

P2-2005-218

А. Е. Дорохов<sup>1</sup>, Г. М. Зиновьев<sup>2</sup>, Н. И. Кочелев<sup>1</sup>,  
С. В. Молодцов<sup>1,3</sup>

О СПЕКТРЕ ТЯЖЕЛЫХ КВАРКОНИЕВ  
В ИНСТАНТОННОЙ СРЕДЕ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

---

<sup>1</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>2</sup> Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАНУ, Киев

<sup>3</sup> Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Дорохов А. Е. и др.

P2-2005-218

О спектре тяжелых кваркониев в инстантонной среде

Для систем тяжелых кваркониев дается оценка сдвига уровней, вызванного флуктуациями вакуумных глюонных полей, моделируемых инстантонной жидкостью. Использование соответствующей вакуумной корреляционной функции позволяет выйти за рамки дипольного приближения. Также приводится ширина  $e^+e^-$ -распада уровней. Показано, что как в случае боттомония, так и чармония инстантонная среда может обеспечить диктуемый экспериментом масштаб сдвигов и ширин уровней. В частности, отмечено, что специфическим свойством инстантонного вакуума является существенный логарифмический вклад на малых расстояниях.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Dorokhov A. E. et al.

P2-2005-218

On the Spectrum of Heavy Quarkonium in the Instanton Liquid

The energy level shift for heavy quarkonium systems caused by vacuum field fluctuations modeled within the instanton liquid approach is estimated. The evaluation of corresponding vacuum correlation function makes it possible to go beyond dipole approximation. The  $e^+e^-$  width is also estimated. It is shown that for both bottomonium and charmonium systems the instanton vacuum generates the scale of shifts and widths compatible with the experimental data. In particular at small distances we found the logarithmic contribution to the effects discussed specific for the instanton vacuum.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

Хорошо известно, какую исключительную роль сыграло в свое время изучение систем тяжелых кваркониев. Почти модельно-независимым образом были оценены массы тяжелых кварков  $m$ , константа связи глюонного поля  $g$  (на масштабе размера системы), также были зафиксированы базисные свойства вакуума КХД (глюонный конденсат) [1, 2]. Аргументация основывалась на представлении о вакууме КХД как о сложной системе, населенной интенсивными флуктуациями глюонных полей с корреляционной функцией вида

$$\langle G(T)G(0) \rangle = \langle G^2 \rangle e^{-T/T_G},$$

где  $\langle G^2 \rangle$  — глюонный конденсат, а  $T_G$  — характерное время глюонных вакуумных флуктуаций. Кроме того, полагалось, что массивные кварки образуют нерелятивистскую систему, доминирующим взаимодействием в которой на малых расстояниях является кулоновское глюонное поле, описываемое, в силу асимптотической свободы, пертурбативным образом. Поля вакуумных флуктуаций трактовались как возмущение, для которого в случае боттомония оказывалось применимым квазистационарное приближение. Описание самых низколежащих термов было успешным, а искажение кулоновского спектра возбужденных уровней было столь велико, что приводило к выводу о том, что малое воздействие непертурбативных глюонных вакуумных полей может произвольным образом изменить результирующий спектр исходного кулоновского [1, 2].

Параллельно этому направлению развивался и традиционный потенциальный подход, отличительной чертой которого являлось наличие линейно растущего запирающего потенциала (см., например, [3]). В этом случае спектр системы не изменялся столь драматическим образом, хотя возмущение было вызвано теми же полями вакуумных флуктуаций.

Этот парадокс был разрешен в последующих исследованиях [4], где было продемонстрировано, что обе картины дополняют друг друга. Было показано, что если кварковые времена  $T^Q$  (см. [4] и дискуссию ниже) малы по сравнению с  $T^G$ ,  $T^Q \ll T^G$ , то следует использовать непотенциальное описание [1, 2]. В противоположном пределе  $T^Q \gg T^G$  справедлива картина с потенциальным взаимодействием [3]. Сдвиг уровня кваркония  $|nl\rangle$  ( $n$  — главное квантовое число,  $l$  — орбитальный момент), вызванный полями вакуумных флуктуаций, выражается в дипольном приближении через средний квадрат расстояния между кварками в данном состоянии [4]

$$\Delta M_{nl} = \frac{g^2}{18} \langle G^2 \rangle \frac{\langle nl | \mathbf{x}^2 | nl \rangle}{\frac{1}{T^Q} + \frac{1}{T^G}}, \quad (1)$$

