двух параметров в (2.4) определяет БК для остальных двух параметров на соответствующей плоскости. Наиболее важными с точки зрения возможности экспериментальной проверки представляются БК вида «ток – внешнее магнитное поле»

$$\lambda_0(\gamma_{cr}, h_e) = 0, \quad (2.5)$$

отвечающие заданным геометрическим параметрам l и σ контакта.

В теоретическом аспекте знание бифуркационных зависимостей позволяет найти число равновесных решений, понять их структуру и описать физику явления. Численное моделирование упрощает исследование и дает возможность оценить области изменения параметров, в которых можно ожидать устойчивость или неустойчивость распределений магнитного потока в ДК.

Для практических целей особо важна возможность экспериментальной проверки бифуркационных зависимостей параметров ДК, что, со своей стороны, является важным источником информации для уточнения физической модели. В качестве конкретного примера укажем на методы изучения вихревых солитоноподобных структур магнитного потока в ДК, основанных на измерении зависимости критического тока от внешнего магнитного поля (см., например, работы [2, 18–21]).

Отметим, что строгому математическому обоснованию сведения задачи устойчивости решений нелинейных операторных уравнений к исследованию задачи на собственные значения для линейного оператора посвящен ряд работ (см., например, обзор [15], а также сборник [16] и цитированную там литературу).

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК

Для ясности при дальнейшем изложении необходимо кратко остановиться на некоторых основных типах статических решений в ДК.

При нулевом внешнем поле h_e и нулевом токе γ краевая задача (1.3) имеет набор мейсснеровских (тривиальных, вакуумных) решений вида $\varphi(x) = k\pi$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В частности, решение $\varphi(x) = 0$ устойчивое (потенциал ЗШТЛ $q(x) = 1$), а $\varphi(x) = \pi$ — неустойчивое с $q(x) = -1$. Далее устойчивые мейсснеровские решения обозначаем коротко через M .

Наиболее интересный как с теоретической, так и с практической точки зрения класс решений (1.3) физически соответствует вихревым распределениям магнитного потока в контакте. Простейшим среди вихревых является (одно) флюксонное/антифлюксонное решение (ниже используются сокращенные обозначения $\Phi \equiv \Phi^1$ и Φ^{-1}). В «бесконечном» контакте (на всей оси x) при $h_e = 0$ и $\gamma = 0$ флюксонные/антифлюксонные решения ($\Phi_{\infty}^{\pm 1}$) уравнения (1.3а) описываются известными аналитическими выражениями

$$\varphi(x) = 4 \arctan \exp(\pm x) + 2k\pi. \quad (3.1)$$

Устойчивость однофлюксонных решений вида (3.1) изучалась в работах [9, 7], где показано, что соответствующее СЗ $\lambda_0 = 0$, т.е. распределения (3.1) являются квазиустойчивыми.

Разумеется, в контактах конечной длины объекты, аналогичные (3.1), не являются флюксонами в строгом смысле слова, но ряд их особенностей, в частности конечные энергия и размеры (см. ниже), обуславливают целесообразность использования такой терминологии.

При $h_e \neq 0$ в ДК конечной длины l существуют устойчивые многофлюксонные распределения магнитного потока. Конкретные примеры многофлюксонных устойчивых вихрей вида Φ^n , $n = 1, 2, 3, 4$, при токе $\gamma = 0$ даны на рис. 3 и 4. Такие вихревые цепочки могут быть либо «чистыми», т.е. состо-

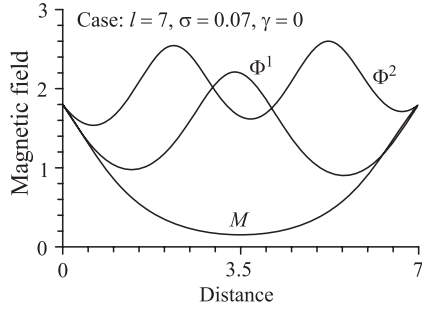


Рис. 3. Распределения $\varphi_x(x)$ при $h_e = 1,8$

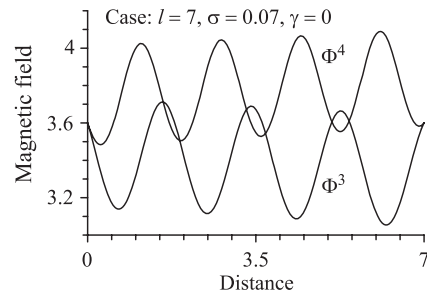


Рис. 4. Распределения $\varphi_x(x)$ при $h_e = 3,6$

ять из вихрей одинаковой структуры (флюксонных или антифлюксонных), либо являться «смешанными» — в цепочке флюксонны и антифлюксонны чередуются

некоторым определенным образом. Ниже для чистых вихревых структур используется обозначение вида Φ^n , где целое n есть значение при $\gamma = 0$ и $\sigma = 0$ функционала [8]

$$N[\varphi] = \frac{1}{\pi l} \int_0^l \varphi(x, p) dx, \quad (3.2)$$

определенного на множестве решений $\varphi(x)$ задачи (1.3) для любого допустимого h_e . Обозначения для смешанных вихрей определяются чередованием флюксонов и антифлюксонов в цепочке, например, $\Phi^1\Phi^{-1}$ есть пара флюксон–антифлюксон.

Ясно, что величина $N[\varphi]$ представляет собой усредненный по длине контакта безразмерный магнитный поток (множитель $1/\pi$ используется для удобства). Легко проверить, что в размерных переменных средний по длине контакта магнитный поток пропорционален целому числу квантов магнитного потока. Это позволяет интерпретировать функционал (3.2) как число флюксонов (вихрей), соответствующих разным распределениям $\varphi(x)$. В ДК экспоненциально изменяющейся формы из-за наличия геометрического тока функционал $N[\varphi]$ при $\gamma = 0$ принимает целочисленные значения только в некоторых изолированных точках на оси h_e (см. ниже). В качестве примера в таблице приведены значения величин N и $\Delta\varphi$ для решений, представленных на рис. 3 и 4.

