

P11-2008-103

И. В. Амирханов*, Д. З. Музафаров Н. Р. Саркар, И. Сархатов,
З. А. Шарипов

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ
ДЛЯ СИНГУЛЯРНО-ВОЗМУЩЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В ПОЛЕ КУЛОНОВСКОГО
ПОТЕНЦИАЛА

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

*E-mail: camir@jinr.ru

Амирханов И. В. и др.

P11-2008-103

Исследование решений краевых задач
для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения
высокого порядка в поле кулоновского потенциала

В работе предложен алгоритм нахождения собственных значений и собственных функций для одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка с малым параметром μ при старшей производной с кулоновским потенциалом. Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE. При $\mu \rightarrow 0$ это уравнение переходит в уравнение Шредингера. Проведены исследования собственных значений и собственных функций при различных значениях μ . При фиксированном значении μ найдены два типа решения: одно при $\mu \rightarrow 0$ переходит в решение уравнения Шредингера, а другое становится пограничным.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2008

Amirkhanov I. V. et al.

P11-2008-103

Investigation of Solutions of Boundary Problems
for Singular-Perturbed Differential Equation of Fourth Order
in a Field of Coulomb Potential

In the paper an algorithm to find eigenvalues and eigenfunctions for one boundary problem for the equation of 4th order with a small parameter at the highest derivative with Coulomb potential is proposed. The algorithm is implemented using the symbolic calculations MAPLE. At $\mu \rightarrow 0$, this equation converts to the Schrodinger equation. The investigations of eigenvalues and eigenfunctions with different values of μ have been conducted. In the fixed value of μ two types of solutions have been found. At $\mu \rightarrow 0$, one of these solutions converts to the solution of the Schrodinger equation, and the other comes into boundary layer.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов, так называемых кваркониев, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка. Тяжелые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой - решение уравнения Шредингера на собственные значения [1]. При описании легких мезонов возникает необходимость учета релятивистских эффектов.

Релятивистское обобщение потенциальной модели кваркония приводит к решению спектральной задачи для уравнения Бете–Солпитера и различных вариантов квазипотенциальных уравнений [2–6].

В данной работе так же как и в предыдущих работах [7–13], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [3, 4]. В частном случае для S -волны, оно имеет вид

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)] \Psi(r) = 0, \quad (1)$$

где

$$E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1 \right] = \frac{2q^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1}, \quad (2)$$

$$H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[ch \left(i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right], \quad (3)$$

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{r} \text{ — кулоновский потенциал,} \quad (4)$$

(далее мы полагаем $Z = 1$, $e^2 = 1$), ε — малый параметр. При $\varepsilon \rightarrow 0$, $E_\varepsilon \rightarrow q^2$, $H_\varepsilon \rightarrow \frac{d^2}{dr^2}$, т. е. уравнение (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шредингера

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - V(r) + q^2 \right] \Psi(r) = 0. \quad (5)$$

В уравнении (1), разлагая оператор $ch\left(i\varepsilon\frac{d}{dr}\right)$ в ряд, можно получить следующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка [14]:

$$\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \dots\right) - V(r)\right]\Psi(r) = 0. \quad (6)$$

Если в уравнении (6) отбросить члены высших порядков, то в результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение конечного порядка

$$\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \dots + \frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\right) - V(r)\right]\psi(r) = 0, \quad (7)$$

где $2m$ — порядок уравнений ($m = 2, 3, 4, \dots, M$).

Одной из особенностей данного уравнения является наличие малого параметра при старших производных, т. е. это сингулярно-возмущенное дифференциальное уравнение. Задача Коши для таких систем дифференциальных уравнений была рассмотрена в работах [15, 16]. Краевые задачи для сингулярно-возмущенных уравнений являются предметом изучения широкого круга работ [17, 18].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе проводится исследование решений одной краевой задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка ($m = 2$)

$$\left[-\mu^2\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \alpha^2 - V(r)\right]\Psi(r) = 0 \quad (8)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= 0, & \Psi(r \rightarrow \infty) &= 0, \\ \Psi'(0) &= 1, & \Psi'(r \rightarrow \infty) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha^2 = -E_\varepsilon$ — собственное значение; $\mu = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}}$ — малый параметр.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ

Решение с n — узлами ищем в виде

$$\Psi(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r)(1 - c_3 r) \dots (1 - c_n r) \exp(-\kappa r), \quad (10)$$

где $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ — неизвестные постоянные.

