

P11-2009-123

Н. Д. Дикусар\*

**МЕТОД БАЗИСНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ  
В ЗАДАЧАХ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ  
И СГЛАЖИВАНИЯ**

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

---

\*E-mail: [dnd@jinr.ru](mailto:dnd@jinr.ru)

Дикусар Н. Д.

P11-2009-123

Метод базисных элементов

в задачах полиномиальной аппроксимации и сглаживания

Предлагается метод разложения алгебраического многочлена по базисным элементам (МБЭ) — трем квадратичным и одной кубической параболам. В задачах полиномиальной аппроксимации и сглаживания МБЭ-представление позволяет понизить вычислительную сложность алгоритмов и повысить их устойчивость к ошибкам за счет выбора структуры внутренней связи между переменной и управляющими параметрами. Применение МБЭ открывает новые возможности для повышения эффективности процедур метода наименьших квадратов при решении задач полиномиальной регрессии.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2009

Dikusar N. D.

P11-2009-123

The Basic Element Method

in Polynomial Approximation and Smoothing Problems

A basic element method (BEM) for decomposition of the algebraic polynomial via three quadratic and one cubic parabolas (basic elements) is presented. In the polynomial approximation and smoothing problems, the BEM presentation allows one to decrease the computing complexity of algorithms and increase their stability to errors by choosing the internal relationship structure between a variable and controlling parameters. The use of BEM opens new possibilities for increasing the efficiency of LSM procedures when resolving polynomial regression problems.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2009

## ВВЕДЕНИЕ

Повышение эффективности методов аппроксимации (сглаживания) данных актуально в плане развития современных технологий, требующих качественной обработки больших потоков информации за малые промежутки времени.

В задачах аппроксимации дискретного набора данных, наряду с каноническим представлением полинома через мономы  $\{x^k\}_{k=0}^n$ , используют различные формы многочленов, которые теоретически равносильны. Это интерполяционные формулы Лагранжа, Ньютона, Эрмита, полиномы Чебышева, Лежандра, Бернштейна и др. Выбор того или иного представления связан, как правило, с устойчивостью и точностью вычислений или с повышением общей эффективности алгоритмов. При этом качество результатов в значительной мере зависит от выбора базисных аппроксимантов.

Понятие обусловленности является ключевым при работе с полиномами. Известно, что при выполнении операций с полиномами высокой степени возникает потеря точности, обесценивающая результаты вычислений [1]. Например, при решении задач линейной регрессии высокого порядка ( $n > 5$ ) методом наименьших квадратов (МНК) матрица нормальных уравнений становится плохо обусловленной [2–4], и такого рода трудности обычно устраняются с помощью полиномов Чебышева, методов ортогонализации и др. [2,4,5]. Поэтому разработка методов, менее чувствительных к обусловленности задачи, остается весьма актуальной.

Суть предлагаемого метода состоит в представлении канонического полинома  $P_n(x; \mathbf{a})$  в форме разложения по *трем квадратичным и одной кубической параболом* — *базисным элементам* (МБЭ-представление). В задачах полиномиальной аппроксимации и сглаживания МБЭ позволяет понизить вычислительную сложность алгоритмов и повысить их устойчивость к ошибкам за счет выбора структуры внутренней связи между переменной и управляющими параметрами. Такой подход позволяет расширить границы применимости классических методов в плане новых возможностей как для практических применений, так и для дальнейших теоретических исследований.

*Базисные элементы* определяются через  $x$ -координаты четырех точек, связанных специальным правилом сложного отношения. В конструкции

МБЭ-полиномов используется параметризация функций  $\{x^k\}$  и их разложение на сумму квадратичной параболы (П) и *элементарного симметрического многочлена*  $u_{k-3}$  степени  $k-3$  относительно  $x$ , умноженного на «зануляющую» кубическую параболу  $Q$  (формулы (9), (10) из [6]):

$$x^k = \Pi(x; \alpha, \beta) + Q(x; \alpha, \beta)u_{k-3}(x; \alpha, \beta), \quad u_1 = u_2 = 0, \quad (1)$$

где функции  $u_k$  определяются рекуррентной формулой

$$u_k = (x + \alpha)u_{k-1} - \alpha x u_{k-2} + \beta^{k-3}, \quad u_1 = u_2 = 0; \quad k = \overline{3, n}, \quad (2)$$

а  $\alpha, \beta \in R, \alpha \neq \beta \neq 0$  — непрерывные параметры 4-точечных или дискретных проективных преобразований (ДПП) [7, 8].