	N	$\Delta\varphi$
M	0,04	0,71
Φ^1	1,05	1,56
Φ^2	1,89	2,24
Φ^3	3,1	3,75
Φ^4	3,88	4,21

Так как любое решение $\varphi(x)$ задачи (1.3) определено с точностью до $2k\pi$, то и значение $N[\varphi]$ определено с точностью до $2k$. Произвол в выборе целого k можно использовать для согласования числа n с величиной и знаком (направлением магнитного поля) полного магнитного потока распределения

$$\Delta\varphi = \int_0^l \varphi_x dx = \varphi(l) - \varphi(0). \quad (3.3)$$

В частности, выбирая для флюксонного решения Φ_∞^1 вида (3.1) $k = 0$, а для антифлюксонного Φ_∞^{-1} соответственно $k = -1$, легко проверить, что $N[\Phi_\infty^{\pm 1}] = \pm 1$.

На решениях $\phi(t, x)$ нестационарной задачи (1.1) функционал (3.2) зависит не только от параметров p , но и от времени t . При этом функция $N(t)$

и среднее мгновенное напряжение $\bar{v}(t)$ в момент времени t удовлетворяют в соответствии с (1.2) очевидному равенству $\bar{v}(t) = \pi N_t[\phi](t)$. Предположим теперь, что $\phi(0, x) = \varphi(x)$ — устойчивое статическое распределение с наибольшим критическим током в заданном поле h_e . Тогда при $\gamma \geq \gamma_{cr}$ среднее напряжение на контакте $\langle \bar{v}(t) \rangle$ за некоторый интервал времени T есть

$$\langle \bar{v}(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{v}(t) dt = \frac{\pi}{T} [N(T) - N(0)].$$

Последнее соотношение имеет наглядную физическую интерпретацию — среднее напряжение на контакте за интервал времени T определяется изменением среднего магнитного потока, проходящего через контакт за этот период.

3.1. Вычисление точек бифуркации по полю h_e . Наличие точек бифуркации магнитного потока в ДК при изменении внешнего магнитного поля h_e хорошо заметно на графике зависимости минимального СЗ от внешнего поля $\lambda_0(h_e)$, представленном при $l = 7$, $\sigma = 0.07$ и $\gamma = 0$ на рис. 5. Кривые,

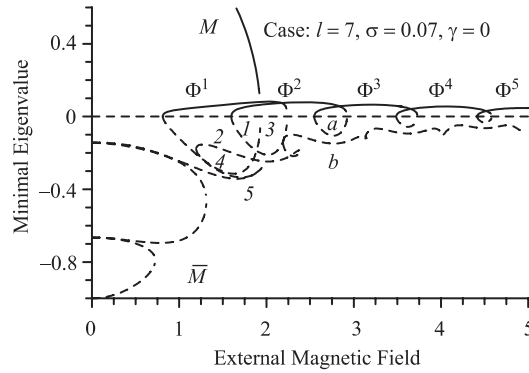


Рис. 5. Зависимость λ_0 от поля h_e

лежащие в верхней полуплоскости $\lambda_0 > 0$, соответствуют устойчивым распределениям мейсснеровского M и вихревым распределениям Φ^n . Кривые в нижней полуплоскости $\lambda_0 < 0$ (отмеченные пунктиром) отвечают высокоэнергетическим неустойчивым распределениям, для которых в разложении (2.1) имеется хотя бы одна быстрорастущая гармоника. Среди неустойчивых отметим неустойчивое мейсснеровское распределение \bar{M} , кривая $\lambda_0(h_e)$ которого расположена ниже БК всех остальных распределений. Отметим, что в отличие от ДК с резистивной неоднородностью в окрестности центра $x = l/2$ [8] все смешанные распределения в ДК с экспоненциально изменяющейся шириной, например, такие как $\Phi^n \Phi^m$, $|n|, |m| \geq 1$, $nm < 0$, неустойчивы.

Точки пересечения абсциссы $\lambda_0 = 0$ являются в соответствии с (2.5) точками бифуркации решений задачи (1.3). Такие бифуркации естественно

называть бифуркациями первого порядка — в разложении (2.1) имеется единственная быстрорастущая мода. Численный эксперимент показывает, что при такой небольшой длине кривая $\lambda_0(h_e)$, отвечающая некоторому решению $\varphi(x)$ задачи (1.3) при фиксированном токе γ , имеет ровно два нуля. Соответствующие значения h_e называются нижним и верхним граничными полями распределения, а отрезок между ними — интервалом устойчивости (существования) распределения по h_e .

На рис. 6 показаны зависимости следующего (с номером 1) СЗ задачи (2.2) от магнитного поля h_e при фиксированном токе γ . Нулям кривых

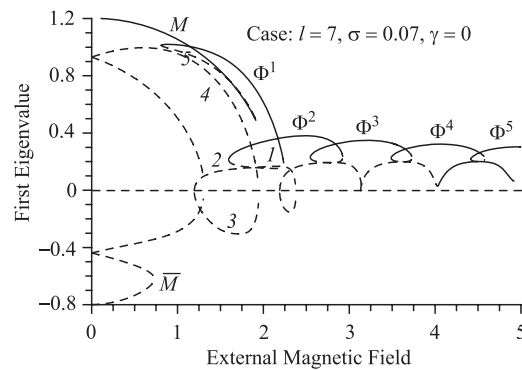


Рис. 6. Зависимость λ_1 от поля h_e

соответствуют две растущие во времени моды в разложении (2.1), т.е. они являются точками бифуркации «второго порядка», при которых происходит переход некоторого неустойчивого решения (1.3) в другое неустойчивое решение той же задачи. Из-за малого «времени жизни» [7] такие распределения достаточно трудно наблюдать в физическом эксперименте.

На рис. 7 демонстрируется кривая зависимости минимального СЗ ЗШТЛ от внешнего тока γ для основного флюксона в случаях прямоугольного ДК ($\sigma = 0$) и контакта переменной ширины ($\sigma = 0,07$). Как и в случае зависимости $\lambda_0(h_e)$, кривые $\lambda_0(\gamma)$ пересекают абсциссу $\lambda_0 = 0$ в двух точках бифуркации, определяющих область существования флюксона Φ^1 по току.

