

P11-2006-107

И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Д. З. Музафаров,
Н. Р. Саркар, И. Сархатов, З. А. Шарипов

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

Амирханов И. В. и др.

P11-2006-107

Исследование краевых задач для сингулярно возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка

Точным и асимптотическим методами исследованы краевые задачи для дифференциальных уравнений высокого порядка с малым параметром ε при старших производных. Проведен сравнительный анализ результатов при уменьшении ε . Установлено существование пограничного слоя для производных от решений. Показано, что при уменьшении ε решения одной краевой задачи (когда на решение $\psi(r)$ исходного уравнения накладываются краевые условия следующим образом: $\psi(0) = 0$, $\psi''(0) = 0$, $\psi^{IV}(0) = 0$, \dots ; $\psi(\infty) = 0$) сходятся к решениям вырожденной задачи (уравнение Шредингера), а для другой сходимости нет.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2006

Amirkhanov I. V. et al.

P11-2006-107

Investigation of Boundary-Value Problems for the Singular Perturbed Differential Equation of High Order

Boundary-value problems for the differential equations of high order with the small parameter ε at higher derivatives are investigated by the exact and asymptotic methods. A comparative analysis of the results is performed at diminution of ε . The existence of a boundary layer for a derivative from the solutions is established. It is shown, that at diminution of ε the solutions of one boundary-value problem (when for the solution $\psi(r)$ of the given equation sets the next boundary conditions: $\psi(0) = 0$, $\psi''(0) = 0$, $\psi^{IV}(0) = 0$, \dots ; $\psi(\infty) = 0$) converge to the solutions of a degenerate problem (Schrödinger equation), and for the other convergence do not exist.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2006

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе, как и в предыдущих исследованиях [2–6], рассматриваем квазипотенциальное уравнение [1] в релятивистском конфигурационном пространстве. В частности, для случая S -волны ($l = 0$) исходное уравнение имеет вид

$$[E - H - V(r)] \psi = 0,$$

$$E = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1 \right], \quad H = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\operatorname{ch} \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right],$$

где H — релятивистский гамильтониан; V — квазипотенциал; ε — малый параметр. Разлагая оператор $\operatorname{ch} \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right)$ в ряд, можно получить дифференциальное уравнение бесконечного порядка. При $\varepsilon \rightarrow 0$ это уравнение переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера.

Если в разложении отбросить члены высших порядков, то получим обыкновенные дифференциальные уравнения конечного порядка

$$\left[E + \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \dots + \frac{2(-1)^{m-1} \varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dr^{2m}} - V(r) \right] \times \\ \times \psi(r) = 0, \quad (1)$$

где $2m$ — порядок уравнений ($m = 2, 3, 4, \dots, M$).

Одной из важных особенностей уравнений (1) является наличие малого параметра при старших производных, т. е. это сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения.

В настоящей работе проводится исследование различных краевых задач для прямоугольной потенциальной ямы

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r \leq r_0, \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \quad (2)$$

1. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 4-ГО ПОРЯДКА

Рассмотрим уравнение (1) при $m = 2$

$$-\mu^2 \frac{d^4 \psi}{dr^4} + \frac{d^2 \psi}{dr^2} + [E - V(r)]\psi(r) = 0; \quad \mu^2 = \frac{\varepsilon^2}{12}, \quad (3)$$

со следующими граничными условиями:

$$\psi(0) = 0; \quad \frac{d\psi(0)}{dr} = 0; \quad \psi|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (4)$$

$$\psi(0) = 0; \quad \frac{d^2 \psi(0)}{dr^2} = 0; \quad \psi|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (5)$$

Далее задачу (3), (4) будем называть первой краевой задачей, а задачу (3), (5) — второй краевой задачей, т. е. будем исследовать два типа краевых задач. Вводя постоянную $\bar{E} > 0$, где $E = -\bar{E}$, $0 \leq \bar{E} \leq V_0$, краевые задачи (3)–(5) перепишем для потенциальной ямы (2) в областях $0 < r \leq r_0$, $r_0 \leq r < \infty$:

$$-\mu^2 \frac{d^4 \psi_I}{dr^4} + \frac{d^2 \psi_I}{dr^2} + (V_0 - \bar{E})\psi_I(r) = 0; \quad 0 < r \leq r_0; \quad (6)$$

$$\psi_I(0) = 0; \quad \frac{d\psi_I(0)}{dr} = 0; \quad (7)$$

$$\psi_I(0) = 0; \quad \frac{d^2 \psi_I(0)}{dr^2} = 0; \quad (8)$$

$$-\mu^2 \frac{d^4 \psi_{II}}{dr^4} + \frac{d^2 \psi_{II}}{dr^2} - \bar{E}\psi_{II}(r) = 0; \quad r_0 \leq r < \infty; \quad (9)$$

$$\psi_{II}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (10)$$

Исследование краевых задач проводится двумя способами: в п. а) «точным» методом (слово «точный» взято в кавычки, так как трансцендентные уравнения для собственных значений решаются численно) и в п. б) асимптотическим методом.

а) Общие решения уравнений (6), (9) имеют вид

$$\psi_I = C_1 \sin k_1 r + C_2 \cos k_1 r + C_3 e^{-k_2 r} + C_4 e^{k_2(r-r_0)}, \quad (11)$$

$$\psi_{II} = \begin{cases} C_5 e^{-\chi_1(r-r_0)} + C_6 e^{-\chi_2(r-r_0)} + C_7 e^{\chi_1(r-r_0)} + C_8 e^{\chi_2(r-r_0)}, & D \geq 0, \\ e^{-\alpha(r-r_0)} [C_5 \sin \beta r + C_6 \cos \beta r] + e^{\alpha(r-r_0)} [C_7 \sin \beta r + C_8 \cos \beta r], & D < 0, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$k_1^2 = \frac{\sqrt{1 + 4\mu^2(V_0 - \bar{E})} - 1}{2\mu^2}, \quad k_2^2 = \frac{\sqrt{1 + 4\mu^2(V_0 - \bar{E})} + 1}{2\mu^2}, \quad D = 1 - 4\mu^2\bar{E},$$

$$\chi_1^2 = \frac{1 - \sqrt{D}}{2\mu^2}, \quad \chi_2^2 = \frac{1 + \sqrt{D}}{2\mu^2}, \quad \alpha^2 = \frac{1 + 2\mu\sqrt{\bar{E}}}{4\mu^2}, \quad \beta^2 = \frac{2\mu\sqrt{\bar{E}} - 1}{4\mu^2},$$

C_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, — неизвестные константы.