причем характерное кварковое время  $T^Q$  для уровня  $|nl\rangle$  оценивается как

$$T_{nl}^Q = \frac{27}{16} n^6 \frac{a_0^3}{\alpha_s} \frac{a_{nl}}{\langle nl|\mathbf{x}^2|nl\rangle}, \quad (2)$$

где  $a_0 = \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha_s m}$  — радиус боровской орбиты,  $\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$  — константа сильной связи, а  $a_{nl}$  — некоторый численный множитель порядка единицы, найденный Лейтвилером в случае  $T^Q \rightarrow 0$ .

Формула (1) действительно разрешает отмечавшийся выше парадокс. В непотенциальном подходе, однако, остается проблема взрывного (пропорционального  $n^6$ , см. (2)) смещения уровней с увеличением главного квантового числа  $n$ .

Другой сценарий для объяснения сдвига уровней был предложен в работах [5], где отмечалось, что конечные корреляции глюонных полей по времени и пространству приводят к линейно растущему потенциалу. Несмотря на то, что вопрос о влиянии на нерелятивистскую систему непостоянного (по пространству) поля ставился еще в ранних исследованиях [6], практическая количественная оценка так и не была дана.

Как отмечалось выше, сильной стороной непотенциального описания является то обстоятельство, что для кварков с асимптотически большими массами  $m\alpha_s^2 \gg \Lambda_{QCD}$  основной уровень предсказывается почти модельно-независимым образом, причем его сдвиг, индуцированный слабым (на фоне кулоновского) случайно ориентированным хромозлектрическим полем, выражается через глюонный конденсат

$$M_{nl} = 2m - \frac{k_n^2}{m} \left( 1 - \frac{m^2}{18 k_n^6} n^2 a_{nl} \langle \pi \alpha_s G^2 \rangle \right), \quad (3)$$

здесь  $k_n$  — импульс кварка:

$$k_n = \frac{m}{n} \frac{2}{3} \alpha_s(k_n).$$

Однако следует напомнить, что сдвиг уровня в формуле (3) получен в рамках дипольного разложения хромозлектрического поля (см. также ниже) и область ее применимости сильно ограничена малыми расстояниями. Например в боттомонии она приложима только к основному состоянию ( $n = 1$ ,  $l = 0$ ), причем в этом случае последующие степенные поправки оказываются достаточно малыми (см. ниже). Практически невозможно получить старшие члены мультипольного разложения в формуле (3). Приходится использовать какую-либо конкретную правдоподобную вакуумную конфигурацию. Мы оценим сдвиги уровней в инстантонной картине вакуума КХД, где, как известно, имеется малый параметр — упаковочный фактор  $n \bar{\rho}^4 \sim 0,01$ , где  $n$  —

плотность инстантонов,  $\bar{\rho}$  — их средний размер. Нас будет интересовать качественный вопрос, какую долю сдвига уровней и ширины  $e^+e^-$ -распада связанной системы тяжелых кварков может обеспечить инстантонная компонента.

Невозмущенный гамильтониан системы двух тяжелых, с массами  $m_1, m_2$ , частиц в нерелятивистском приближении имеет вид

$$H_0 = -\frac{\mu}{2} \nabla_x^2 + \alpha_s \frac{\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2}{|\mathbf{x}|} - \frac{M}{2} \nabla_X^2, \quad (4)$$

где  $\mathbf{X} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{M}$  обозначает координату центра инерции системы,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  — относительное расстояние между частицами,  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X} + \frac{\mu}{m_1} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{X} - \frac{\mu}{m_2} \mathbf{x}$ ,  $M = m_1 + m_2$ ,  $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$ ,  $t^a$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$ , — генераторы группы  $SU(3)$ , причем для кварка  $\mathbf{t}_1 = \frac{\lambda}{2}$  ( $\lambda$  — матрицы Гелл-Манна), а для антикварка  $\mathbf{t}_2 = -\mathbf{t}_1^T$ . Проецируя оператор произведения зарядов на синглетное и октетное состояния  $\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \rightarrow -\frac{4}{3}P_0 + \frac{1}{6}P_8$ , получим в синглетном канале кулоновское притяжение, а в октетном — отталкивание.