Методы, основанные на 4-точечных преобразованиях [9–13, 15, 16], были использованы при разработке и программной реализации адаптивного алгоритма кусочно-кубической аппроксимации и сглаживания, а также алгоритма автоматического обнаружения узлов кубических сегментов на кривой [11, 12].

Например, в работе [11] кубическая модель  $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  трансформируется в МБЭ-модель с одним свободным параметром  $\theta$ :

$$S = \Pi(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}) + \theta Q(x; \alpha, \beta), \quad x, \alpha, \beta \in R, \quad (3)$$

где  $\Pi$  — парабола, содержащая три реперные ординаты  $\mathbf{r} = [S_\alpha, S_\beta, S_0]^T$ . Для оценки  $\theta$  использовался динамический режим модели (3) и алгоритм рекурсивного метода наименьших квадратов (РНК) первого порядка:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_n &= \hat{\theta}_{n-1} + K_n[\tilde{f}_n - \hat{\Pi}_n(x_n; \alpha_n, \beta_n, \mathbf{r}_n) - \hat{\theta}_{n-1}Q_n(x_n; \alpha_n, \beta_n)], \\ \hat{\theta}_0 &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\tilde{f}_n$  — измерение в текущей точке,  $\hat{\Pi}_n + \hat{\theta}_{n-1}Q_n$  — его оценка на  $n$ -м шаге адаптации, а  $K_n$  — коэффициент подавления ошибки.

МБЭ основан на преобразовании канонического многочлена

$$P_n(x; \mathbf{a}) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (5)$$

к виду  $P_{n \downarrow k}(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i) = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i$ , где  $Q(x; \alpha, \beta)$  — *кубическая*, а  $\mathbf{w}^T = [w_1, w_2, w_3], w_j = w_j(x; \alpha, \beta)$  — *квадратичные* параболы относительно  $x$ . Коэффициенты  $\mathbf{r}_i = [r_{i\alpha}, r_{i\beta}, r_{i0}]^T$  — суть ординаты точек, расположенных на линиях  $x = x_0, x = x_\alpha$  и  $x = x_\beta$ ;  $k = \lfloor n/3 \rfloor, \lfloor a \rfloor$  — наибольшее целое  $\leq a$ .

Модель  $f \sim P_{n \downarrow k}(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$  использует меньшие порядки производных при аппроксимации гладкой функции полиномом  $n$ -й степени по сравнению с

приближением полиномом Тейлора, а непрерывные параметры  $\alpha$  и  $\beta$  вносят дополнительные возможности при разработке более эффективных и устойчивых к ошибкам алгоритмов сглаживания в рамках задач полиномиальной регрессии.

В общей постановке задачи полиномиальной регрессии на основе заданной выборки объема  $N$ ,

$$\{\tilde{f}(x_i) = f(x_i) + e_i; \quad x_i < x_{i+1}\}_{i=1}^N, e_i \sim N(0, \sigma), \quad (6)$$

ищется такая (непрерывная) функция  $G_f(x)$ , что  $G_f(x_i) = \hat{y}_i$ , где  $\hat{y}_i$  — оценка  $y$ .

Обычно функция  $G_f$  задается в виде линейной комбинации некоторых базисных функций  $B_k(x)$ :

$$G_f(x) = \sum_{k=1}^m c_k B_k(x).$$

Решение задачи методом наименьших квадратов сводится к решению системы нормальных уравнений вида  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{A}^T \tilde{\mathbf{f}}$ , где  $A_{ik} = B_k(x_i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $\mathbf{c} = [c_1 \dots c_m]^T$ ,  $\tilde{\mathbf{f}} = [\tilde{f}_1 \dots \tilde{f}_N]^T$ ,  $m < N$ .