Подставляя это выражение в уравнение (8) и приравнивая слагаемые при одинаковых степенях r , получаем систему n уравнений для нахождения $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, и уравнения для нахождения собственных значений, а именно

$$2\mu^2 k^3 - k + \frac{1}{n+1} = 0, \quad (11)$$

$$\mu^2 k^4 - k^2 + \alpha^2 = 0. \quad (12)$$

При $n = 0$ — это безузловое решение, $n = 1$ — решение с одним узлом, $n = 2$ — решение с двумя узлами и т. д.

Таким образом, алгоритм нахождения собственных функций и собственных значений краевой задачи (8, 9) сводится к следующему:

1. Для заданных значений μ и n ищем действительные и положительные (для удовлетворения граничному условию при $r \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы $k > 0$) решения уравнения (11).
2. Подставляя найденные решения k в уравнение (12), находим собственные значения α^2 . Так как из постановки задачи следует, что $\alpha^2 > 0$, то для этого должно выполняться условие $\mu k \leq 1$.
3. Решая систему уравнений для $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$, находим ненормированное решение (10), которое удовлетворит граничным условиям (9).
4. Далее мы будем изучать свойства нормированных решений. Для этого функцию Ψ умножаем на константу A , которая находится из условия $A = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \Psi^2 dr}}$. При этом граничное условие $\Psi'(r) = 1$ переходит в $\Psi'(r) = A$.

Действительные и положительные решения уравнения (11) существуют только при определенных ограничениях, накладываемых на параметр задачи μ . Для нахождения этого условия уравнение (11) перепишем в виде

$$k^3 + 3pk + 2q = 0, \quad (13)$$

где $p = -\frac{1}{6\mu^2}$, $q = \frac{1}{4\mu^2(n+1)}$.

Уравнение (13) имеет три различных действительных решения, причем два положительных решения $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, если его дискриминант $D = q^2 + p^3 < 0$ [19]. Из этого условия получаем ограничения на параметр

$$0 < \mu < \frac{\sqrt{2}(n+1)}{3\sqrt{3}}. \quad (14)$$

Таким образом, для фиксированного значения μ в интервале (14) получаем два положительных решения уравнения (13). Все вышеперечисленные пункты алгоритма выполнены с использованием системы символьных вычислений MAPLE.

Подробно рассмотрим следующие частные случаи и проанализируем свойства полученных решений.

Безузловое решение. Решение ищем в виде

$$\Psi(r) = r \exp(-kr). \quad (15)$$

Система уравнений (10, 11) будет иметь вид ($n = 0$)

$$2\mu^2 k^3 - k + 1 = 0, \quad (16)$$

$$\mu^2 k^4 - k^2 + \alpha^2 = 0. \quad (17)$$

Уравнений (16) имеет два положительных решения, когда параметр μ меняется в интервале $0 < \mu < \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ (см. (14)). Выясним, как меняются свойства решений при $\mu \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. При $\mu = 10^{-4}$.

$$\kappa_1 = 1,0000000200, \quad \alpha_1^2 = 1,0000000300; \quad A_1 = 2,0000000600;$$

$$\kappa_2 = 7070,567759, \quad \alpha_2^2 = 0,2499999950 \cdot 10^8; \quad A_1 = 0,1189080969 \cdot 10^7.$$

На рис. 1 приведены эти номированные решения. Решение с k_1 , практически совпадает с решением уравнения Шредингера, а другое решение с k_2 является погранслойным (т.е. функция отлична от нуля в окрестности начала координат $r = 0$).