В качестве фонового вакуумного поля, насыщающего производящий функционал КХД, рассматривается суперпозиция (анти)инстантонов, взятых в сингулярной калибровке,

$$A_\mu^a(x; \gamma) = \frac{2}{g} \omega^{ab} \bar{\eta}_{b\mu\nu} a_\nu(y), \quad a_\nu(y) = \frac{\rho^2}{y^2 + \rho^2} \frac{y_\nu}{y^2}, \quad (5)$$

$$y = x - z, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4,$$

где  $\rho$  — размер,  $\omega$  — матрица цветовой ориентации и  $z$  — координата центра псевдочастицы (для антиинстантона следует произвести замену символов 'т Хоофта  $\bar{\eta} \rightarrow \eta$ ) [7]. Тогда гамильтониан взаимодействия кварков с вакуумным полем в старшем порядке по  $v/c$  имеет вид

$$H_{\text{int}} = \sum_{k=1}^N [\mathbf{t}_1 i\mathbf{A}_4(\mathbf{x}_1, ix_0; \gamma_k) + \mathbf{t}_2 i\mathbf{A}_4(\mathbf{x}_2, ix_0; \gamma_k)], \quad (6)$$

где суммирование ведется по полям псевдочастиц,  $\gamma_k = (\rho_k, z_k, \omega_k)$  — параметр, описывающий  $k$ -й (анти)инстантон. Волновая функция системы двух тяжелых частиц в начальном состоянии имеет вид  $\psi_i(\mathbf{x})\Phi_i(\mathbf{X})$ . Конечное состояние будет обозначаться индексом  $f$ , спиновые и цветовые индексы опущены.

Выражение для поля инстантона в формуле (6) приведено для пространства Минковского, где, напомним, нулевая (четвертая) компонента поля (анти)инстантона должна быть мнимой, причем аналогичным образом и время  $x_0$  входит как мнимая величина. Формально гамильтониан (6) зависит от времени, но в силу стохастического характера поля взаимодействия его вклад в первом порядке теории возмущений исчезает  $\langle H_{\text{int}} \rangle = 0$ .

Во втором порядке теории возмущений нас будут сначала интересовать парциальные вклады псевдочастиц в матричные элементы, образованные с помощью функции Грина невозмущенного гамильтониана  $H_0 - E$  (для отрицательных значений энергии  $E$ , отвечающих связанным состояниям). Если пренебречь возможным эффектом рассеяния системы как целого на инстантоне (предел  $M \rightarrow \infty$ ), то функция Грина в силу сохранения энергии-импульса сводится к факторизованной форме, в которой зависимость от координаты центра инерции входит в виде  $\delta$ -образного множителя

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{X}) = g(\mathbf{x}; E) \delta(\mathbf{X}) .$$

Тогда интересующие нас матричные элементы во втором порядке теории возмущений приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle f | H_{\text{int}} (H_0 - E)^{-1} H_{\text{int}} | i \rangle &= -g^2 \int d\mathbf{x} d\mathbf{X} \psi_f(\mathbf{x}) \Phi_f(\mathbf{X}) t_m^a A_4^a(\mathbf{x}_m, ix_0; \gamma) \times \\ &\times \int d\mathbf{y} d\mathbf{Y} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}; E) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) t_n^b A_4^b(\mathbf{y}_n, ix_0; \gamma) \psi_i(\mathbf{y}) \Phi_i(\mathbf{Y}), \quad m, n = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Оговорим, что в этой формуле мы, следуя [1], полагаем, что обе частицы, как с координатой  $\mathbf{y}$ , так и с координатой  $\mathbf{x}$ , дают синхронизованный вклад в один и тот же момент времени, т. е. мы будем предполагать, что характерная частота прецессии (анти)кварков по боровской орбите ( $\sim T_Q^{-1}$ ) заметно выше характерной частоты флуктуаций хромоелектрического поля\*. Оговорим также, что в формуле (7) функция  $g(\mathbf{x})$  — это функция Грина октетного канала.