В случае канонической модели

$$f(x) = P_n(x; \mathbf{a}) + e, \quad e \sim N(0, \sigma), \quad (7)$$

оценка вектора коэффициентов  $\mathbf{a} = [a_0, a_1 \dots a_n]^T$  определяется в виде

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{f}}, \quad (8)$$

где  $\tilde{\mathbf{f}} = [\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \dots \tilde{f}_N]^T$  — вектор измерений, а  $\mathbf{X}$  — регрессионная матрица размерности  $N \times (n + 1)$  с элементами  $x_i^k$ ,  $i = \overline{1, N}$ ;  $k = \overline{0, n}$ ,  $n < N$  [3].

Процесс вычисления оценки  $\hat{\mathbf{a}}$  по формуле (8) усложняется как с ростом  $n$  (проблема «плохой обусловленности»), так и с увеличением  $\sigma^2$ . Для устранения трудностей, связанных с ошибками, используются непараметрические методы [17] и методы стохастической аппроксимации [18], а проблемы, связанные с высоким порядком модели, решаются при помощи сплайнов или кусочно-полиномиальной аппроксимации [19, 20]. Для разрешения проблем плохой обусловленности часто используют методы регуляризации [1, 5], а в регрессионном анализе для этих целей применяется также метод гребневой регрессии [21]. Большое число методов реализовано в современных программных пакетах по вычислительным и статистическим методам обработки данных [22, 23].

Если данные образуют временную последовательность с неизвестным заранее объемом выборки  $N$ , то для вычисления  $\hat{\mathbf{a}}$  применяют рекуррентные

методы, в том числе РНК. В этом случае вектор  $\hat{\mathbf{a}}$  и обратная матрица  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$  определяются рекурсивными процедурами [14].

Материал статьи излагается в следующем порядке: в первом разделе на основе публикаций [6, 7] строятся базисные элементы, приводится схема построения МБЭ-полинома и формулируется теорема о представлении полинома через базисные элементы, дается его геометрический смысл. Раздел второй посвящен МБЭ-аппроксимации непрерывной,  $k$  раз дифференцируемой функции и сравнению с аппроксимацией по формуле Тейлора. В разделе третьем обсуждаются структура и свойства МБЭ-модели. В четвертом приводятся результаты численных экспериментов по сглаживанию данных, подтверждающих эффективность вычислений и устойчивость МБЭ-модели к ошибкам, а также сравнение МНК-оценок и чисел обусловленности матриц нормальных уравнений для различных моделей 6-го и 12-го порядков. В пятом разделе рассмотрена задача рекурсивного оценивания параметров полинома с предварительной трансформацией данных и понижением порядка модели. Приводятся РНК-алгоритм и результаты расчетов для редуцированной модели 6-го порядка. В заключении даются рекомендации относительно практического применения МБЭ-модели.

## 1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $P_n(x)$ ЧЕРЕЗ БАЗИСНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

**1.1. Базисные элементы.** Параметризация функции  $f(x) \in C_{[a,b]}$  в рамках ДПП [8] использует расположенную на  $f$  *четверку* несовпадающих точек  $\{M_\tau, M_\alpha, M_\beta, M_0\}$ , в которой величины  $\tau = x_\tau - x_0$ ,  $\alpha = x_\alpha - x_0$ ,  $\beta = x_\beta - x_0$  и  $0 = x_0 - x_0$  связаны специальным правилом сложного отношения четырех точек:  $[13] : [24]/[23] : [14]$ , где  $[ij] = x_j - x_i$ . Тройка  $\{M_\alpha, M_\beta, M_0\}$  называется *репером*, а  $\alpha$  и  $\beta$  — *параметрами*.