Учитывая граничное условие (10) ($C_7 = C_8 = 0$), решение для ψ_{II} перепишем в следующем виде:

$$\psi_{II} = \begin{cases} C_5 e^{-\chi_1(r-r_0)} + C_6 e^{-\chi_2(r-r_0)} & \text{при } D \geq 0, \\ e^{-\alpha(r-r_0)} [C_5 \sin \beta r + C_6 \cos \beta r] & \text{при } D < 0. \end{cases} \quad (13)$$

Для каждой из краевых задач, удовлетворяя граничным условиям при $r = 0$ и условию непрерывности собственных функций и их производных вплоть до производных третьего порядка в точке $r = r_0$, получим систему линейных однородных алгебраических уравнений для неизвестных C_i , $i = 1, 2, \dots, 6$. Тогда собственные значения \bar{E}_n определяются из условия равенства нулю детерминанта матрицы этой системы. После нахождения \bar{E}_n , решая искомую систему с учетом условия нормировки

$$\int_0^{r_0} \psi_I^2 dr + \int_{r_0}^{\infty} \psi_{II}^2 dr = 1, \quad (14)$$

находим значения констант C_i , $i = 1, 2, \dots, 6$.

Анализ полученных результатов приводится в разд. 3.

б) Асимптотический метод исследования краевых задач (6)–(10).

Для поиска решений задач (6)–(10) мы привлекаем методы, применяемые в рамках теории сингулярных возмущений дифференциальных уравнений [7–12].

Асимптотические разложения решений $\psi_I(r, \mu)$, $\psi_{II}(r, \mu)$ будем строить, используя метод пограничных функций [8–12]. Тогда асимптотический ряд для $\psi_I(r, \mu)$ будет иметь вид

$$\psi_I(r, \mu) = \bar{\psi}_I(r, \mu) + \Pi\psi_I(\rho_1, \mu) + Q\psi_I(\rho_2, \mu), \quad (15)$$

где

$$\bar{\psi}_I(r, \mu) = \bar{\psi}_I^0(r) + \mu\bar{\psi}_I^1(r) + \mu^2\bar{\psi}_I^2(r) + \dots \quad (16)$$

— регулярная часть разложения,

$$\Pi\psi_I(\rho_1, \mu) = \Pi\psi_I^0(\rho_1) + \mu\Pi\psi_I^1(\rho_1) + \mu^2\Pi\psi_I^2(\rho_1) + \dots \quad (17)$$

— пограничная функция, описывающая решения на левом краю отрезка $[0, r_0]$,

$$Q\psi_I(\rho_2, \mu) = Q\psi_I^0(\rho_2) + \mu Q\psi_I^1(\rho_2) + \mu^2 Q\psi_I^2(\rho_2) + \dots \quad (18)$$

— пограничная функция, описывающая решения на правом краю отрезка $[0, r_0]$.

Собственные значения \overline{E} также будем искать в виде асимптотического ряда по степеням μ :

$$\overline{E} = \overline{E}^0 + \mu \overline{E}^1 + \mu^2 \overline{E}^2 + \dots \quad (19)$$

Для пограничных функций $\Pi\psi_I^k(\rho_1)$, $Q\psi^k(\rho_2)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, здесь введены новые независимые (растянутые) переменные $\rho_1 = r/\mu$, $\rho_2 = (r - r_0)/\mu$.

На пограничные функции $\Pi\psi_I^k(\rho_1)$, $Q\psi^k(\rho_2)$ накладываются такие дополнительные условия, которые обеспечивают стремление этих функций к нулю вне пограничного слоя, т. е.

$$\Pi\psi_I^k(\rho_1)|_{\rho_1 \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$Q\psi_I^k(\rho_2)|_{\rho_2 \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Аналогичным способом разлагается и функция $\psi_{II}(r, \mu)$. Исследование проводим только в нулевом приближении. После подстановки разложений для $\psi_I(r, \mu)$ и $\psi_{II}(r, \mu)$ в (6) и (9) для нулевого приближения получим

$$\frac{d^2 \overline{\psi}_I^0}{dr^2} + (V_0 - \overline{E}^0) \overline{\psi}_I^0(r) = 0; \quad 0 < r \leq r_0, \quad (22)$$

$$-\frac{d^4 \Pi\psi_I^0}{d\rho_1^4} + \frac{d^2 \Pi\psi_I^0}{d\rho_1^2} = 0, \quad (23)$$

$$-\frac{d^4 Q\psi_I^0}{d\rho_2^4} + \frac{d^2 Q\psi_I^0}{d\rho_2^2} = 0, \quad (24)$$

$$\frac{d^2 \overline{\psi}_{II}^0}{dr^2} - \overline{E}^0 \overline{\psi}_{II}^0(r) = 0; \quad r_0 \leq r < \infty, \quad (25)$$

$$-\frac{d^4 \Pi\psi_{II}^0}{d\rho_2^4} + \frac{d^2 \Pi\psi_{II}^0}{d\rho_2^2} = 0. \quad (26)$$

Общие решения уравнений (22)–(26) имеют вид

$$\overline{\psi}_I^0 = A_1 \sin kr + A_2 \cos kr, \quad k = \sqrt{V_0 - \overline{E}^0}, \quad (27)$$

$$\Pi\psi_I^0 = A_3 e^{-\rho_1} + A_4 e^{\rho_1} + A_5 \rho_1 + A_6, \quad (28)$$

$$Q\psi_I^0 = A_7 e^{-\rho_2} + A_8 e^{\rho_2} + A_9 \rho_2 + A_{10}, \quad (29)$$

$$\overline{\psi}_{II}^0 = A_{11} e^{-\chi(r-r_0)} + A_{12} e^{\chi(r-r_0)}, \quad \chi = \sqrt{\overline{E}^0}, \quad (30)$$

$$P\psi_{II}^0 = A_{13} e^{-\rho_2} + A_{14} e^{\rho_2} + A_{15} \rho_2 + A_{16}. \quad (31)$$

Учитывая условия (20), (21) и $\psi_{II}^0|_{r \rightarrow \infty} = 0$, находим

$$A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_9 = A_{10} = A_{12} = A_{14} = A_{15} = A_{16} = 0.$$

Таким образом, для решения уравнений (6), (9) при асимптотическом методе в нулевом приближении получим выражения

$$\psi_I = A_1 \sin kr + A_2 \cos kr + A_3 e^{-r/\mu} + A_8 e^{(r-r_0)/\mu}, \quad (32)$$

$$\psi_{II} = A_{11} e^{-\chi(r-r_0)} + A_{13} e^{-(r-r_0)/\mu}. \quad (33)$$

Собственные значения \overline{E}^0 и значения оставшихся неизвестных $A_1, A_2, A_3, A_8, A_{11}, A_{13}$ находим так же, как в п. а).

Анализ результатов исследования приводится в разд. 3.

2. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ 6-ГО ПОРЯДКА

Исследуем уравнение (1) при $m = 3$

$$\frac{2}{5} \mu^4 \frac{d^6 \psi}{dr^6} - \mu^2 \frac{d^4 \psi}{dr^4} + \frac{d^2 \psi}{dr^2} + [E - V(r)] \psi(r) = 0 \quad (34)$$

со следующими граничными условиями:

$$\psi(0) = 0; \quad \frac{d\psi(0)}{dr} = 0; \quad \frac{d^2\psi(0)}{dr^2} = 0; \quad \psi|_{r \rightarrow \infty} = 0, \quad (35)$$

$$\psi(0) = 0; \quad \frac{d^2\psi(0)}{dr^2} = 0; \quad \frac{d^4\psi(0)}{dr^4} = 0; \quad \psi|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (36)$$

Задачу (34), (35) будем называть первой краевой задачей, а задачу (34), (36) — второй краевой задачей.