В инстантонной среде нам следует просуммировать парциальные вклады всех псевдочастиц, при этом, в силу малости упаковочного параметра  $n\bar{\rho}^4$ , здесь  $n = N/V$  и  $V$  — объем, занимаемый ансамблем псевдочастиц. Далее мы ограничимся только старшими, одночастичными (анти)инстантонными вкладами ( $\sim n$ ), пренебрегая высшими корреляторами ( $\sim n^2$  и выше). Кор-

---

\*Как было отмечено выше, в принципе, можно выйти за рамки этой оценки приближения стационарного поля (см. [4]).

реляционная функция, определяемая профилем (анти)инстантона, имеет вид

$$\langle A_4^a(\mathbf{x}_m, ix_0; \gamma) A_4^b(\mathbf{y}_n, ix_0; \gamma) \rangle_{\omega z} = \frac{4}{g^2} \frac{\delta^{ab}}{N_c^2 - 1} \frac{\rho^2}{V} F\left(\frac{|\mathbf{x}_m - \mathbf{y}_n|}{\rho}\right). \quad (8)$$

Напомним, что угловые скобки здесь обозначают интегрирование по цветовым ориентациям псевдочастиц  $d\omega$  (причем  $\langle \omega^{ak} \omega^{cd} \rangle_{\omega} = \frac{\delta^{ac} \delta^{kd}}{N_c^2 - 1}$ ), а также усреднение по их положениям, с весом  $\frac{dz}{V}$ , где  $N_c$  — число цветов. Явный вид функции  $F(x)$  таков:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\pi^2}{4} \frac{x^2 + 2}{|x|} \sqrt{x^2 + 4} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 4}(x^2 + 1) + x^3 + 3x}{\sqrt{x^2 + 4} - x} \right| - \\ &- \pi^2 \frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} \ln(1 + x^2) + \pi^2 x^2 \ln|x| \end{aligned} \quad (9)$$

с асимптотиками

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) \rightarrow \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} x^2 + \pi^2 x^2 \ln|x|, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) \rightarrow \frac{\pi^2}{x^2}.$$

Теперь учет вклада всех (анти)инстантонов сводится просто к умножению результата (8) на плотность инстантонной жидкости  $n$ .

Поскольку корреляционные функции выражаются только через разность аргументов потенциалов (анти)инстантонов, то в формуле (8) нет зависимости от мнимого времени. Далее учтем, что в матричном элементе второго порядка теории возмущений (7) при действии на функции начального и конечного синглетных по цвету состояний произведение зарядов сводится к  $\frac{4}{3} I$ , где  $I$  — единичная матрица по цвету. Вклады кварка и антикварка  $\sim \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_2$  (антикварка и кварка  $\sim \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_1$ ) войдут в матричный элемент (7) со знаком, противоположным знаку вклада кварка и кварка  $\sim \mathbf{t}_1 \mathbf{t}_1$  (антикварка и антикварка  $\sim \mathbf{t}_2 \mathbf{t}_2$ ). В том случае, когда массы частиц одинаковы, во втором порядке теории возмущений получим

$$\begin{aligned} \langle f | H_{\text{int}} (H_0 - E)^{-1} H_{\text{int}} | i \rangle &= \frac{8}{N_c^2 - 1} \frac{4}{3} n \bar{\rho}^2 \int d\mathbf{x} \psi_f(\mathbf{x}) \int d\mathbf{y} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}; E) \times \\ &\times \left[ F\left(\frac{|\mathbf{x} + \mathbf{y}|}{2\rho}\right) - F\left(\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2\rho}\right) \right] \psi_i(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (10)$$

(тривиальный множитель  $\sim \Phi_f \Phi_i$  не выписываем).