Для набора  $\{x_\tau, x_\alpha, x_\beta, x_0\}$  правило, указанное выше, порождает три функции:  $w_j$  — *квадратичные* относительно  $\tau$  и *дробно-рациональные* относительно  $\alpha$  и  $\beta$ , ( $\alpha \neq \beta \neq 0$ ):

$$w_1 = \frac{-\tau(\tau - \beta)}{\alpha(\beta - \alpha)}, \quad w_2 = \frac{\tau(\tau - \alpha)}{\beta(\beta - \alpha)}, \quad w_3 = \frac{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)}{\alpha\beta}, \quad \sum_{j=1}^3 w_j = 1. \quad (9)$$

Умножая  $w_3$  на  $\alpha\beta\tau$ , получим еще одну функцию — «зануляющую» кубическую параболу с нулями в точках 0,  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$Q(\tau; \alpha, \beta) = \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta). \quad (10)$$

Функции  $w_1, w_2, w_3$  и  $Q$  будем называть *базисными элементами* (геометрическими примитивами) в конструкции МБЭ-полинома. Так, полиномы 0-й, 1-й

и 2-й степеней, проходящие через ординаты  $\mathbf{r} = [r_\alpha, r_\beta, r_0]^T$  с абсциссами  $x_\alpha, x_\beta$  и  $x_0$ , можно представить через элементы  $w_j$  в виде

$$\Pi(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}) = \mathbf{w}^T \mathbf{r} = r_\alpha w_1 + r_\beta w_2 + r_0 w_3, \quad (11)$$

где  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^T$ , а  $\Pi(\nu; \alpha, \beta, \mathbf{r}) = r_\nu$ . В зависимости от расположения  $r_\nu, \nu = \alpha, \beta, 0$ , на плоскости уравнение (11) однозначно определяет константу, прямую или квадратичную параболу. Уравнение (3) представляет МБЭ-конструкцию для кубической параболы  $P_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$  с тремя фиксированными  $\mathbf{r}$  и одним свободным параметром  $\theta \equiv a_3$ . Рассмотрим более подробно схему построения МБЭ-полинома для  $n > 3$ .

**1.2. Редуцированные многочлены  $U_i(x)$ .** Уравнение (3) можно записать в виде  $S = \Pi(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_0) + Q(x; \alpha, \beta)\Pi_1(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_1)$ , где  $\mathbf{r}_1 = [\theta, \theta, \theta]^T$ . Это уравнение при  $r_{1\alpha} \neq r_{1\beta} \neq r_{10}$  представляет полином 5-й степени. В общем случае, после подстановки правой части (1) вместо  $x^k$  в (5) и с учетом равенств (2), (10) и (11) (при  $x_0 = 0$ ) полином (5) запишется в виде [6]

$$P_n(x) = \Pi_0(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_0) + Q(x; \alpha, \beta)U_1(x), \quad (12)$$

где  $U_1(x)$  — многочлен степени  $n-3$  относительно  $x$ , а  $\mathbf{r}_0 = [P_n(\alpha), P_n(\beta), P_n(0)]^T$ .

Легко видеть, что значения  $U_1$  в точках  $x = \alpha$ ,  $x = \beta$  и  $x = 0$ , в принципе, позволяют построить  $\mathbf{r}_1 = [U_1(\alpha), U_1(\beta), U_1(0)]^T$  и по аналогии с (12) получить представление для  $U_1(x)$  в виде

$$U_1(x; \alpha, \beta) = \Pi_1(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_1) + Q(x; \alpha, \beta)U_2(x),$$

где  $\Pi_1(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_1) = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1$ , а степень  $U_2(x)$  на 3 меньше степени  $U_1(x)$ . Полученные в таком процессе многочлены  $U_i(x) = \Pi_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i) + Q(x)U_{i+1}(x)$ , где  $\mathbf{r}_i = [U_i(\alpha), U_i(\beta), U_i(0)]^T$ ,  $i = \overline{1, k}$ , будем называть *редуцированными*, так как на каждом шаге их степень уменьшается на три. Очевидно, что  $U_k(x) = \Pi_k(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_k)$ , где  $k = \lfloor n/3 \rfloor$ .