Отметим, что при $\sigma > 0$ хорошо заметно смещение кривой $\lambda_0(\gamma)$ направо в результате действия «геометрического» тока $\sigma(\varphi_x - h_e)$. При подходящих значениях параметров задачи и, в частности, поля h_e такое смещение приводит к весьма необычному эффекту — для устойчивости Φ^1 необходим внешний ток (ток рождения устойчивого флюксона Φ^1), который необходим для уравновешивания деструктивного действия геометрического тока.

Полная картина зависимостей вида $\lambda_0(\gamma)$ для $l = 7$, $\sigma = 0,07$ и $h_e = 0,8$ для ДК с перекрытием демонстрируется на рис. 8. Отметим, что зависимости

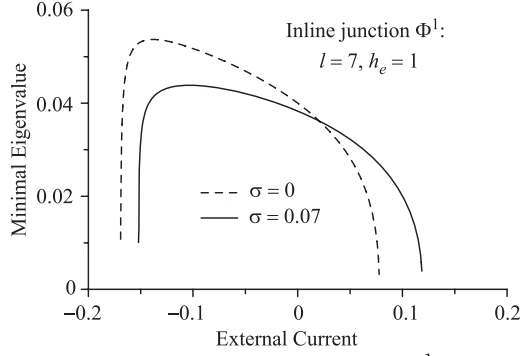


Рис. 7. Зависимость $\lambda_0(\gamma)$ для основного флюксона Φ^1 при $\sigma = 0$ и $\sigma = 0,07$

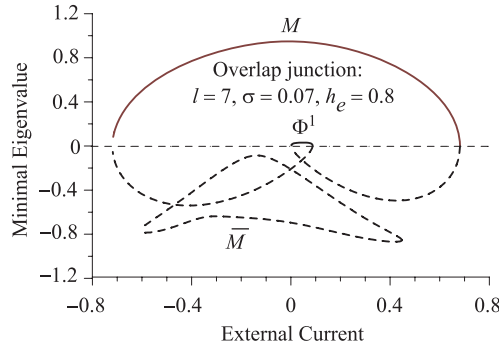


Рис. 8. Зависимость $\lambda_0(\gamma)$ при $h_e = 0,8$ и $\sigma = 0,07$

$\lambda_0(\gamma)$ объединяются в две замкнутые кривые, содержащие соответственно устойчивое (M) и неустойчивое (\bar{M}) распределения.

Алгоритмически простейший способ приближенного вычисления граничных полей (токов) для разных решений (1.3) может быть основан на варьировании величины h_e (соответственно γ). Пусть, для определенности, решению $\varphi(x, h_0)$ краевой задачи (1.3) при некотором h_0 соответствует минимальное СЗ $\lambda_0(h_0) > 0$ задачи (2.2). Построим последовательность $\{h_m, m = 1, \dots, h_m = h_{m-1} + \Delta h_m\}$, выбирая шаги по полю Δh_m таким образом, чтобы $\lambda_{\min}(h_{m-1}) > \lambda_{\min}(h_m) \geq 0$. Для каждого нового значения параметра h_m решаются последовательно краевая задача (1.3) и порожденная ЗШТЛ (2.2). При этом известное для некоторого h_{m-1} решение следует использовать в качестве начального приближения при решении задачи со следующим значением h_m . Перебор значений h_e прекращается, если для некоторых m и $0 < \varepsilon \ll 1$ выполнено условие $|\lambda_{\min}(h_m)| < \varepsilon$.

Указанный подход имеет существенные недостатки. С одной стороны, он связан с большим количеством вычислений, что может в ряде случаев

оказаться затруднительным, например, с точки зрения времени проведения численного эксперимента. Кроме того, в окрестности точки бифуркации такой алгоритм перебора очевидно неэффективен. Ситуацию частично можно исправить, применяя алгоритмы продолжения по параметру, аналогичные изложенным, например, в работах.

Для вычисления точек бифуркации решений краевой задачи (1.3) в настоящей работе применяется алгоритм [8], базирующийся на обобщенном непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН) [23]. Будем рассматривать задачи (1.3), (2.2) и (2.4) как единую нелинейную систему для двух функций $\varphi(x, p)$, $\psi(x, p)$ и одного из параметров, например h_e . При этом минимальное собственное значение линейной задачи (2.2) считается фиксированным (в частности, равным нулю). Тем самым задача вычисления граничных магнитных полей (токов и т. д.) сводится к нелинейной спектральной задаче, в которой граничные поля (токи и т. д.) являются собственными значениями.

Далее в настоящем параграфе ограничимся рассмотрением случая ДК с перекрытием. Удобно переписать систему (1.3), (2.2) и (2.3) единообразно в виде нелинейного функционального уравнения

$$f(\varphi, \psi, h_e) = 0, \quad (3.4)$$

где «вектор»

$$f(\varphi, \psi, h_e) = \begin{cases} -\varphi_{xx} + \sigma(\varphi_x - h_e) + \sin \varphi - \gamma, \\ \varphi_x(0) - h_e, \\ \varphi_x(l) - h_e, \\ -\psi_{xx} + \sigma\psi_x + [\cos \varphi - \lambda]\psi, \\ \psi_x(0), \\ \psi_x(l), \\ \int_0^l \psi^2(x) dx - 1. \end{cases}$$

Предположим, что существует изолированное решение $(\varphi^*, \psi^*, h_e^*)$ системы (3.4), и пусть (φ^0, ψ^0, h^0) есть выбранное начальное приближение. Предположим также, что переход $(\varphi^0, \psi^0, h^0) \rightarrow (\varphi^*, \psi^*, h_e^*)$ можно параметризовать при помощи непрерывного параметра θ . Тогда уравнение Гаурина записывается в виде

$$f'_\varphi(\varphi, \psi, h_e) \Phi + f'_\psi(\varphi, \psi, h_e) \Psi + f'_{h_e}(\varphi, \psi, h_e) H = -f(\varphi, \psi, h_e), \quad (3.5a)$$

$$\dot{\varphi} - \Phi = 0, \quad \dot{\psi} - \Psi = 0, \quad \dot{h}_B - H = 0. \quad (3.5b)$$

Здесь штрихом обозначены соответствующие производные Фреше [24], а точкой сверху обозначено дифференцирование по параметру θ .