При $\mu \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, т.е. например, при $\mu = .2721655268$

$$\kappa_1 = 1,500027387, \quad \alpha_1^2 = 1,250013694; \quad A_1 = 3,674335240;$$

$$\kappa_2 = 1,499972615, \quad \alpha_2^2 = 1,249986308; \quad A_2 = 3,674133994.$$

Отсюда видно, что оба решения стремятся друг к другу.

Решение с одним узлом. Решение ищем в виде

$$\Psi(r) = r(1 - c_1 r) \exp(-kr). \quad (18)$$

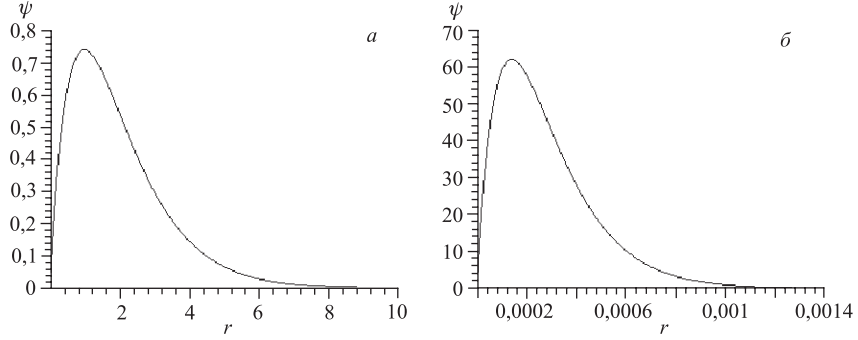


Рис. 1.

Соответствующая система уравнений ($n = 1$) имеет вид

$$2c_1 (6\mu^2 k^2 - 1) + 1 = 0, \quad (19)$$

$$2\mu^2 k^3 - k + \frac{1}{2} = 0, \quad (20)$$

$$\mu^2 k^4 - k^2 + \alpha^2 = 0. \quad (21)$$

Уравнение (20) имеет два положительных решения (одно одноузловое, а другое — безузловое решение), когда параметр μ меняется в интервале $0 < \mu < \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ (см. (14)). Выясним, как меняются свойства решений при $\mu \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

При $\mu = 10^{-4}$

$$k_1 = 0,5000000025, \quad c_1 = 0,5000000075, \quad A_1 = 0,7071067758,$$

$$\alpha_1^2 = 0,2500000019; \quad k_2 = 7070,817799, \quad c_2 = -0,2500265203,$$

$$A_2 = 0,1189080975 \cdot 10^7, \quad \alpha_2^2 = 0,2499999987 \cdot 10^8$$

На рис.2 приведены эти номированные решения. Решение с k_1 , практически совпадает с решением уравнения Шредингера, а другое решение с k_2 является погранслойным (т. е. функция отлична от нуля в окрестности начала координат $r = 0$).

При $\mu \rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, т. е. например, при $\mu = 0,5443310540$

$$\kappa_1 = 0,7499863073, \quad c_1 = 13683,14727, \quad A_1 = 0,0000410782,$$

$$\alpha_1^2 = 0,4687363073, \quad k_2 = 0,7500136934, \quad c_2 = -13692,98060,$$

$$A_2 = 0,0000410802, \quad \alpha_2^2 = 0,4687636934.$$

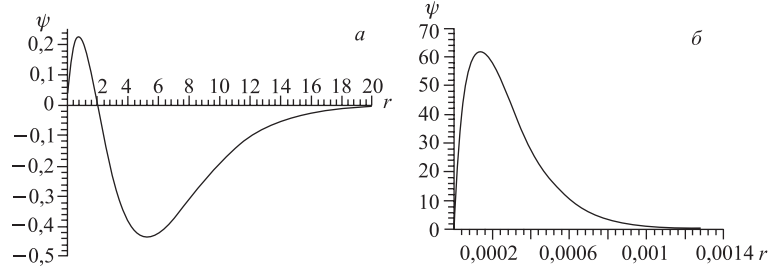


Рис. 2.