Подставляя последовательно правые части  $U_k(x)$  в выражения для  $U_{k-1}(x)$ ,  $U_{k-1}(x)$  в  $U_{k-2}(x) \dots U_1(x)$  в  $P_n(x)$ , получим МБЭ-представление  $P_n(x)$  в виде

$$P_{n \downarrow k}(x) = \Pi_0 + Q\Pi_1 + Q^2\Pi_2 + \dots + Q^k\Pi_k = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i,$$

где  $r_{i\nu} \equiv U_i(\nu)$  — коэффициенты для  $\Pi_i$ ,  $\nu = \alpha, \beta, 0$ .

**Лемма.** Значения  $U_1$  в точках  $x = \alpha, x = \beta, x = 0$  определяются в виде

$$\begin{aligned} U_1(\alpha) &= -\frac{P'_n(\alpha)}{\alpha\gamma} + \frac{P_n(\beta)}{\beta\gamma^2} - \frac{P_n(0)}{\alpha^2\beta}, \\ U_1(\beta) &= \frac{P_n(\alpha)}{\alpha\gamma^2} + \frac{P'_n(\beta)}{\beta\gamma} - \frac{P_n(0)}{\alpha\beta^2}, \\ U_1(0) &= -\frac{P_n(\alpha)}{\alpha^2\gamma} + \frac{P_n(\beta)}{\beta^2\gamma} + \frac{P'_n(0)}{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $\gamma = \beta - \alpha$ .

Доказательство леммы следует непосредственно из (12) и нахождения соответствующего предела:

$$U_1(\nu) = \lim_{x \rightarrow \nu} \{[P_n(x) - \Pi_0(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_0)]/Q(x; \alpha, \beta)\}, \quad \nu = \alpha, \beta, 0. \quad \blacksquare$$

Значения  $r_{i\nu}, i = 2, 3, \dots$ , определяются по (13) при замене  $P_n$  и  $P'_n$  на  $U_{i-1}(x)$  и  $U'_{i-1}(x)$ . Подробно процесс вычисления  $r_{i\nu}$  рассматривается в п. 1.3.

**Примечание 1.** Формулы (13), представляющие  $r_{(i+1)\nu}$  через  $U_i$  и  $U'_i$ , можно выразить с помощью скалярных произведений векторов  $\mathbf{c}_\nu$  и  $\mathbf{u}_{i\nu}, \nu = \alpha, \beta, 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1}^T &= [\mathbf{c}_\alpha^T \mathbf{u}_{i\alpha}, \mathbf{c}_\beta^T \mathbf{u}_{i\beta}, \mathbf{c}_0^T \mathbf{u}_{i0}], \quad \text{где} \quad (14) \\ \mathbf{c}_\alpha^T &= [-\frac{1}{\alpha\gamma}, \frac{1}{\beta\gamma^2}, -\frac{1}{\alpha^2\beta}], \quad \mathbf{c}_\beta^T = [\frac{1}{\alpha\gamma^2}, \frac{1}{\beta\gamma}, -\frac{1}{\alpha\beta^2}], \quad \mathbf{c}_0^T = [-\frac{1}{\alpha^2\gamma}, \frac{1}{\beta^2\gamma}, \frac{1}{\alpha\beta}]; \\ \mathbf{u}_{i\alpha}^T &= [U'_{i\alpha}, r_{i\beta}, r_{i0}], \quad \mathbf{u}_{i\beta}^T = [r_{i\alpha}, U'_{i\beta}, r_{i0}], \quad \mathbf{u}_{i0}^T = [r_{i\alpha}, r_{i\beta}, U'_{i0}]. \end{aligned}$$

**1.3. Вычисление ординат  $r_{i\nu}$ .** Векторы  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}_1$  получены по  $P_{n\nu}$  и  $P'_{n\nu}$ . Детали процесса вычисления  $\mathbf{r}_i$  покажем для  $i = 2, 3, 4$ . Далее для упрощения формул параметры  $\alpha, \beta$  и переменную  $x$  будем опускать.