Решение (3.5) при фиксированном значении переменной θ целесообразно искать в виде суммы

$$\Phi = u + Hv, \quad \Psi = \rho + H\chi, \quad (3.6)$$

где $u(x, \theta)$, $v(x, \theta)$, $\rho(x, \theta)$ и $\chi(x, \theta)$ — новые неизвестные функции. Подставляя разложение (3.6) в первые 6 уравнений системы (3.5) (уравнения Гавурина для (1.3) и (2.2)), получаем

$$-u_{xx} + \sigma u_x + \cos \varphi u = \varphi_{xx} - \sigma \varphi_x - \sin \varphi + \sigma h_e + \gamma, \quad (3.7a)$$

$$u_x(0) = h_e - \varphi_x(0), \quad u_x(l) = h_e - \varphi_x(l), \quad (3.7б)$$

$$-v_{xx} + \sigma v_x + \cos \varphi v = \sigma, \quad (3.7в)$$

$$v_x(0) = 1, \quad v_x(l) = 1; \quad (3.7г)$$

$$-\rho_{xx} + \sigma \rho_x + (\cos \varphi - \lambda)\rho = \psi_{xx} - \sigma \psi_x + (\lambda - \cos \varphi)\psi + \sin \varphi \psi u \quad (3.8a)$$

$$\rho_x(0) = \psi_x(0), \quad \rho_x(l) = -\psi_x(l), \quad (3.8б)$$

$$-\chi_{xx} + \sigma \chi_x + (\cos \varphi - \lambda)\chi = \sin \varphi \psi v \quad (3.8в)$$

$$\chi_x(0) = 0, \quad \chi_x(l) = 0. \quad (3.8г)$$

Предположим, что для заданных $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и h_e решение линейных краевых задач (3.7) и (3.8) найдено. Для определения производной H следует использовать последнее уравнение в системе (3.5), вытекающее из условия нормировки (2.3). Тогда

$$H = \frac{1}{2} \left(\int_0^l \psi(x)\chi(x) dx \right)^{-1} \left(1 - \int_0^l \psi^2(x) dx - 2 \int_0^l \psi(x)\rho(x) dx \right). \quad (3.9)$$

Для численной реализации НАМН необходимо заменить непрерывные задачи Коши (3.5б) разностными задачами. Для этой цели удобно воспользоваться явным методом Эйлера на неравномерной сетке $\theta_{k+1} = \theta_k + \tau_k$ по «времени» θ с переменным шагом τ_k , $k = 0, 1, \dots$. В результате приходим к итерационному процессу

$$\varphi^{k+1} = \varphi^k + \tau_k(u^k + H^k v^k), \quad (3.10a)$$

$$\psi^{k+1} = \psi^k + \tau_k(\rho^k + H^k \chi^k), \quad (3.10б)$$

$$h_e^{k+1} = h_e^k + \tau_k H^k, \quad (3.10в)$$

который позволяет на каждой итерации k по известным $\varphi^k(x)$, $\psi^k(x)$ и h_e^k вычислить при помощи (3.10) очередное приближение $\varphi^{k+1}(x)$, $\psi^{k+1}(x)$ и h_e^{k+1} к точному решению.

Область сходимости итерационного процесса можно расширить путем подходящего выбора шага интегрирования τ_k (см. обзоры [23] и цитированную там литературу). Значение $\tau_k = 1$ соответствует классическому методу Ньютона.

Линеаризованные краевые задачи, возникающие на каждой итерации, решались численно при помощи метода сплайн-коллокации [22]. Отметим, что при $\lambda = 0$ уравнения (3.7) и (3.8) отличаются только правыми частями. Это означает, что линейные алгебраические системы, полученные вследствие дискретизации, имеют одну и ту же матрицу. Тем самым на каждой итерации необходимо делать только одну декомпозицию этой матрицы. В случае небольших $|\lambda| \neq 0$ слагаемые, пропорциональные λ , можно перебросить справа, а соответствующие функции брать с предыдущей итерации. При этом число итераций для сходимости процесса увеличивается незначительно.

Алгоритм вычисления бифуркационных значений внешнего тока γ аналогичен изложенному выше.

На рис. 9 сравниваются результаты численного и физического эксперимента для полученных КК «ток – магнитное поле». Расчет отдельных БК проводился при помощи описанного выше алгоритма. Точками отмечены экс-

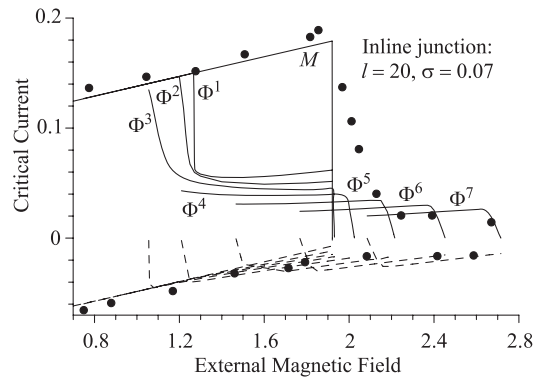


Рис. 9. Сравнение результатов численного и физического эксперимента

периментальные результаты, взятые из работы [2]. Сплошные кривые — это БК отдельных распределений в контакте при положительном токе. Пунктирные кривые соответствуют отрицательному току. Критическая кривая для контакта $\gamma_c(h_e)$ строится как огибающая БК, соответствующих различным распределениям магнитного потока в контакте. Другими словами, критическая кривая состоит из кусков БК для отдельных состояний с наибольшим по модулю при заданном h_e критическим током. Отметим, что построенная

нами численно критическая кривая имеет хорошее совпадение с экспериментальными результатами.

Рис. 10 иллюстрирует БК в случае ДК с перекрытием при длине $l = 20$. Сравнение БК для $l = 7$ (см. рис. 17 и 18) и $l = 20$ показывает, что большая длина контакта приводит к смещению БК мультифлюксонных вихрей

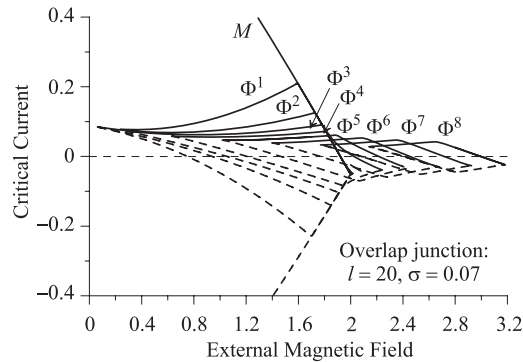


Рис. 10. Критическая кривая ДК длиной $l = 20$ — overlap-геометрия

в мейснеровскую область. Отметим, что во всех случаях критические кривые состоят из кусков БК распределений с целым числом флюксонов (3.2), причем огибающая экстремумов КК монотонно убывает с возрастанием $|h_e|$.