Отсюда видно, что все параметры обоих решений (кроме c_1, c_2) стремятся друг к другу, но при этом тип решения не меняется и не стремится к другому, т. к. c_1, c_2 имеют разные знаки.

Решение с двумя узлами. Решение ищем в виде

$$\Psi(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r) \exp(-kr). \quad (22)$$

Соответствующая система уравнений ($n = 2$) имеет вид

$$(c_1 + c_2)(6\mu^2 k^2 - 1) + 12c_1 c_2 \mu^2 k + \frac{2}{3} = 0, \quad (23)$$

$$3c_1 c_2 (6\mu^2 k^2 - 1) + \frac{1}{3}(c_1 + c_2) = 0 \quad (24)$$

$$2\mu^2 k^3 - k + \frac{1}{3} = 0, \quad (25)$$

$$\mu^2 k^4 - k^2 + \alpha^2 = 0. \quad (26)$$

Так же как и в предыдущих пунктах, уравнение (25) имеет два положительных решения, когда параметр μ меняется в интервале $0 < \mu < \mu_3$ ($\mu_3 = \sqrt{2/3}$). Однако в этом случае численным опытом установлено, что этот интервал делится на три подынтервала:

$$0 < \mu < \mu_1, \quad \mu_1 < \mu < \mu_2, \quad \text{и} \quad \mu_2 < \mu < \mu_3,$$

$$\text{где } \mu_1 = 0,6917325391, \quad \mu_2 = 0,7132557344.$$

Ниже схематически приведены эти подынтервалы, и в каждом подынтервале — знаки постоянных c_1 и c_2 , от которых зависит тип решений.

Отсюда следует, что одно из решений с k_1 в интервале $0 < \mu < \mu_2$ является двухузловым решением, а при переходе в интервал $\mu_2 < \mu < \mu_3$ становится одноузловым. Другое решение с k_2 в интервале $0 < \mu < \mu_1$ является безузловым, а при переходе в интервал $\mu_1 < \mu < \mu_3$ становится одноузловым.

$$\frac{k_1}{k_2} \left| \begin{array}{c} c_1 > 0, c_2 > 0 \\ c_1 < 0, c_2 < 0 \end{array} \right| \mu_1 \left| \begin{array}{c} c_1 > 0, c_2 > 0 \\ c_1 > 0, c_2 < 0 \end{array} \right| \mu_2 \left| \begin{array}{c} c_1 > 0, c_2 < 0 \\ c_1 > 0, c_2 < 0 \end{array} \right| \mu_3 \longrightarrow \mu$$

Теперь рассмотрим свойства решений в разных подынтервалах.

При $\mu = 10^{-4}$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,3333333341, & c_1 &= 0,5257834298, & c_2 &= 0,1408832443, \\ A_1 &= 0,3849001740, & \alpha_1^2 &= 0,1111111115 \\ k_2 &= 7070,901139, & c_1 &= -0,07044599542, & c_2 &= -0,2629187688, \\ A_2 &= 0,1189080976 \cdot 10^7, & \alpha_2^2 &= 0,2499999994 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

На рис. 3 приведены эти нормированные решения. Решение с k_1 , практически совпадает с решением уравнения Шредингера, другое решение с k_2 является пограничным и безузловым (т.к. $c_1 < 0, c_2 < 0$).

Рассмотрим случай, когда μ меняется в интервале $\mu_1 < \mu < \mu_2$. Пусть $\mu = \mu_1 + \gamma, \gamma \rightarrow 0$, например, при $\mu = 0,6917325392$. Соответствующие параметры имеют значения:

$$k_1 = 0,3901791666, \quad c_1 = 5,317632630, \quad c_2 = 0,2049905573;$$

$$k_2 = 0,7696723311, \quad c_1 = 0,4214418487 \cdot 10^9, \quad c_2 = -0,1585612204.$$

Решение с k_1 с двумя узлами (тип решение не меняется), а другое решение с k_2 стало одноузловым ($\Psi(r_1) = 0$, где $r_1 = \frac{1}{c_1}$, при $\gamma \rightarrow 0 \quad r_1 \rightarrow \infty, r_1 \rightarrow 0$).