Уравнение и краевые условия (34)–(36), как и в разд. 1, перепишем в областях $0 < r \leq r_0, r_0 \leq r < \infty$

$$\frac{2}{5} \mu^4 \frac{d^6 \psi_I}{dr^6} - \mu^2 \frac{d^4 \psi_I}{dr^4} + \frac{d^2 \psi_I}{dr^2} + (V_0 - \overline{E}) \psi_I(r) = 0; \quad 0 < r \leq r_0, \quad (37)$$

$$\psi_I(0) = 0; \quad \frac{d\psi_I(0)}{dr} = 0; \quad \frac{d^2\psi_I(0)}{dr^2} = 0, \quad (38)$$

$$\psi_I(0) = 0; \quad \frac{d^2\psi_I(0)}{dr^2} = 0; \quad \frac{d^4\psi_I(0)}{dr^4} = 0; \quad (39)$$

$$\frac{2}{5}\mu^4 \frac{d^6\psi_{II}}{dr^6} - \mu^2 \frac{d^4\psi_{II}}{dr^4} + \frac{d^2\psi_{II}}{dr^2} - \bar{E}\psi_{II}(r) = 0; \quad r_0 \leq r < \infty, \quad (40)$$

$$\psi_{II}|_{r \rightarrow \infty} = 0. \quad (41)$$

а) Общие решения уравнений (37), (40) имеют вид

$$\psi_I = C_1 \sin kr + C_2 \cos kr + e^{-\alpha r} (C_3 \sin \beta r + C_4 \cos \beta r) + e^{\alpha(r-r_0)} (C_5 \sin \beta r + C_6 \cos \beta r), \quad (42)$$

$$\psi_{II} = C_7 e^{-\chi_1(r-r_0)} + e^{-\chi_2(r-r_0)} (C_8 \sin \chi_3 r + C_9 \cos \chi_3 r) + e^{\chi_2(r-r_0)} (C_{10} \sin \chi_3 r + C_{11} \cos \chi_3 r), \quad (43)$$

где

$$k^2 = -(u + v + \alpha_1); \quad \alpha_1 = \frac{10}{\varepsilon^2}; \quad u = \sqrt[3]{\sqrt{q^2 + p^3} - q}; \\ v = -\sqrt[3]{\sqrt{q^2 + p^3} + q}; \quad p = \frac{20}{\varepsilon^4};$$

$$q = \frac{800}{\varepsilon^6} + \frac{180}{\varepsilon^4} (V_0 - \bar{E}); \quad A = \alpha_1 - \frac{u + v}{2}; \\ B = \frac{\sqrt{3}}{2} (u - v); \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} + A}{2}};$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{A^2 + B^2} - A}{2}}; \quad \chi_1^2 = -(u_1 + v_1 + \alpha_1); \\ u_1 = \sqrt[3]{\sqrt{q_1^2 + p^3} - q_1}; \quad v_1 = -\sqrt[3]{\sqrt{q_1^2 + p^3} + q_1};$$

$$q_1 = \frac{800}{\varepsilon^6} - \frac{180}{\varepsilon^4} \bar{E}; \quad A_1 = \alpha_1 - \frac{u_1 + v_1}{2}; \\ B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (u_1 - v_1); \quad \chi_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} + A_1}{2}}; \\ \chi_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} - A_1}{2}}.$$

Чтобы удовлетворить условию (41), положим $C_{10} = C_{11} = 0$.

Собственные значения \bar{E} и значения других неизвестных констант C_i ; $i = 1, \dots, 9$, определяются так же, как изложено в разд. 1.

б) Асимптотический метод исследования задач (37)–(41).

Аналогичные разложения, как и в разд. 1, приводят к следующим уравнениям для функций $\bar{\psi}(r, \mu)$, $\Pi\psi(\rho_1, \mu)$ и $Q\psi(\rho_2, \mu)$ в нулевом приближении:

$$\frac{d^2\bar{\psi}_I^0}{dr^2} + (V_0 - \bar{E}^0)\bar{\psi}_I^0(r) = 0; \quad 0 < r \leq r_0, \quad (44)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d^6\Pi\psi_I^0}{d\rho_1^6} - \frac{d^4\Pi\psi_I^0}{d\rho_1^4} + \frac{d^2\Pi\psi_I^0}{d\rho_1^2} = 0, \quad (45)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d^6Q\psi_I^0}{d\rho_2^6} - \frac{d^4Q\psi_I^0}{d\rho_2^4} + \frac{d^2Q\psi_I^0}{d\rho_2^2} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{d^2\bar{\psi}_{II}^0}{dr^2} - \bar{E}^0\bar{\psi}_{II}^0(r) = 0; \quad r_0 \leq r < \infty, \quad (47)$$

$$\frac{2}{5} \frac{d^6\Pi\psi_{II}^0}{d\rho_2^6} - \frac{d^4\Pi\psi_{II}^0}{d\rho_2^4} + \frac{d^2\Pi\psi_{II}^0}{d\rho_2^2} = 0. \quad (48)$$

Находя общие решения уравнений (44)–(48), получаем следующие выражения для $\psi_I(r, \mu)$, $\psi_{II}(r, \mu)$:

$$\begin{aligned} \psi_I = & C_1 \sin kr + C_2 \cos kr + e^{-\alpha \frac{r}{\mu}} \left(C_3 \sin \frac{\beta r}{\mu} + C_4 \cos \frac{\beta r}{\mu} \right) + \\ & + e^{\alpha \frac{r}{\mu}} \left(C_5 \sin \frac{\beta r}{\mu} + C_6 \cos \frac{\beta r}{\mu} \right) + e^{-\alpha \frac{r-r_0}{\mu}} \left(C_7 \sin \frac{\beta r}{\mu} + C_8 \cos \frac{\beta r}{\mu} \right) + \\ & + e^{\alpha \frac{r-r_0}{\mu}} \left(C_9 \sin \frac{\beta r}{\mu} + C_{10} \cos \frac{\beta r}{\mu} \right), \quad (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_{II} = & C_{11} e^{-\chi(r-r_0)} + e^{-\alpha \frac{r-r_0}{\mu}} \left(C_{12} \sin \frac{\beta r}{\mu} + C_{13} \cos \frac{\beta r}{\mu} \right) + \\ & + e^{\alpha \frac{r-r_0}{\mu}} \left(C_{14} \sin \frac{\beta r}{\mu} + C_{15} \cos \frac{\beta r}{\mu} \right), \quad (50) \end{aligned}$$

где

$$k^2 = V_0 - \bar{E}^0; \quad \chi^2 = \bar{E}^0; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{40} + 5}{8}}; \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{40} - 5}{8}}.$$

Учитывая условия (20), (21) и $\psi_{II}^0|_{r \rightarrow \infty} = 0$, находим

$$C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = C_{14} = C_{15} = 0.$$

Значения констант $C_1, C_2, C_3, C_4, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}$ и собственные значения \overline{E}^0 находятся так же, как изложено в разд. 1.