3.2. Вычисление центрирующего магнитного поля h_m . Рассмотрим теперь графики зависимости $N(h_e)$ для первых нескольких распределений вида Φ^n , представленные на рис. 11. Видно, что для каждого распределения имеется значение h_m поля h_e , при котором число вихрей в контакте

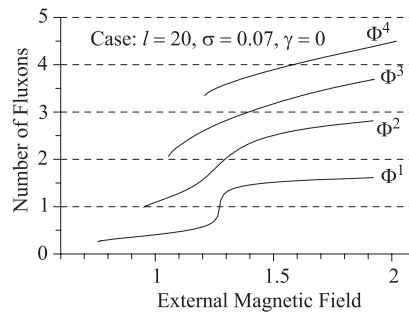


Рис. 11. Число вихрей как функция h_e

является целым. Величину h_m будем называть центрирующим полем, а соответствующее решение $\varphi(x, h_m)$ задачи (1.3) в точке h_m — центрированным распределением магнитного потока.

Геометрический смысл центрирующего поля хорошо просматривается на рис.12, на котором представлены графики собственного магнитного поля $\varphi_x(x)$ для основного флюксона Φ^1 при трех значениях h_e . В малых по-

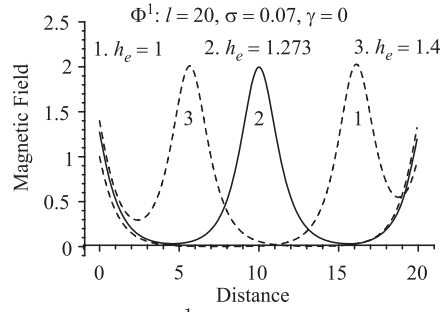


Рис. 12. Локализация Φ^1 в различных магнитных полях

лях флюксон локализован вблизи правого конца ДК, а большие значения h_e выталкивают Φ^1 «как целое» налево. При токе $\gamma = 0$ демонстрируемое смещение флюксона обязано только полю h_e . Из соображений непрерывности вытекает, что существует значение h_m поля h_e , при котором максимум производной $\varphi_x(x)$ расположен в центре $x = l/2$ контакта. Величина h_m зависит от прочих параметров модели. Например, при $\gamma = 0, l = 7$ и $\sigma = 0,07$ имеем $h_m \approx 1,751$ для Φ^1 и $h_m \approx -0,678$ для Φ^{-1} . Если $l = 20$, то для Φ^1 при том же $\sigma = 0,07$ значение $h_m \approx 1,273$.

Для Φ^2 -распределения магнитного потока влияние поля h_e аналогично (см. рис. 13 — центрирующим является значение h_m поля h_e , при котором график производной $\varphi_x(x)$ расположен симметрично относительно центра контакта, а число вихрей $N[\Phi^2] = 2$).

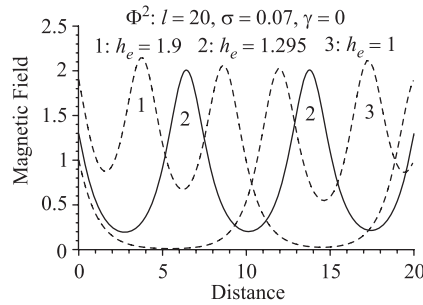


Рис. 13. Локализация Φ^2 в различных магнитных полях

На рис.14 демонстрируется поведение функции $N(\gamma)$ для M -, Φ^1 - и Φ^2 -распределений в контакте с параметрами $l = 7$ и $\sigma = 0,07$ при $h_e = 1,7$. Для каждого распределения имеется значение γ_m тока γ , при котором

число вихрей в контакте является целым. Величину γ_m естественно назвать центрирующим током.

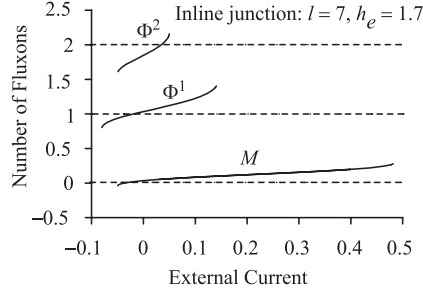


Рис. 14. Зависимость $N(\gamma)$

Обобщая, определим h_e -центрированные распределения магнитного потока в ДК как решения нелинейной краевой задачи (1.3), которые при заданном внешнем токе γ и геометрических параметрах удовлетворяют условию (3.2) для фиксированного (в частности, целого) n . Наличие дополнительного условия «нормировки» позволяет рассматривать совокупность (1.3) и (3.2) как нелинейную задачу на собственные значения для неизвестных $(\varphi(x), h_e)$, в которой роль спектрального параметра играет внешнее магнитное поле h_e .

Опишем алгоритм нахождения h_e -центрированных распределений, базирующийся на НАМН. Для определенности рассмотрим случай ДК с перекрытием. Запишем систему (1.3), (3.2) в виде единого функционального уравнения

$$f(\varphi, h_m) = 0, \quad (3.11)$$

где вектор-функция

$$f(\varphi, h_m) = \begin{cases} -\varphi_{xx} + \sigma(\varphi_x - h_m) + \sin \varphi - \gamma, \\ \varphi_x(0) - h_m, \\ \varphi_x(l) - h_m, \\ \frac{1}{\pi l} \int_0^l \varphi(x) dx - n. \end{cases} \quad (3.12)$$