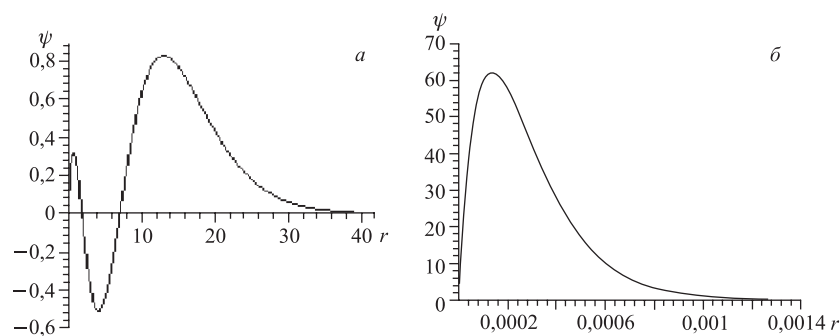


Рис. 3.

Пусть $\mu = \mu_2 - \gamma$, $\gamma \rightarrow 0$, например, при $\mu_2 = 0,7132557344$. Соответствующие параметры имеют значения:

$$k_1 = 0,3969943351, \quad c_1 = 0,1203747843 \cdot 10^{10}, \quad c_2 = 0,2141167761$$

$$k_2 = 0,7313571293, \quad c_1 = 4,571650616, \quad c_2 = -0,1691231834.$$

Решение с k_2 с одним узлом (тип решение не меняется), а другое решение с k_1 двухузловое, причем один из узлов $\left(\Psi(r_1) = 0, \text{ где } r_1 = \frac{1}{c_1}\right)$ при $\gamma \rightarrow 0$ $r_1 \rightarrow \infty$, $r_1 \rightarrow 0$.

Рассмотрим решение при $\mu = 0,7$ (примерно в середине промежутка $\mu_1 < \mu < \mu_2$). Соответствующие параметры имеют следующие значения:

$$k_1 = 0,3926665255, \quad c_1 = 8,402084668, \quad c_2 = 0,2082815280,$$

$$\alpha_1^2 = 0,2082815280, \quad A_1 = 0,01990773115;$$

$$k_2 = 0,7548596267, \quad c_1 = 12,25976874, \quad c_2 = -0,1623687372,$$

$$\alpha_2^2 = 0,4107164656, \quad A_2 = 0,03077307172.$$

На рис. 4 приведены эти нормированные решения. Решение с k_1 остается двухузловым (рис. 4, а, б), а другое решение с k_2 становится одноузловым (рис. 4, в, г). На рис. 4, а, не видно одного узла (в начале координат), который показан на рис. 4, б. На рис. 4, в, также не видно узла (в начале координат), который показан на рис. 4, г.

Теперь рассмотрим решение в подынтервале $\mu_2 < \mu < \mu_3$.

При $\mu \rightarrow \mu_3$, например, $\mu = 0,8164965809$, соответствующие параметры принимают следующие значения:

$$k_1 = 0,4999954357, \quad c_1 = 0,4082364611, \quad c_2 = -0,4082638474,$$

$$\alpha_1^2 = 0,1666643845, \quad A_1 = 0,2672565366;$$

$$k_2 = 0,5000045644, \quad c_1 = 0,4082601203, \quad c_2 = -0,4082327346,$$

$$\alpha_2^2 = 0,1666689489, \quad A_2 = 0,2672659473.$$

Отсюда видно, что оба решения стримятся друг к другу.