Анализ результатов исследования приводится в следующем разделе.

3. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Решения уравнения Шредингера при $V_0 = 20, r_0 = \pi$ имеют четыре собственных значения E_0, E_1, E_2, E_3 .

Собственные значения уравнения Шредингера и собственные значения первой и второй краевых задач для различных значений ε приведены соответственно в табл. 1, 2.

Таблица 1. Собственные значения уравнения Шредингера и первых краевых задач для уравнений 4-го, 6-го порядков с различными значениями параметра ε

Уравнение и метод решения	ε	E_0	E_1	E_2	E_3
Уравнение Шредингера		-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
Уравнение 4-го порядка, точный метод	0,5	-19,0103	-15,8960	-10,2615	-1,9584
	0,1	-19,1127	-16,4559	-12,0537	-6,0065
	0,01	-19,1278	-16,5223	-12,2249	-6,3528
	0,001	-19,1291	-16,5278	-12,2372	-6,3743
	0,0001	-19,1293	-16,5283	-12,2384	-6,3763
Уравнение 6-го порядка, точный метод	0,5	-19,0285	-15,9477	-10,3043	-1,8278
	0,1	-19,1168	-16,4720	-12,0889	-6,0638
	0,01	-19,1281	-16,5227	-12,2279	-6,3580
	0,001	-19,1291	-16,5275	-12,2366	-6,3733
	0,0001	-19,1293	-16,5283	-12,2383	-6,3762
Уравнение 4-го порядка, асимптотический метод	0,5	-19,0502	-16,2211	-11,5812	-5,3072
	0,1	-19,1142	-16,4685	-12,1064	-6,1526
	0,01	-19,1278	-16,5225	-12,2254	-6,3543
	0,001	-19,1291	-16,5278	-12,2372	-6,3743
	0,0001	-19,1293	-16,5283	-12,2384	-6,3763
Уравнение 6-го порядка, асимптотический метод	0,5	-19,0624	-16,2639	-11,6579	-5,4005
	0,1	-19,1182	-16,4846	-12,1420	-6,2130
	0,01	-19,1281	-16,5238	-12,2284	-6,3594
	0,001	-19,1291	-16,5275	-12,2366	-6,3733
	0,0001	-19,1293	-16,5283	-12,2383	-6,3762

Из обеих таблиц видно, что при уменьшении параметра ε собственные значения с определенной точностью приближаются к собственным значениям уравнения Шредингера; собственные значения верхних состояний (т.е. E_3) сильнее возмущаются при изменении ε по сравнению с нижними состояниями (т.е. E_0); собственные значения, полученные асимптотическим методом, с определенной точностью приближаются к собственным значениям, полученным точным методом.

При $\varepsilon = 0,5$ применение асимптотического метода для уравнений 6-го порядка приводит к появлению дополнительного собственного значения ($E_4 = -0,4116$).

На рис. 1, 2 приведены графики собственных функций для уравнений 4-го и 6-го порядков при $\varepsilon = 0, 1$. Эти решения визуально не отличаются от решения уравнения Шредингера. Однако производные этих решений сильно отличаются друг от друга в окрестности $r = 0$ при разных значениях малого параметра ε .

Таблица 2. Собственные значения уравнения Шредингера и вторых краевых задач уравнений 4-го, 6-го порядков с различными значениями параметра ε

Уравнение и метод решения	ε	E_0	E_1	E_2	E_3
Уравнение Шредингера		-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
Уравнение 4-го порядка, точный метод	0,5	-19,0998	-16,2472	-11,0428	-3,2024
	0,1	-19,1279	-16,5160	-12,1869	-6,2333
	0,01	-19,1293	-16,5283	-12,2380	-6,3751
	0,001	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3765
	0,0001	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
Уравнение 6-го порядка, точный метод	0,5	-19,1482	-16,4518	-11,5104	-3,8889
	0,1	-19,1393	-16,5615	-12,2875	-6,4031
	0,01	-19,1304	-16,5326	-12,2476	-6,3915
	0,001	-19,1293	-16,5284	-12,2386	-6,3767
	0,0001	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3765
Уравнение 4-го порядка, асимптотический метод	0,5	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
	0,1	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
	0,01	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
	0,001	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
	0,0001	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766
$E_4 = -0,4116$ Уравнение 6-го порядка, асимптотический метод	0,5	-19,1760	-16,7118	-12,6370	-7,0389
	0,1	-19,1407	-16,5736	-12,3385	-6,5470
	0,01	-19,1304	-16,5327	-12,2481	-6,3929
	0,001	-19,1293	-16,5284	-12,2386	-6,3767
	0,0001	-19,1293	-16,5284	-12,2385	-6,3766

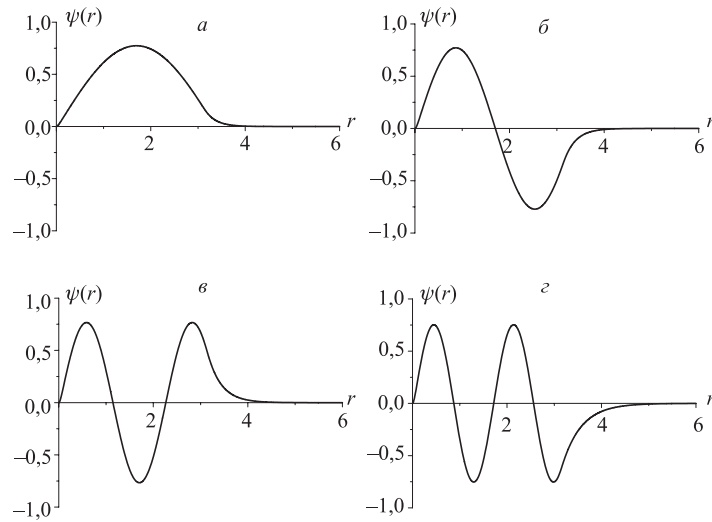


Рис. 1. Решения уравнения 4-го порядка для различных собственных значений E_i , $i = 0, 1, 2, 3$: $a — E_0$; $б — E_1$; $в — E_2$; $г — E_3$ при $\varepsilon = 0,1$

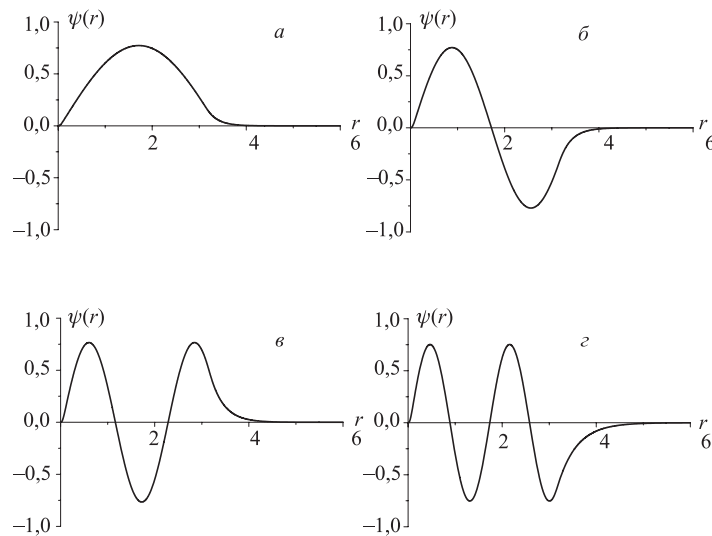


Рис. 2. Решения уравнения 6-го порядка для различных собственных значений E_i , $i = 0, 1, 2, 3$: $a — E_0$; $б — E_1$; $в — E_2$; $г — E_3$ при $\varepsilon = 0,1$

На рис. 3 приведены производные решения первых краевых задач для уравнений 4-го и 6-го порядков в окрестности $r = 0$.