Предположим, что существует изолированное решение (φ^*, h_e^*) системы (3.4), и пусть (φ^0, h^0) есть выбранное начальное приближение. Предположим также, что переход $(\varphi^0, h^0) \rightarrow (\varphi^*, h_e^*)$ можно параметризовать при помощи непрерывного параметра θ . Тогда уравнение Гавурина записывается следующим образом:

$$f'_\varphi(\varphi, h_m) \Phi + f'_{h_m}(\varphi, h_m) H + f(\varphi, h_m) = 0, \quad (3.13a)$$

$$\dot{\varphi} - \Phi = 0, \quad \dot{h}_m - H = 0. \quad (3.13б)$$

Решение (3.13) будем искать в виде

$$\Phi = u + Hv,$$

где $u(x, \theta)$ и $v(x, \theta)$ — новые неизвестные функции. Подставляя последнее разложение в (3.13) и приравнивая коэффициенты перед одинаковыми степенями H , приходим при каждом θ к линейным краевым задачам

$$-u_{xx} + \sigma u_x + \cos \varphi u = \varphi_{xx} + \sigma(h_m - \varphi_x) - \sin \varphi + \gamma, \quad (3.14а)$$

$$u_x(0) = h_m, \quad u_x(l) = h_m, \quad (3.14б)$$

$$-v_{xx} + \sigma v_x + \cos \varphi v = 1, \quad (3.14в)$$

$$v_x(0) = 1, \quad v_x(l) = 1. \quad (3.14г)$$

Пусть решения (3.14) найдены. Тогда производная $H(\theta)$ находится из уравнения

$$H = \left(\int_0^l v(x) dx \right)^{-1} \left[\pi l n - \int_0^l \varphi(x) dx - \int_0^l u(x) dx \right], \quad (3.15)$$

которое вытекает из условия «нормировки» (3.2).

Для численной реализации, как и выше, используется дискретизация (3.13б) при помощи метода Эйлера. Обозначая через $\tau_k \in (0, 1]$ шаг по «времени» θ на слое θ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, приходим к итерационному процессу

$$\varphi^{k+1}(x) = \varphi^k(x) + \tau_k [u^k(x) + H^k v^k(x)], \quad (3.16а)$$

$$h_m^{k+1} = h_m^k + \tau_k H^k. \quad (3.16б)$$

Для дискретизации линейных краевых задач для $u(x)$ и $v(x)$, входящих в (3.14), используется метод сплайн-коллокации [22]. При этом после дискретизации соответствующие алгебраические задачи будут иметь одну и ту же матрицу. Следовательно, на каждой итерации необходимо проводить лишь одну декомпозицию этой матрицы, что значительно упрощает алгоритм.

Остановимся на некоторых эффектах, связанных с центрирующим магнитным полем. На рис. 15 показаны кривые зависимости функционала $N[\Phi^1]$ для основного флюксона от магнитного поля h_e для четырех значений длины l контакта. Хорошо видно, что при больших значениях l функция $N(h_e)$ стремится к «ступеньке» Хевисайда в точке $h_m(l)$. На графике зависимости минимального СЗ ЗШТЛ от поля h_e этот факт выражается в том, что с возрастанием l график функции $\lambda_0(h_e)$ стремится коснуться горизонтальной

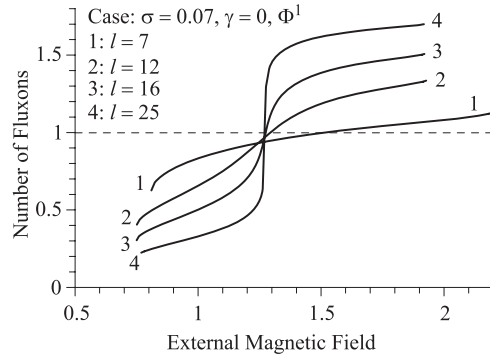


Рис. 15. Число вихрей как функция h_e

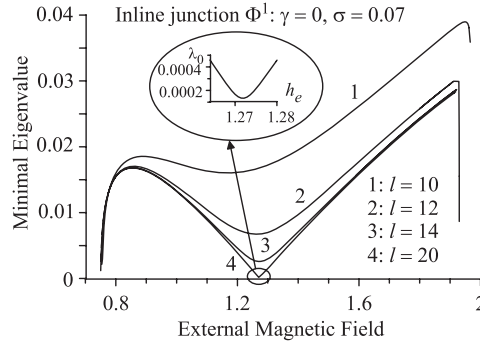


Рис. 16. Зависимость $\lambda_0(h_e)$ для Φ^1

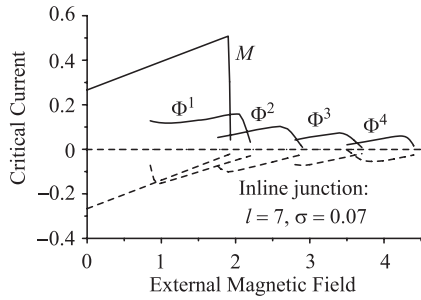


Рис. 17. $l = 7$

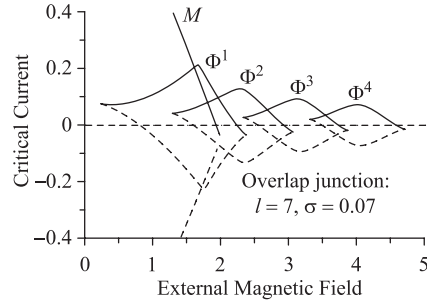


Рис. 18. $l = 7$

оси h_e , т. е. при достаточно больших l функция $\lambda_0(h_e)$ в точке $(0, h_m)$ имеет горизонтальную касательную (см. вкладку на рис. 16). Тем самым при $l \rightarrow \infty$ функция $\lambda_0(h_e)$ имеет более чем два нуля.