Рассмотрим решение при $\mu = 0,75$ (примерно в середине промежутка $\mu_2 < \mu < \mu_3$). Соответствующие параметры имеют следующие значения:

$$k_1 = 0,4120226592, \quad c_1 = 0,2355096901, \quad c_2 = -2,483540692,$$

$$\alpha_1^2 = 0,1304180088, \quad A_1 = 0,06272223098;$$

$$k_2 = 0,6666666667, \quad c_1 = 1,527329629, \quad c_2 = -0,1939962993,$$

$$\alpha_2^2 = 0,2777777778, \quad A_2 = 0,1895117482.$$

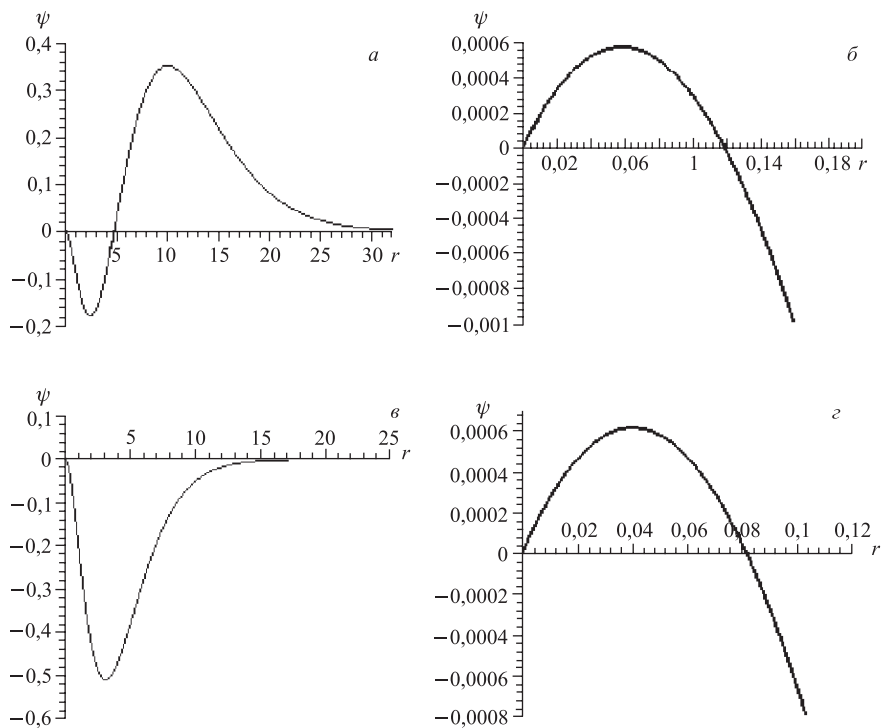


Рис. 4.

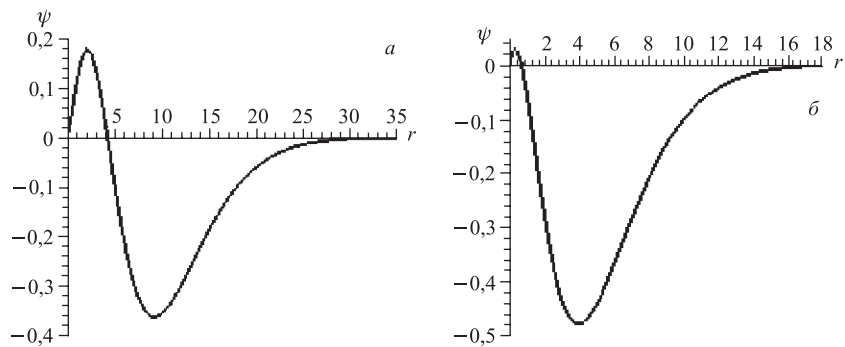


Рис. 5.