Для функции Грина  $g(\mathbf{x} - \mathbf{y}; E)$  воспользуемся следующим удобным представлением [1]:

$$g(\mathbf{x} - \mathbf{y}; E) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) g_l(x, y; E) P_l\left(\frac{\mathbf{x}\mathbf{y}}{xy}\right), \quad (11)$$

где  $P_l$  — полиномы Лежандра,  $E = -\frac{k^2}{m}$ , в октетном канале

$$g_l(x, y; -\frac{k^2}{m}) = \frac{mk}{2\pi} (2kx)^l (2ky)^l e^{-k(x+y)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L_s^{2l+1}(2kx) L_s^{2l+1}(2ky) s!}{(s+l+1 + \frac{m}{2k} \frac{\alpha_s}{6}) (s+2l+1)!}, \quad (12)$$

$L_l^p$  — полиномы Лагерра.

Покажем, что при малых  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  формула (10) воспроизводит результат (3). Действительно, раскладывая потенциалы (анти)инстантонов вплоть до дипольных членов

$$A_4(\mathbf{x}_1) = A_4\left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} A_4\left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{2} + \dots$$

(аналогично  $A_4(\mathbf{x}_2)$ ) и учитывая, что в синглетном по цвету состоянии среднее  $\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2 \rightarrow 0$ , для гамильтониана взаимодействия получим следующее приближенное выражение:

$$H'_{\text{int}} = ig \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} A_4^a\left(\frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2}{2}\right) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \frac{t_1^a - t_2^a}{2} = ig \mathbf{E}^a (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \frac{t_1^a - t_2^a}{2}.$$

В матричном элементе во втором порядке теории возмущений выразим среднее от квадрата напряженности хромoeлектрического поля через глюонный конденсат

$$\langle E_i^a E_j^b \rangle = \frac{\delta_{ij}}{3} \frac{\delta^{ab}}{8} \frac{1}{4} \langle G^2 \rangle = \frac{\pi^2}{3} \delta_{ij} \delta^{ab} \frac{n \bar{\rho}^2}{g^2},$$

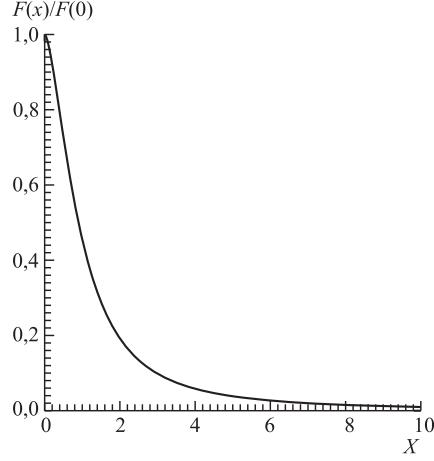
после чего преобразуем его к виду

$$\langle f | H'_{\text{int}} (H_0 - E)^{-1} H'_{\text{int}} | i \rangle = -\frac{\pi^2}{3} \frac{4}{3} n \int d\mathbf{x} \psi_f(\mathbf{x}) \int d\mathbf{y} g(\mathbf{x} - \mathbf{y}; E) (\mathbf{x}\mathbf{y}) \psi_i(\mathbf{y}), \quad (13)$$

что соответствует также асимптотике функции  $F$  в нуле. Полученное выражение в точности соответствует дипольному приближению работ [1, 2], следствием которого является формула для сдвига массы (3). Однако из рисунка легко видеть, что область, где коррелятор должен описываться квадратичной функцией и для которой справедливо дипольное приближение, мала.

В итоговой таблице приведены массы уровней боттомония и чармония, рассчитанные численно по формуле (10). Точность вычислений контролировалась путем воспроизведения известного аналитического ответа для коэффициента  $a_{nl}$  [2] при использовании приближенного выражения (13).





Корреляционная функция  $\frac{F(x)}{\pi^2}$

Для  $b$ -кварка масса принималась равной  $m_b = 4,74$  ГэВ, для  $c$ -кварка —  $m_c = 1,52$  ГэВ. Масса кваркония в  $P$ -состоянии приведена как среднее по мультиплету. Константа сильной связи и параметры инстантонной среды [7] полагались равными  $\alpha_s = 0,2$ ,  $n/\Lambda^4 = 1$ ,  $\bar{\rho}\Lambda = 0,27$ ,  $\bar{\rho}^{-1} \simeq 1$  ГэВ. Массы кварков выбирались с тем условием, чтобы при указанных параметрах инстантонной жидкости точно воспроизводить основной уровень при фиксированной константе сильной связи.