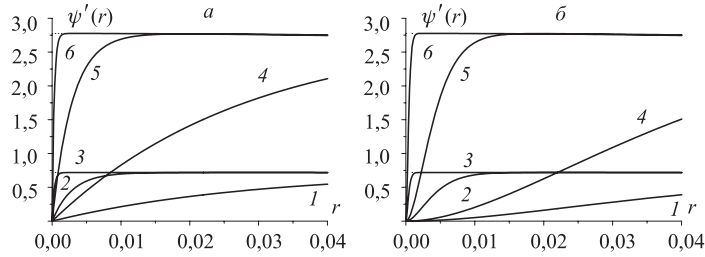


Рис. 3. а) Производные решения уравнения 4-го порядка для E_0 (1 — $\varepsilon = 0, 1$; 2 — $\varepsilon = 0, 01$; 3 — $\varepsilon = 0, 001$) и для E_3 (4 — $\varepsilon = 0, 1$; 5 — $\varepsilon = 0, 01$; 6 — $\varepsilon = 0, 001$). б) То же самое для уравнения 6-го порядка

Аналогичный рисунок, полученный при асимптотическом методе, визуально не отличается от рис. 3.

Анализ этих рисунков показывает, что вблизи границы $r = 0$ для разных ε существуют малые участки, в которых первые производные собственных функций уравнений высокого порядка меняются от нуля до постоянного значения. Чем меньше ε , тем круче и круче меняются эти производные от нуля до константы, т.е. около границы $r = 0$ производные от собственных функций уравнений 4-го и 6-го порядков имеют пограничные слои. Значения этих констант совпадают со значениями производных от решений уравнения Шредингера при $r = 0$ (пунктирные линии).

На рис. 4 приведены вторые производные от решения первой краевой задачи для уравнения 6-го порядка при различных значениях параметра ε

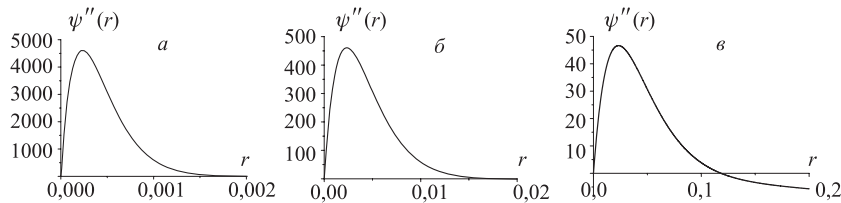


Рис. 4. Вторая производная решения первой краевой задачи уравнения 6-го порядка для E_3 (а — $\varepsilon = 0, 001$; б — $\varepsilon = 0, 01$; в — $\varepsilon = 0, 1$)

для собственного значения E_3 . Из рис. 4 видно, что вторые производные от решений уравнения 6-го порядка тоже имеют пограничные слои.

В табл. 3, 4 приведены максимальные отклонения собственных функций и их производных от решения уравнения Шредингера (т.е. $\max|\psi - \psi_{Ш}|$ и $\max|\psi' - \psi'_{Ш}|$ при $0 < r < 2\pi$) для первой краевой задачи. Аналогичные результаты приведены в табл. 5, 6 для второй краевой задачи.

Таблица 3. Максимальные отклонения решений первой краевой задачи для уравнения 4-го порядка от решений уравнения Шредингера (интервал изменения аргумента $0 \leq r \leq 2\pi$, r_{\max} — координата точки максимального отклонения)

Уравнение и метод решения	ε	$\max \psi - \psi_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	$\max \psi' - \psi'_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	n
Уравнение 4-го порядка, точный метод	0,1	$1,94183 \cdot 10^{-2}$	$1,119380 \cdot 10^{-1}$	0,718804	0,000	0
	0,01	$2,05687 \cdot 10^{-3}$	$1,88495 \cdot 10^{-2}$	0,718804	0,000	
	0,001	$2,07233 \cdot 10^{-4}$	$3,14159 \cdot 10^{-3}$	0,718804	0,000	
	0,1	$3,81394 \cdot 10^{-2}$	$1,09955 \cdot 10^{-1}$	1,43164	0,000	1
		0,01	$4,09529 \cdot 10^{-3}$	$1,88495 \cdot 10^{-2}$	1,43164	
		0,001	$4,12745 \cdot 10^{-4}$	$3,14159 \cdot 10^{-3}$	1,43164	
	0,1	$5,56484 \cdot 10^{-2}$	$1,00530 \cdot 10^{-1}$	2,21814	0,000	2
		0,01	$6,08480 \cdot 10^{-3}$	$1,88495 \cdot 10^{-2}$	2,21814	
		0,001	$6,13555 \cdot 10^{-4}$	$3,14159 \cdot 10^{-3}$	2,21814	
	0,1	$7,13448 \cdot 10^{-2}$	$9,32005 \cdot 10^{-2}$	2,77526	0,000	3
		0,01	$7,93355 \cdot 10^{-3}$	$1,78023 \cdot 10^{-2}$	2,77526	
		0,001	$8,00193 \cdot 10^{-4}$	$3,14159 \cdot 10^{-3}$	2,77526	
Уравнение 4-го порядка, асимптотический метод	0,1	$1,94714 \cdot 10^{-2}$	$1,20427 \cdot 10^{-1}$	0,718804	0,000	0
	0,01	$2,05696 \cdot 10^{-3}$	$1,88495 \cdot 10^{-2}$	0,718804	0,000	
	0,001	$2,07233 \cdot 10^{-4}$	$3,14159 \cdot 10^{-3}$	0,718804	0,000	
	0,1	$3,82546 \cdot 10^{-2}$	$1,11002 \cdot 10^{-1}$	1,43164	0,000	1
		0,01	$4,09549 \cdot 10^{-3}$	$1,88495 \cdot 10^{-2}$	1,43164	
		0,001	$4,12745 \cdot 10^{-4}$	$3,141590 \cdot 10^{-3}$	1,43164	
	0,1	$5,58385 \cdot 10^{-2}$	$1,00530 \cdot 10^{-1}$	2,21814	0,000	2
		0,01	$6,08509 \cdot 10^{-3}$	$1,88495 \cdot 10^{-2}$	2,21814	
		0,001	$6,13555 \cdot 10^{-4}$	$3,14159 \cdot 10^{-3}$	2,21814	
	0,1	$7,15148 \cdot 10^{-2}$	$9,32005 \cdot 10^{-2}$	2,77526	0,000	3
		0,01	$7,93365 \cdot 10^{-3}$	$1,78023 \cdot 10^{-2}$	2,77526	
		0,001	$8,00192 \cdot 10^{-4}$	$3,14159 \cdot 10^{-3}$	2,77526	