На рис. 5 приведены эти нормированные решения
Решение с тремя узлами. Решение ищем в виде

$$\Psi(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r)(1 - c_3 r) \exp(-kr).$$

Соответствующая система уравнений ($n = 3$) имеет вид

$$(c_1 + c_2 + c_3) (6\mu^2 k^2 - 1) + 12\mu^2 c_1 c_2 c_3 + 12\mu^2 k (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3) + 3/4 = 0, \quad (27)$$

$$3 (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3) (6\mu^2 k^2 - 1) + 48\mu^2 k c_1 c_2 c_3 + \frac{1}{2} (c_1 + c_2 + c_3) = 0, \quad (28)$$

$$6 c_1 c_2 c_3 (6\mu^2 k^2 - 1) + \frac{1}{4} (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_1 c_3) = 0, \quad (29)$$

$$2\mu^2 k^3 - k + \frac{1}{4} = 0, \quad (30)$$

$$\mu^2 k^4 - k^2 + \alpha^2 = 0. \quad (31)$$

Так же как и в предыдущих пунктах, уравнение (30) имеет два положительные решения, когда параметр μ меняется в интервале $0 < \mu < \mu_4$ ($\mu_4 = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$). Однако в этом случае численным опытом установлено, что этот интервал делится на четыре подынтервала:

$$0 < \mu < \mu_1, \quad \mu_1 < \mu < \mu_2, \quad \mu_2 < \mu < \mu_3 \text{ и } \mu_3 < \mu < \mu_4,$$

где $\mu_1 = 0,7385671913$, $\mu_2 = 0,7820669029$, $\mu_3 = 1,0860904314$.

Ниже схематически приведены эти подынтервалы, и в каждом подынтервале — знаки постоянных c_1 , c_2 и c_3 , от которых зависит тип решений.

Отсюда следует, что одно из решений, с k_1 в интервале $0 < \mu < \mu_2$ является трехузловым решением, а при переходе в интервал $\mu_2 < \mu < \mu_4$ становится двухузловым. Другое решение с k_2 в интервале $0 < \mu < \mu_1$ является безузловым, а при переходе в интервал $\mu_1 < \mu < \mu_3$ становится одноузловым и при переходе в интервал $\mu_3 < \mu < \mu_4$ становится двухузловым.

$$\begin{array}{c} k_1 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ c_3 > 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_1 \\ \hline \mu_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ c_3 > 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_2 \\ \hline \mu_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ c_3 < 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_3 \\ \hline \mu_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 > 0 \\ c_2 > 0 \\ c_3 < 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_4 \\ \hline \mu_4 \end{array} \longrightarrow \mu$$

$$\begin{array}{c} k_2 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 < 0 \\ c_2 < 0 \\ c_3 < 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_1 \\ \hline \mu_1 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 > 0 \\ c_2 < 0 \\ c_3 < 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_2 \\ \hline \mu_2 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 > 0 \\ c_2 < 0 \\ c_3 < 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_3 \\ \hline \mu_3 \end{array} \left| \begin{array}{l} c_1 > 0 \\ c_2 < 0 \\ c_3 < 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} \mu_4 \\ \hline \mu_4 \end{array} \longrightarrow \mu$$

Теперь приведем явный вид решений при $\mu \rightarrow 0$ и $\mu \rightarrow \mu_4$.
 При $\mu = 10^{-4}$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,2500000003, & c_1 &= 0,5342894994, & c_2 &= 0,1512672919, \\ c_3 &= 0,06444320033, & A_1 &= 0,2500000006, & \alpha_1^2 &= 0,06250000011 \\ k_2 &= 7070,942809, & c_1 &= -0,0322242905, & c_2 &= -0,0756366773, \\ c_3 &= -0,2671721815, & A_2 &= 0,1189080977 \cdot 10^7, & \alpha_2^2 &= 0,2499999997 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

На рис. 6 приведены эти нормированные решения. Решение с k_1 практически совпадает с решением уравнения Шредингера, другое решение с k_2 является погранслойным и безузловым (т.к. $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, $c_3 < 0$).