Из приведенной таблицы видно, что, как и следовало ожидать, применение дипольного приближения к описанию возбужденных состояний тяжелого кваркония совершенно неадекватно. В то же время использование реалистических корреляционных функций стабилизирует эти сдвиги (см. колонки 4 и 7 в табл. 1), при этом масштаб сдвигов вполне соответствует экспери-

**Таблица 1. Уровни боттомония и чармония (ГэВ)**

$n$	$l$	$M_{nl}(b\bar{b})$	$M_{nl}(b\bar{b})$	$M_{nl}^{\text{exp}}(b\bar{b})$	$M_{nl}(c\bar{c})$	$M_{nl}(c\bar{c})$	$M_{nl}^{\text{exp}}(c\bar{c})$
1	0	9,84	9,46	9,46	16,92	3,096	3,096
2	0	41,13	10,25	10,023	963,56	3,47	3,686
2	1	29,41	9,68	9,888	608,19	3,176	3,494
3	0	386,47	14,65	10,355	1143,37	5,31	4,030
3	1	318,88	10,76	10,253	9384,44	3,62	
3	2	192,25	11,48		5545,00	3,93	

*Примечание.* Третий и шестой столбцы соответствуют вычислениям по формуле (3), а четвертый и седьмой — по формуле (10).

ментальным данным. Более того, вклад полей вакуумных флуктуаций может насыщаться коротковолновой инстантонной компонентой. Стоит также оговорить, что непотенциальное описание сдвигов уровней, по-видимому, нельзя применять по отношению к системе чармония в силу слишком больших соответствующих корреляционных времен. Тем не менее даже в этом случае мы видим, что приведенная оценка дает вполне приемлемый масштаб сдвигов.

Рассмотрим теперь ширину  $e^+e^-$ -распада  ${}^3S_1$ -уровня, которая выражается через вычет матричного элемента  $\langle \mathbf{x} = 0 | G_S(E) | \mathbf{y} = 0 \rangle$ , взятого в полюсе рассматриваемого связанного состояния [1, 2]:

$$\Gamma_{ee} = 4\pi Q^2 \frac{\alpha^2}{m^2} \left(1 - \frac{16\alpha_s}{3\pi}\right) \left(1 + \frac{A_Z}{A_\gamma}\right)^2 \text{Res} \langle \mathbf{x} = 0 | G_S(E) | \mathbf{y} = 0 \rangle, \quad (14)$$

где  $A_Z/A_\gamma$  — отношение амплитуд за счет аннигиляции через  $Z$ -бозон и через фотон. В символическом виде синглетная по цвету функция Грина

$$G_S(E) = P_0 \langle 0 | (H - E)^{-1} | 0 \rangle P_0$$

может быть записана как

$$G_S(E) = (H_S - E)^{-1} - (H - E)^{-1} igA(H_A - E)^{-1} igA(H_S - E)^{-1}.$$

Мы не будем приводить явных громоздких выражений, которые во многом повторяют обозначения из работ [1, 2], скажем только, что вместо матричного элемента дипольного приближения (13) мы пользуемся индуцированным инстантонной средой выражением (10). Кроме того, чтобы явным образом выделить полюсную особенность, следует пользоваться разложением

$$\langle \mathbf{y} = 0 | \left(H_S + \frac{k^2}{m}\right)^{-1} | \mathbf{x} \rangle = \frac{mk}{2\pi} e^{-kx} \sum_{t=0}^{\infty} L_t^1(x) \frac{1}{t - \frac{2}{3} \frac{m\alpha_s}{k} + 1}.$$

При этом чисто технически, по сравнению с вычислением сдвига уровня, требуется провести еще одно дополнительное суммирование по промежуточным состояниям. Численный анализ показывает, что существенными оказываются несколько первых членов ряда. В табл. 2 представлены результаты для ширин  $e^+e^-$ -распада  ${}^3S_1$ -уровней боттомония и чармония. Во втором, третьем и четвертом столбцах приведены результаты расчетов для боттомония (в дипольном приближении — второй столбец, в инстантонной среде — третий столбец, четвертый — для чисто кулоновской ширины, с вычетом  $\text{Res} \langle \mathbf{x} = 0 | G_S(E) | \mathbf{y} = 0 \rangle = k_n^3/\pi$ ). Шестой и седьмой столбцы отвечают чармонии (в инстантонной среде — шестой столбец, и седьмой для чисто кулоновской ширины).