Анализ результатов из табл. 3, 4 показывает, что при уменьшении значения параметра ε все собственные функции первой краевой задачи для уравнений 4-го и 6-го порядков с определенной точностью сходятся к решению

Таблица 4. Максимальные отклонения решений первой краевой задачи для уравнения 6-го порядка от решений уравнения Шредингера (интервал изменения аргумента $0 \leq r \leq 2\pi$, r_{\max} — координата точки максимального отклонения)

Уравнение и метод решения	ε	$\max \psi - \psi_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	$\max \psi' - \psi'_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	n	
Уравнение 6-го порядка, точный метод	0,1	$3,02828 \cdot 10^{-2}$	$1,26710 \cdot 10^{-1}$	0,718804	0,000	0	
	0,01	$3,11299 \cdot 10^{-3}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	0,718804	0,000		
	0,001	$3,12101 \cdot 10^{-4}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	0,718804	0,000		
	0,1	$5,95036 \cdot 10^{-2}$	$1,16238 \cdot 10^{-1}$	1,43164	0,000	1	
		0,01	$6,19858 \cdot 10^{-3}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	1,43164		0,000
		0,001	$6,21610 \cdot 10^{-4}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	1,43164		0,000
	0,1	$8,68647 \cdot 10^{-2}$	$1,06814 \cdot 10^{-1}$	2,21814	0,000	2	
		0,01	$9,21068 \cdot 10^{-3}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	2,21814		0,000
		0,001	$9,24037 \cdot 10^{-4}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	2,21814		0,000
	0,1	$1,11169 \cdot 10^{-1}$	$9,94837 \cdot 10^{-2}$	2,77526	0,000	3	
		0,01	$1,20073 \cdot 10^{-2}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	2,77526		0,000
		0,001	$1,20508 \cdot 10^{-3}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	2,77526		0,000
Уравнение 6-го порядка, асимптотический метод	0,1	$3,03317 \cdot 10^{-2}$	$1,27758 \cdot 10^{-1}$	0,718804	0,000	0	
	0,01	$3,11307 \cdot 10^{-3}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	0,718804	0,000		
	0,001	$3,12101 \cdot 10^{-4}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	0,718804	0,000		
	0,1	$5,96054 \cdot 10^{-2}$	$1,16238 \cdot 10^{-1}$	1,43164	0,000	1	
		0,01	$6,19871 \cdot 10^{-3}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	1,43164		0,000
		0,001	$6,21610 \cdot 10^{-4}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	1,43164		0,000
	0,1	$8,70339 \cdot 10^{-2}$	$1,06814 \cdot 10^{-1}$	2,21814	0,000	2	
		0,01	$9,21084 \cdot 10^{-3}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	2,21814		0,000
		0,001	$9,24037 \cdot 10^{-4}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	2,21814		0,000
	0,1	$1,11134 \cdot 10^{-1}$	$9,94837 \cdot 10^{-2}$	2,77526	0,000	3	
		0,01	$1,20072 \cdot 10^{-2}$	$1,67551 \cdot 10^{-2}$	2,77526		0,000
		0,001	$1,20508 \cdot 10^{-3}$	$2,09439 \cdot 10^{-3}$	2,77526		0,000

уравнения Шредингера, а производные этих функций имеют максимальные отклонения в точке $r = 0$, не стремящиеся к нулю при уменьшении ε . Из табл. 5, 6 видно, что для второй краевой задачи при уменьшении значения па-

Таблица 5. Максимальные отклонения решений второй краевой задачи для уравнения 4-го порядка от решений уравнения Шредингера (интервал изменения аргумента $0 \leq r \leq 2\pi$, r_{\max} — координата точки максимального отклонения)

Уравнение и метод решения	ε	$\max \psi - \psi_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	$\max \psi' - \psi'_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	n	
Уравнение 4-го порядка, точный метод	0,1	$9,31150 \cdot 10^{-4}$	3,19081	$4,06681 \cdot 10^{-2}$	3,14159	0	
	0,01	$1,42755 \cdot 10^{-5}$	3,15206	$4,57485 \cdot 10^{-3}$	3,14159		
	0,001	$1,59666 \cdot 10^{-7}$	3,14368	$4,63331 \cdot 10^{-4}$	3,14159		
		0,1	$2,45640 \cdot 10^{-3}$	3,19081	$8,11082 \cdot 10^{-2}$	3,14159	1
		0,01	$3,44439 \cdot 10^{-5}$	3,15206	$9,11513 \cdot 10^{-3}$	3,14159	
		0,001	$3,70242 \cdot 10^{-7}$	3,14368	$9,22847 \cdot 10^{-4}$	3,14159	
		0,1	$5,18089 \cdot 10^{-3}$	3,19499	$1,23637 \cdot 10^{-1}$	3,14159	2
		0,01	$6,55213 \cdot 10^{-5}$	3,15311	$1,35862 \cdot 10^{-2}$	3,14159	
		0,001	$6,86551 \cdot 10^{-7}$	3,14368	$1,37219 \cdot 10^{-3}$	3,14159	
		0,1	$9,71479 \cdot 10^{-3}$	3,21169	$1,78995 \cdot 10^{-1}$	3,14159	3
		0,01	$1,07098 \cdot 10^{-4}$	3,15520	$1,79066 \cdot 10^{-2}$	3,14159	
		0,001	$1,09221 \cdot 10^{-6}$	3,14368	$1,79134 \cdot 10^{-3}$	3,14159	
Уравнение 4-го порядка, асимптотический метод	0,1	$1,90973 \cdot 10^{-3}$	3,19081	$4,12304 \cdot 10^{-2}$	3,21908	0	
	0,01	$2,51616 \cdot 10^{-5}$	3,15206	$4,58236 \cdot 10^{-3}$	3,15416		
	0,001	$2,69463 \cdot 10^{-7}$	3,14368	$4,63408 \cdot 10^{-4}$	3,14159		
		0,1	$3,82389 \cdot 10^{-3}$	3,19290	$8,29663 \cdot 10^{-2}$	3,22327	1
		0,01	$4,97810 \cdot 10^{-5}$	3,15311	$9,13671 \cdot 10^{-3}$	3,15416	
		0,001	$5,24347 \cdot 10^{-7}$	3,14368	$9,23066 \cdot 10^{-4}$	3,14159	
		0,1	$5,73594 \cdot 10^{-3}$	3,19709	$1,25613 \cdot 10^{-1}$	3,14159	2
		0,01	$7,29797 \cdot 10^{-5}$	3,15311	$1,36087 \cdot 10^{-2}$	3,14159	
		0,001	$7,62129 \cdot 10^{-7}$	3,14368	$1,37242 \cdot 10^{-3}$	3,14159	
		0,1	$7,55078 \cdot 10^{-3}$	3,20651	$1,68767 \cdot 10^{-1}$	3,14159	3
		0,01	$9,18936 \cdot 10^{-5}$	3,15415	$1,78043 \cdot 10^{-2}$	3,14159	
		0,001	$9,53778 \cdot 10^{-7}$	3,14368	$1,79031 \cdot 10^{-3}$	3,14159	

раметра ε все собственные функции и их первые производные с определенной точностью совпадают с решением уравнения Шредингера (т.е. отсутствует пограничный слой).