На рис.19 показаны графики зависимостей $N(h_e)$ для бифуркационного ($\lambda_{\min} = 0$) M -решения и первых четырех бифуркационных вихрей Φ^n , $n = 1, 2, 3, 4$, в поле $h_e \geq 0$ (для $h_e \leq 0$ картина симметрична относительно вертикальной оси). Пары кривых, соответствующих одному и тому же решению при противоположных γ , образуют замкнутые области на плоскости (N, h_e) . Важно отметить, что в отличие от случая $\sigma = 0$ (см. рис.20, пунктирная кривая) точки максимального и минимального допустимого поля h_e не лежат на горизонтальных прямых $N = \text{целое}$. Этот факт, который обязан геометрическому току $\sigma(\varphi_x - h_e)$, выражает интересный физический эффект,

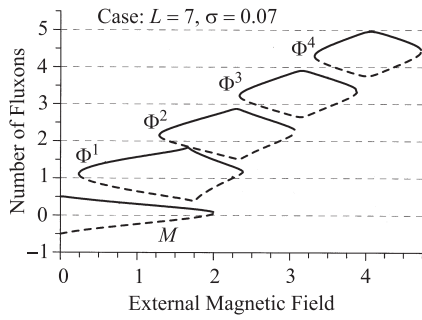


Рис. 19. Кривые бифуркационных зависимостей $N(h_e)$

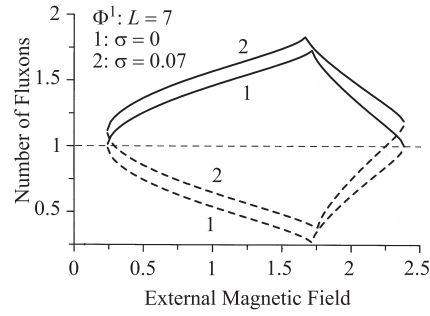


Рис. 20. Сравнение БК $N(h_e)$ для Φ^1 при $\sigma = 0$ и $\sigma = 0,07$

отмеченный выше: существуют области изменения поля h_e , в которых для устойчивости распределений нужен внешний ток $\gamma \neq 0$, уравнивающий ток геометрический. Тем самым в таких областях точка $\gamma = 0$ не является точкой устойчивости и каждое распределение магнитного потока в ДК имеет два критических тока одинаковой полярности — ток рождения и ток уничтожения.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим БК для основного флюксона Φ^1 в контакте с $l = 7$ и $\sigma = 0,07$, которая представлена на рис.21. Видно, что точка $\gamma = 0$ входит в область устойчивости по полю h_e только при $h_e \in [h_l, h_r]$. На отрезках $[h_{\min}, h_l)$ и $(h_r, h_{\max}]$ для устойчивости флюксона нужен положительный/отрицательный внешний ток γ . Указанный эффект можно наблюдать в физическом эксперименте, например, методами работы [19].

На рис.20 через h_i , $i = 1, 2$, обозначены точки, в которых при $\lambda = 0$ и $\sigma > 0$ выполнено равенство $N(h_e) = 1$. Бифуркационные распределения магнитного потока в этих точках для обеих геометрий ДК являются решениями нелинейной краевой задачи

$$-\varphi_{xx} + \sigma\varphi_x + \sin\varphi - \sigma h_i = 0, \quad (3.17a)$$

$$\varphi_x(0) = h_i, \quad \varphi_x(l) = h_i, \quad (3.17б)$$

$$-\psi_{xx} + \sigma\psi_x + \cos\varphi\psi = 0, \quad (3.17в)$$

$$\psi_x(0) = 0, \quad \psi_x(l) = 0, \quad (3.17г)$$

$$\frac{1}{l\pi} \int_0^l \varphi(x) dx - 1 = 0. \quad (3.17д)$$

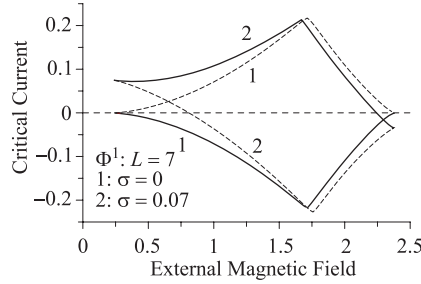


Рис. 21. Кривая $\gamma_{cr}(h_e)$ для Φ^1

Отметим, что формально система (3.17) отличается от рассмотренной выше системы для вычисления точек бифуркации (уравнения (1.3), (2.2), (2.3)) только условием нормировки (3.17д). Соответственно, алгоритм вычисления собственных значений h_i описывается формулами, аналогичными (3.7)–(3.10).

Аналогично γ -центрированные распределения — это те решения (1.3), для которых функционал $N[\varphi]$ при заданном поле h_e и заданных геометрических параметрах принимает целочисленные значения. Соответствующие значения центрирующего тока обозначим через γ_m . Например, для двух базисных распределений Φ^1 и Φ^2 в ДК длиной $l = 10$ при $\sigma = 0,07$ в поле $h_e = 1,5$ имеем соответственно $\gamma_m(\Phi^1) \approx -0,039$ и $\gamma_m(\Phi^2) \approx 0,025$.

Задачу отыскания γ -центрированных решений системы (1.3), (3.2) целесообразно интерпретировать как нелинейную задачу на собственные значения со спектральным параметром γ . Алгоритм вычисления центрирующего тока γ_m аналогичен изложенному выше для центрирующего магнитного поля h_e .

Формально, с математической точки зрения центрированными по полю h_e или по току γ могут быть как устойчивые, так и неустойчивые решения задачи (1.3). В качестве примера на рис. 22 показаны графики внутреннего магнитного поля $\varphi_x(x)$ для простейших смешанных цепочек вихрей вида $\Phi^1\Phi^{-1}$ в ДК длиной $l = 10$ при токе $\gamma = 0$. Пространственно-временное возмущение вида (2.1) для такого распределения содержит две растущие экспоненты, соответствующие $\lambda_0 < 0$ и $\lambda_1 \leq 0$ во всем допустимом диапазоне внешнего

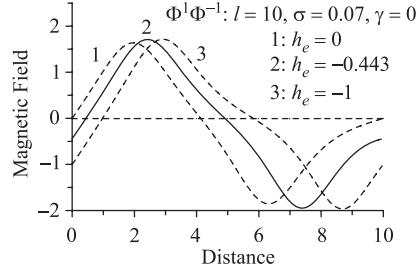


Рис. 22. Неустойчивые смешанные распределения $\Phi^1\Phi^{-1}$ и $\Phi^{-1}\Phi^1$

поля h_e . Центрированное распределение при $h_m \approx -0,443$ ($\lambda_0 \approx -0,229$) отмечено сплошной кривой; для сравнения пунктирными кривыми обозначены распределения того же вида в полях $h_e = -1$ ($\lambda_0 \approx -0,231$) и $h_e = 0$ ($\lambda_0 \approx -0,313$).