Таблица 2. Ширины  $e^+e^-$ -распада  ${}^3S_1$ -уровней боттомония и чармония (кэВ)

$n$	$\Gamma_{b\bar{b}}$	$\Gamma_{c\bar{c}}$	$\Gamma_{b\bar{b}}^{\text{Coulomb}}$	$\Gamma_{b\bar{b}}^{\text{exp}}$	$\Gamma_{c\bar{c}}$	$\Gamma_{c\bar{c}}^{\text{Coulomb}}$	$\Gamma_{c\bar{c}}^{\text{exp}}$
1	2,10	0,44	0,17	1,31	1,32	0,22	5,40
2	70,11	2,38	0,02	0,58	5,04	0,03	2,12
3	548,22	11,19	0,006	26,30	19,13	0,008	0,75

Отметим также, что потенциально имеются возможности улучшения фитирования экспериментальных данных путем изменения параметров, описывающих инстантонную среду. Ответ линейно зависит от плотности инстантонной жидкости и слабо квадратично растет с увеличением размера инстантона. В частности оказалось, что добиться заметного улучшения в описании ширины можно только за счет изменения массы кварка, но при этом, однако, обнаруживается существенный проигрыш в описании спектра масс.

Помимо инстантонного коррелятора (9) мы также использовали корреляционную функцию гауссовского вида

$$F(x) = e^{-x^2/\rho^2}.$$

Амплитуда корреляционной функции описывалась тем же параметром  $n$ , что и в инстантонной жидкости, с теми же множителями, приходящими от профильной функции сингулярного инстантона. Оказалось, что добиться приемлемого (аналогичного инстантонному) совпадения спектра масс можно только за счет очень широкой гауссовской функции с  $\rho \sim 2-4 \rho_{\text{inst}}$ , причем амплитуда  $n$  должна быть примерно такой же, как и для случая инстантонной жидкости  $n \sim n_{\text{inst}}$ . Это моделирование подчеркивает чувствительность результата к виду корреляционной функции. В частности, отличительной чертой генерируемого инстантонами коррелятора является наличие существенного логарифмического вклада на малых расстояниях.

В начале работы мы отмечали, что в противоположном предельном случае большого корреляционного кваркового времени адекватным приближением, описывающим воздействие на заряды стохастического поля, является потенциал. Мы можем оценить порядок индуцируемых инстантонами эффектов с помощью уже введенной корреляционной функции. Для простоты обозначений заменим операторы зарядов (анти)кварков их собственными значениями, т. е. будем полагать, что это просто действительные числовые векторы  $\lambda/2 \rightarrow e$ . В данном случае нам будет удобнее оперировать евклидовой формулировкой задачи. Взаимодействие классических цветовых зарядов с полями (анти)инстантонов описывается с помощью следующего действия:

$$S_A = \int dx_4 \sum_{k=1}^N [e_1 \mathbf{A}_4(\mathbf{x}_1, x_4; \gamma_k) + e_2 \mathbf{A}_4(\mathbf{x}_2, x_4; \gamma_k)].$$

Соответственно в производящем функционале мы получаем экспоненту от стохастического действия, которую разложим, используя кластерное разложение

$$\langle \exp(-S) \rangle_{\omega z} = \exp \left( \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \langle \langle S^k \rangle \rangle_{\omega z} \right),$$