Таблица 6. Максимальные отклонения решений второй краевой задачи для уравнения 6-го порядка от решений уравнения Шредингера (интервал изменения аргумента $0 \leq r \leq 2\pi$, r_{\max} — координата точки максимального отклонения)

Уравнение и метод решения	ε	$\max \psi - \psi_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	$\max \psi' - \psi'_{\text{Ш}} $ $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	n	
Уравнение 6-го порядка, точный метод	0,1	$1,32943 \cdot 10^{-2}$	3,15206	$4,77927 \cdot 10^{-2}$	3,21803	0	
	0,01	$1,32934 \cdot 10^{-3}$	3,14263	$5,63327 \cdot 10^{-3}$	3,15415		
	0,001	$1,11176 \cdot 10^{-5}$	3,14159	$1,99137 \cdot 10^{-4}$	3,14159		
	0,1	$2,49372 \cdot 10^{-2}$	3,15625	$8,48629 \cdot 10^{-2}$	3,22222	1	
		0,01	$2,45026 \cdot 10^{-3}$	3,14368	$9,80163 \cdot 10^{-3}$		3,15415
		0,001	$2,05272 \cdot 10^{-5}$	3,14159	$4,09477 \cdot 10^{-4}$		3,14159
	0,1	$3,27744 \cdot 10^{-2}$	3,16463	$1,33937 \cdot 10^{-1}$	3,14159	2	
		0,01	$3,14455 \cdot 10^{-3}$	3,14368	$1,32316 \cdot 10^{-2}$		3,14159
		0,001	$2,60368 \cdot 10^{-5}$	3,14159	$6,39620 \cdot 10^{-4}$		3,14159
	0,1	$4,71147 \cdot 10^{-2}$	2,60647	$2,48653 \cdot 10^{-1}$	3,14159	3	
		0,01	$4,33569 \cdot 10^{-3}$	2,59390	$2,33250 \cdot 10^{-2}$		3,14159
		0,001	$3,65744 \cdot 10^{-5}$	2,59286	$8,85644 \cdot 10^{-4}$		3,14159
Уравнение 6-го порядка, асимптотический метод	0,1	$1,42567 \cdot 10^{-2}$	3,15206	$4,78064 \cdot 10^{-2}$	3,21908	0	
	0,01	$1,33972 \cdot 10^{-3}$	3,14263	$5,62582 \cdot 10^{-3}$	3,15415		
	0,001	$1,12164 \cdot 10^{-5}$	3,14159	$1,99277 \cdot 10^{-4}$	3,14159		
	0,1	$2,62537 \cdot 10^{-2}$	3,15625	$8,40445 \cdot 10^{-2}$	3,22327	1	
		0,01	$2,46206 \cdot 10^{-3}$	3,14368	$9,76985 \cdot 10^{-3}$		3,15415
		0,001	$2,05552 \cdot 10^{-5}$	3,14159	$4,09561 \cdot 10^{-4}$		3,14159
	0,1	$3,34111 \cdot 10^{-2}$	3,16463	$1,36086 \cdot 10^{-1}$	3,14159	2	
		0,01	$3,10246 \cdot 10^{-3}$	3,14368	$1,32310 \cdot 10^{-2}$		3,14159
		0,001	$2,57594 \cdot 10^{-5}$	3,14159	$6,39023 \cdot 10^{-4}$		3,14159
	0,1	$4,50923 \cdot 10^{-2}$	2,60438	$2,40480 \cdot 10^{-1}$	3,14159	3	
		0,01	$4,28817 \cdot 10^{-3}$	2,59390	$2,31390 \cdot 10^{-2}$		3,14159
		0,001	$3,54641 \cdot 10^{-5}$	2,59181	$8,81476 \cdot 10^{-4}$		3,14159

Для второй краевой задачи при малых значениях параметра ε не только собственные значения, но и собственные функции вместе с их производными,

Таблица 7. Невязки δ_6 , δ_4 для первой краевой задачи

Название решения	ε	δ_6 $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	δ_4 $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	n
Уравнение 6-го и 4-го порядков, точный метод	0,1	$6,94000 \cdot 10^{-13}$	1,72368	$3,71924 \cdot 10^{-14}$	1,75693	0
	0,01	$4,33042 \cdot 10^{-11}$	1,68808	$2,89102 \cdot 10^{-13}$	3,14162	
	0,001	$8,23698 \cdot 10^{-9}$	1,68389	$1,22460 \cdot 10^{-10}$	1,68427	
	0,1	$1,25233 \cdot 10^{-13}$	3,14263	$2,69496 \cdot 10^{-14}$	0,00034	1
	0,01	$5,03588 \cdot 10^{-11}$	2,53317	$3,10196 \cdot 10^{-12}$	2,53614	
	0,001	$1,01507 \cdot 10^{-8}$	2,52898	$1,88336 \cdot 10^{-10}$	2,53011	
	0,1	$4,42312 \cdot 10^{-13}$	2,84942	$5,07105 \cdot 10^{-14}$	0,00034	2
	0,01	$4,51532 \cdot 10^{-11}$	3,14263	$2,43272 \cdot 10^{-12}$	2,82064	
	0,001	$4,06258 \cdot 10^{-9}$	3,14263	$4,19664 \cdot 10^{-11}$	3,14162	
	0,1	$3,97459 \cdot 10^{-13}$	3,14368	$6,21724 \cdot 10^{-14}$	2,97851	3
	0,01	$9,93932 \cdot 10^{-11}$	2,98241	$2,08721 \cdot 10^{-12}$	2,98360	
	0,001	$2,13469 \cdot 10^{-9}$	2,97927	$1,51686 \cdot 10^{-10}$	3,14162	
Уравнение 6-го и 4-го порядков, асимптотический метод	0,1	$5,45574 \cdot 10^{-2}$	3,14263	$2,07292 \cdot 10^{-2}$	6,28318	0
	0,01	$2,08675 \cdot 10^{-3}$	0,00105	$1,81206 \cdot 10^{-3}$	0,00000	
	0,001	$5,01145 \cdot 10^{-6}$	0,00105	$1,80717 \cdot 10^{-4}$	0,00000	
	0,1	$2,15665 \cdot 10^{-1}$	0,00105	$1,48001 \cdot 10^{-1}$	0,00000	1
	0,01	$1,65716 \cdot 10^{-2}$	0,00105	$4,78226 \cdot 10^{-2}$	0,00000	
	0,001	$3,97971 \cdot 10^{-5}$	0,00105	$1,43514 \cdot 10^{-3}$	0,00000	
	0,1	$7,17595 \cdot 10^{-1}$	0,00105	$4,92307 \cdot 10^{-1}$	0,00000	2
	0,01	$5,50733 \cdot 10^{-2}$	0,00105	$1,09449 \cdot 10^{-1}$	0,00000	
	0,001	$1,32257 \cdot 10^{-4}$	0,00105	$1,09173 \cdot 10^{-2}$	0,00000	
	0,1	$1,64365 \cdot 10^0$	0,00105	$1,12675 \cdot 10^0$	0,00000	3
	0,01	$1,26050 \cdot 10^{-1}$	0,00105	$1,09449 \cdot 10^{-1}$	0,00000	
	0,001	$3,02719 \cdot 10^{-4}$	0,00105	$1,09173 \cdot 10^{-2}$	0,00000	

полученными асимптотическим и точным методами, с определенной точностью совпадают с решениями уравнения Шредингера.