При $\mu \rightarrow \mu_4$, например, $\mu = 1,088662108$, соответствующие параметры принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,3749972937, & c_1 &= 2,239085647, & c_2 &= 0,1587966613, \\ c_3 &= -0,1482881740 & \alpha_1^2 &= 0,1171861469, & A_1 &= 0,03738188856; \\ k_2 &= 0,3750027064, & c_1 &= 2,239885094, & c_2 &= 0,1588022888, \\ c_3 &= -0,1482813520, & \alpha_2^2 &= 0,1171888532, & A_2 &= 0,03736935394. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что оба решения стремятся друг к другу.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложен алгоритм нахождения собственных значений и собственных функций для одной краевой задачи для уравнения четвертого порядка с малым параметром μ при старшей производной с кулоновским потенциалом. Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE и установлено следующее:

1. В интервале допустимых значений параметра μ (см. (14)) найдены два решения. Одно из решений краевой задачи (8,9) при $\mu \rightarrow 0$ стремится к решению уравнения Шредингера, а другое решение является погранслойным.
2. Когда малый параметр μ выбирается, например, для двухузлового решения в окрестности значений $\mu_1 = 0,6917323391$ и $\mu_2 = 0,7132557344$, свойства решений резко меняются (т.е. тип решений меняется). Аналогичные свойства наблюдаются и для трехузлового решения.
3. Если мы попытаемся решить краевую задачу (8,9) численными методами (методом конечных разностей или каими-либо другими методами),

то, не зная заранее указанные выше свойства решений (погранслоиные решение, стремление узлов решения к началу координат и т.д.), практически невозможно найти эти решения.

4. Предложенный алгоритм почти без изменений можно применять для исследования аналогичной краевой задачи для уравнения 6-го, 8-го и т.д. порядков. В отличие от случая уравнения 4-го порядка в этом случае не удастся аналитически получить область изменений параметра μ (аналогично условию (14)).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты N 08-01-00800-а, N 07-01-00738-а

ЛИТЕРАТУРА

1. Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В. // УФН. 1984. Т. 143. С. 3.
2. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Nuovo Cimento. 1963. V. 29. P. 380.
3. Kadyshesky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. Nuovo. Cimento. A. 1968. V. 55. P. 233.
4. Кадышевский В. Г., Мир-Касымов Р. М., Скачков Н. Б. // ЭЧАЯ. 1972. Т. 2, № 3. P. 637.
5. Gross F. // Phys. Rev. B. 1968. V. 6. P. 125.
6. Thompson R. H. // Phys. Rev. D. 1970. V. 1. P. 110.
7. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В. Препринт ОИЯИ, P5-99-15, 1999, Дубна, Computer Physics Communications 126(2000) 12–15.
8. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В. Сообщение ОИЯИ, P11-2000-154, 2000, Дубна.
9. Амирханов И. В., Васильев С. А., Жидков Е. П., Жидкова И. Е. Дифф. Урав. 2000. Т. 37, 1, С. 83–90.
10. Амирханов И. В., Васильев С. А., Жидков Е. П., Жидкова И. Е. Математическое моделирование. 2003. Т. 15, 9, С. 3–16.
11. Амирханов И. В. и др. // Сообщение ОИЯИ P11-2004-147, Дубна, 2004, 21 с.
12. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А. // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 11. С. 65–79.
13. Амирханов И. В., Музафаров Д. З., Саркар Н. Р., Сархадов И., Шарипов З. А. // Сообщение ОИЯИ P11-2007-148, Дубна, 2007, 15 с.

14. Жидков Е. П., Кадышевский В. Г., Катыев Ю. В. // ТМФ. 1970. Т. 3, № 2. С. 191.
15. Тихонов А. Н. // Матем. Сбор. 1948. Т. 22 (64), № 2. С. 193–204.
16. Тихонов А. Н. // Матем. Сбор. 1950. Т. 27(69), № 1. С. 147–156.
17. Вишик М. И., Люстерник Л. А. // УМН. 1957. Т. 12, вып. 5 (77), С. 3–122.
18. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990, 208 с.
19. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. М: Гос. Изд., 1962, 608 с.

Получено 8 июля 2008 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 30.05.2008.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,94. Уч.-изд. л. 1,09. Тираж 310 экз. Заказ № 56189.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/