где кумулянты определены как  $\langle S_1 \rangle = \langle \langle S_1 \rangle \rangle$ ,  $\langle S_1 S_2 \rangle = \langle S_1 \rangle \langle S_2 \rangle + \langle \langle S_1 S_2 \rangle \rangle, \dots$ . Первый кумулянт получается при усреднении действия и зануляется после усреднения по цветовым ориентациям. Для второго кумулянта получим

$$\begin{aligned} \langle \langle S_A^2 \rangle \rangle &= \int dx_4 \ 2 V_A, \\ V_A &= \frac{1}{2} \frac{4}{g^2} \frac{1}{N_c^2 - 1} n \bar{\rho}^2 \left[ (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \pi^2 + 2 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 F \left( \frac{\mathbf{r}}{\rho} \right) \right]. \end{aligned}$$

Для бесцветного состояния  $\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}$  имеем

$$V_A = \frac{4\mathbf{e}^2}{g^2} \frac{1}{N_c^2 - 1} n \bar{\rho}^2 \left[ \pi^2 - F \left( \frac{\mathbf{r}}{\rho} \right) \right].$$

На больших расстояниях потенциал  $V_A$  стремится к константе порядка нескольких десятков МэВ, которая просто описывает перенормировку массы.

Как отмечалось во введении, в работах [5] было продемонстрировано, что конечные корреляционные времена и длины вакуумных корреляторов ведут в асимптотике к линейному потенциалу. Разумеется, этот вывод неприменим по отношению к инстантонным конфигурациям, которые, как известно, не дают конфайнмента. Техническая причина, по которой не проходят аргументы из цитированных работ, состоит в том, что прямая формула для восстановления потенциала по напряженности поля

$$A_\mu^a(x) = \int_0^1 \alpha d\alpha G_{\rho\mu}(\alpha x) x_\rho \quad (15)$$

несправедлива для инстантона в сингулярной калибровке, хотя формально калибровочное условие Фока–Швингера выполнено,  $x_\mu A_\mu = 0$  (инстантонное решение не удовлетворяет также и модифицированному координатному калибровочному условию  $A_4^a(\mathbf{0}, x_4) = 0$ ,  $\mathbf{x} \mathbf{A}^a(\mathbf{x}, x_4) = 0$ ). Для инстантона же в регулярной калибровке формула (15) выполняется, но в этом случае и корреляционная функция (8) сингулярна.

В заключение сформулируем наш основной вывод, что постановка задачи об определении влияния различных вакуумных компонент на спектр систем тяжелых кваркониев вполне оправдана и в принципе может помочь значительно сузить класс допустимых насыщающих производящий функционал конфигураций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Voloshin M. B.* // Nucl. Phys. B. 1979. V. 154. P. 365;  
*Voloshin M. B.* // Yad. Phys. 1982. V. 36. P. 247.
2. *Leutwyler H.* // Phys. Lett. B. 1981. V. 98. P. 447.
3. *Eichten E., Feinberg F.* // Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 2724.
4. *Marguard U., Dosch H. G.* // Phys. Rev. D. 1989. V. 35. P. 2238;  
*Dosch H. G., Lisenfeld U.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 219. P. 93;  
*Dosch H. G., Simonov Yu. A.* // Z. Phys. 1989. V. 45. P. 147;  
*Kramer A., Dosch H. G., Bertlmann R. A.* // Phys. Lett. B. 1989. V. 223. P. 105;  
*Fortschr. Phys.* 1992. V. 40. P. 93.
5. *Dosch H. G.* // Phys. Lett. B. 1987. V. 190. P. 177;  
*Dosch H. G., Simonov Yu. A.* // Phys. Lett. B. 1988. V. 205. P. 339.
6. *Gromes D.* // Phys. Lett. B. 1982. V. 115. P. 482;  
*Baier V. N., Pinelis Yu. F.* // Nucl. Phys. B. 1982. V. 116. P. 179;  
*Balitsky I. I.* // Nucl. Phys. B. 1985. V. 254. P. 166.
7. *Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.* // Phys. Lett. B. 1977. V. 66. P. 375;  
*Callan C. G., Dashen R., Gross D. J.* // Phys. Rev. D. 1978. V. 17. P. 2717;  
*Schäfer A., Shuryak E. V.* // Rev. Mod. Phys. 1998. V. 70. P. 323.

Получено 26 декабря 2005 г.

Корректор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 13.02.2006.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 0,99. Тираж 415 экз. Заказ № 55224.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)