Отметим, что в одномерных контактах с резистивной неоднородностью в окрестности центра $l/2$ контакта смешанные распределения и, в частности, вида $\Phi^1\Phi^{-1}$ могут быть устойчивыми за счет пиннинга на неоднородности [8]. Такой пиннинг приводит к нарушению монотонности убывания экстремумов критической кривой с увеличением внешнего магнитного поля $h_e > 0$, что наблюдалось экспериментально, например, в [20, 21], для ДК с решеткой неоднородностей в барьерном слое. Однако в ДК с экспоненциально изменяющейся формой смешанные распределения всегда неустойчивы, так как эквивалентная резистивная неоднородность (см. подробности в [6]) расположена на узком конце контакта. Тем самым экстремумы критической кривой такого ДК убывают равномерно, что видно из результатов как численного, так и физического экспериментов. По-видимому, отсутствие устойчивых смешанных распределений в ДК с экспоненциально изменяющейся шириной объясняет улучшенный спектр излучения таких ДК в сравнении с прямоугольными ДК [2]. Результаты нашей работы [6] показывают, что прямоугольные контакты с неоднородностями в окрестности концов обладают аналогичным свойством.

Благодарности. Авторы выражают благодарность проф. И. В. Пузынину за внимание и поддержку работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Benabdallah A., Caputo J. G., Scott A. C. Exponentially trapped Josephson flux-flow oscillator // Phys. Rev. B. 1996. V. 54, No. 2. P. 16139–16146.

2. *Carapella G., Martucciello N., Costabile G.* Experimental investigation of flux motion in exponentially shaped Josephson junctions, e-print: cond-mat/0203055; Phys. Rev. B. 2002. V. 66. P. 134531.
3. *Goldobin E., Sterck A., Koelle D.* Josephson vortex in a ratchet potential: Theory, e-print: cond-mat/0008237; Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 031111.
4. *Semerdjieva E. G., Boyadjiev T. L., Shukrinov Yu. M.* Static vortices in long Josephson contacts of exponentially varying width // J. Low Temp. Phys. 2004. V. 30, No. 6. P. 610–618.
5. *Shukrinov Yu. M., Semerdjieva E. G., Boyadjiev T. L.* Vortex structures in exponentially shaped Josephson junctions, e-print: cond-mat/0410048; J. Low Temper. Phys. 2005. V. 139, Nos. 1, 2, P. 299–308.
6. *Semerdjieva E. G., Boyadjiev T. L., Shukrinov Yu. M.* Coordinate transformation in the model of long Josephson junctions: geometrically equivalent Josephson junctions // Low Temp. Phys. 2005. V. 31, No. 10. P. 610–618.
7. *Гальперн Ю. С., Филиппов А. Т.* Связанные состояния солитонов в неоднородных джозефсоновских переходах // ЖЭТФ. 1984. Т. 86, вып. 4. С. 1527; Sov. Phys. JETP. 1984. V. 59. P. 894.
8. *Бояджиев Т. Л.* Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики. Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Дубна, 2002.
9. *Fogel M. B. et al.* Dynamics of sine-Gordon solitons in the presence of perturbations // Phys. Rev. B. 1977. V. 15, No. 3. P. 1578–1592.
10. *Licharev K. K.* Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. New York: Gordon and Breach, 1986. P. 634.
11. *Filippov A. T. et al.* Localization of solitons on small inhomogeneities in Josephson Junctions. Comm. JINR E17-89-106. Dubna, 1989.
12. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
13. *Парментье Р.* Флюксоны в распределенных джозефсоновских контактах // Соли-тоны в действии / Ред. К. Лонгрен, Э. Скотт. М.: Мир, 1981. С. 185.
14. *Гельфанд И. М., Фомин С. В.* Вариационное исчисление. М., 1961.
15. *Красносельский М. А.* Некоторые задачи нелинейного анализа // УМН. 1954. Т. IX, вып. 3(61). С. 57–114.
16. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Ред. Дж. Б. Келлер, С. Антман. М.: Мир, 1974.

17. *Owen C. S., Scalapino D. J.* Vortex structure and Critical Currents in Josephson Junctions // *Phys. Rev.* 1967. V. 164 (2). P. 538–544.
18. *Chang Jhy-Jiun, Ho C. H.* Nonlocal response to a focused laser beam in one-dimensional Josephson tunnel junctions // *Appl. Phys. Lett.* 1984. V. 45 (2). P. 192–184.
19. *Выставкин А. Н. и др.* Обнаружение статических связанных состояний флюксонов в распределенных джозефсоновских переходах с неоднородностью // *Физика низких температур.* 1988. Т. 14, № 6. С. 646.
20. *Malomed B. A., Ustinov A. V.* Pinning of a fluxon chain in a long Josephson junction with a lattice of inhomogeneities: Theory and experiment // *J. Appl. Phys.* 1990. V. 67 (8). P. 3791–3797.
21. *Larsen B. H., Mygind J., Ustinov A. V.* Commensurability between fluxons and inhomogeneities in a long Josephson junction // *Phys. Lett. A.* 1994. V. 193. P. 359–362;
Larsen B. H., Mygind J., Ustinov A. V. Commensurate fluxon states in long Josephson junctions with inhomogeneities // *Physica B.* 1994. V. 194–196. P. 1729–1730.
22. *Бояджиев Т. Л.* Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности. Сообщение ОИЯИ P2-2002-101. Дубна, 2002.
23. *Puzynin I. V. et al.* The generalized continuous analog of Newton method for numerical study of some nonlinear quantum-field models // 1999. V. 30, No. 1. P. 97.
24. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.
25. *Barashenkov I. V., Zemlyanaya E. V.* Travelling solitons in the damped driven nonlinear Schroedinger equation // *SIAM Journal of Applied Mathematics.* 2004. V. 64, No. 3. P. 800–818;
Земляная Е. В., Барашенков И. В. Численный анализ движущихся солитонов в нелинейном уравнении Шредингера с параметрической накачкой и диссипацией // *Математическое моделирование.* 2005. Т. 17, № 1. С. 65–78.

Получено 23 декабря 2005 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 13.04.2006.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,63. Уч.-изд. л. 1,98. Тираж 310 экз. Заказ № 55306.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/