В табл. 7, 8 приведены невязки δ_6 , δ_4 для первой и второй краевых задач в зависимости от порядков уравнений, методов их решений и значений малого параметра ε . Здесь δ_6 , δ_4 — максимальные значения невязок соответственно

Таблица 8. Невязки δ_6 , δ_4 для второй краевой задачи

Название решения	ε	δ_6 $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	δ_4 $0 \leq r \leq 2\pi$	r_{\max}	n
Уравнение 6-го и 4-го порядков, точный метод	0,1	$4,43312 \cdot 10^{-13}$	1,71007	$1,75525 \cdot 10^{-14}$	1,70280	0
	0,01	$3,92090 \cdot 10^{-11}$	3,14263	$1,17628 \cdot 10^{-12}$	1,69121	
	0,001	$7,40734 \cdot 10^{-9}$	1,68389	$2,98372 \cdot 10^{-10}$	1,68354	
	0,1	$2,34923 \cdot 10^{-13}$	2,57086	$2,75335 \cdot 10^{-14}$	2,55006	1
	0,01	$1,13557 \cdot 10^{-10}$	0,84299	$3,97859 \cdot 10^{-12}$	2,53224	
	0,001	$9,86416 \cdot 10^{-9}$	0,84294	$3,01341 \cdot 10^{-10}$	2,52964	
	0,1	$4,71622 \cdot 10^{-13}$	3,14263	$4,26325 \cdot 10^{-14}$	2,82818	2
	0,01	$4,80087 \cdot 10^{-11}$	2,82219	$4,28901 \cdot 10^{-12}$	2,82209	
	0,001	$1,06709 \cdot 10^{-9}$	3,14263	$1,40076 \cdot 10^{-10}$	2,81989	
	0,1	$8,33111 \cdot 10^{-13}$	3,01117	$4,08562 \cdot 10^{-14}$	3,05243	3
	0,01	$3,92090 \cdot 10^{-11}$	3,14263	$9,90318 \cdot 10^{-13}$	3,14171	
	0,001	$6,61483 \cdot 10^{-9}$	2,12790	$2,11366 \cdot 10^{-10}$	2,97917	
Уравнение 6-го и 4-го порядков, асимптотический метод	0,1	$5,36424 \cdot 10^{-2}$	3,14263	$2,05178 \cdot 10^{-2}$	6,28318	0
	0,01	$4,92053 \cdot 10^{-4}$	3,14263	$2,30717 \cdot 10^{-4}$	6,28318	
	0,001	$4,87927 \cdot 10^{-6}$	3,14263	$2,33589 \cdot 10^{-6}$	6,28318	
	0,1	$7,96545 \cdot 10^{-2}$	3,14263	$2,41493 \cdot 10^{-2}$	6,28318	1
	0,01	$7,31714 \cdot 10^{-4}$	3,14263	$2,82742 \cdot 10^{-4}$	6,28318	
	0,001	$7,25741 \cdot 10^{-6}$	3,14263	$2,87341 \cdot 10^{-6}$	6,28318	
	0,1	$6,49430 \cdot 10^{-2}$	3,14263	$3,83259 \cdot 10^{-2}$	1,69149	2
	0,01	$5,96637 \cdot 10^{-4}$	3,14263	$3,83467 \cdot 10^{-4}$	1,69149	
	0,001	$5,91840 \cdot 10^{-6}$	3,14263	$3,83469 \cdot 10^{-6}$	1,69149	
	0,1	$1,13588 \cdot 10^{-1}$	2,99917	$1,16142 \cdot 10^{-1}$	2,12789	3
	0,01	$1,15991 \cdot 10^{-3}$	1,27758	$1,16290 \cdot 10^{-3}$	2,97904	
	0,001	$1,16289 \cdot 10^{-5}$	2,12790	$1,16292 \cdot 10^{-5}$	2,97904	

для уравнений 6-го, 4-го порядков; r_{\max} — координаты точек максимальных значений невязок. Видно, что при уменьшении ε невязки решений, полученных по точному методу, ухудшаются и меняются в интервале от 10^{-14} до 10^{-8} , а по асимптотическому методу, наоборот, улучшаются и меняются от 10^0 до 10^{-6} .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы краевые задачи для сингулярно возмущенных уравнений 4-го и 6-го порядков асимптотическим и точным методами. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Решения первых краевых задач для уравнений 4-го и 6-го порядков при малых значениях ε не сходятся к решениям уравнения Шредингера (собственные функции и собственные значения с определенной точностью совпадают, а производные от собственных функций имеют пограничные слои).

2. Решения вторых краевых задач для уравнений 4-го и 6-го порядков при малых значениях ε с определенной точностью совпадают с решениями уравнения Шредингера (как собственные функции с их производными, так и собственные значения).

3. При малых ε результаты асимптотического метода также совпадают с результатами точного метода.

4. Собственные значения верхних состояний (т. е. E_3) сильнее возмущаются при изменении ε по сравнению с нижними состояниями (т. е. E_0).

Работа поддержана РФФИ, гранты № 05-01-00645-а, № 04-01-00490.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кадышевский В. Г., Мир-Касимов Р. М., Скачков Н. Б. // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, вып. 3. С. 637.
2. Amirkhanov I. V., Konnova S. V., Zhidkov E. P. // Comp. Phys. Commun. 2000. V. 126. P. 12–15.
3. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В. Сообщение ОИЯИ Р11-2000-54. Дубна, 2000.
4. Амирханов И. В. и др. // Дифференциальные уравнения. 2000. Т. 37, № 1. С. 83–90.
5. Амирханов И. В. и др. // Математическое моделирование. 2003. Т. 15, № 9. С. 3–16.
6. Амирханов И. В. и др. Сообщение ОИЯИ Р11-2004-147. Дубна, 2004.
7. Тихонов А. Н. // Мат. сб. 1952. Т. 31(73), вып. 3. С. 575–586.
8. Вишик М. И., Люстерник Л. А. // УМН. 1957. Т. 12, вып. 5(77). С. 3–122.
9. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. С. 272.
10. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.

11. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Федотова Е. В.* // ЖВМ и МФ. 1987. Т. 27, № 2. С. 226–236.
12. *Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н., Полежаева Е. В.* // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29, № 7. С. 1023–1035.

Получено 20 июля 2006 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 06.10.2006.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,19. Уч.-изд. л. 1,45. Тираж 315 экз. Заказ № 55499.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/