Значения  $U'_i(\nu)$  найдем с помощью формулы Лейбница для  $i$ -й производной от произведений, входящих в равенство

$$(Q^{i-1}U_{i-1})^{(i)} = (P_n - \sum_{j=0}^{i-2} Q^j \Pi_j)^{(i)}, \quad i = \overline{2, k}. \quad (15)$$

Легко видеть, что при разложении по формуле Лейбница члены, содержащие множители  $Q(x), Q^2(x) \dots Q^{(4)}(x), Q^{(5)}(x) \dots \Pi_i'''(x), \Pi_i^{(4)}(x) \dots$  в точках  $x = \alpha, \beta, 0$  обращаются в нуль, существенно упрощая нахождение  $U'_i(\nu), i = \overline{1, k}$ .



Например, выражение для  $U'_{1\nu}$  получается из уравнения (15) при  $i = 2$ :  $(P_n - \Pi_0)'' = Q''U_1 + 2Q'U'_1 + QU''_1$ . С учетом  $Q_\nu = 0$  найдем

$$U'_{1\nu} = (P''_{n\nu} - \Pi''_{0\nu} - Q''_\nu U_{1\nu}) / (2Q'_\nu), \quad Q'_\nu \neq 0,$$

где  $U_{1\nu}$  определяются по (13)–(14). После подстановки  $Q'_\nu = 3\nu^2 - 2(\alpha + \beta)\nu + \alpha\beta$ ,  $Q''_\nu = 6\nu - 2(\alpha + \beta)$  и  $\Pi''_{0\nu} \equiv C_{\alpha\beta o} = 2(-r_{0\alpha}/(\alpha\gamma) + r_{0\beta}/(\beta\gamma) + r_{00}/(\alpha\beta))$  получим

$$U'_{1\nu} = (P''_{n\nu} + C_{\alpha\beta o} - (6\nu - 2(\alpha + \beta))U_{1\nu}) / (6\nu^2 - 4(\alpha + \beta)\nu + \alpha\beta), \quad \nu = \alpha, \beta, 0.$$

Полученные  $U'_{1\nu}$  и  $r_{1\nu}$  используем для формирования  $\mathbf{u}_{1\nu}$  в (14), чтобы найти  $\mathbf{r}_2$ . Для построения  $\mathbf{r}_3$  используем  $r_{2\nu}$  и  $U'_{2\nu}$ . По аналогии найдем  $U'_2$  из условия  $(Q^2U_2)''' = (P_n - \Pi_0 - Q\Pi_1)''''$ :

$$U'_2 = (P_n'''' - Q''''\Pi_1 - 3Q'''\Pi'_1 - 3Q''\Pi''_1 - 6Q''Q'U_2) / (6Q'^2).$$

Полагая  $i = 4, 5$  в (15), получим формулы для вычисления  $U'_3$  и  $U'_4$ :

$$U'_3 = (P_n^{(4)} - 4Q''''\Pi'_1 - 6Q''''\Pi_2 - 6Q'''\Pi''_1 - 8Q''''Q'\Pi_2 - 12Q'^2\Pi''_2 - 24Q''Q'\Pi'_2 - 36Q''Q'^2U_3) / (24Q'^3),$$

$$U'_4 = (P_n^{(5)} - 10Q''''\Pi''_1 - 20Q''''Q''\Pi_2 - 30Q''''\Pi_2 - 40Q''''Q'\Pi'_2 - 60Q'^3\Pi_3 - 60Q''Q'\Pi''_2 - 60Q''''Q'^2\Pi_3 - 90Q''''Q'\Pi_3 - 180Q''Q'^2\Pi'_3 - 180Q''Q'\Pi_3 - 240Q''Q'^3U_4) / (120Q'^4).$$

$\Pi_i(\nu) = r_{i\nu}$ , а функции  $\Pi'_i = \mathbf{w}'^T \mathbf{r}_i$ ,  $\Pi''_i = \mathbf{w}''^T \mathbf{r}_i$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  и  $Q'''$  легко затабулировать по значениям производных базисных элементов в точках  $\alpha, \beta, 0$ , где  $\mathbf{w}'^T = [w'_1, w'_2, w'_3]$ ,  $\mathbf{w}''^T = [w''_1, w''_2, w''_3]$  (см. табл. 1).

Равенства (13), (14) и формулы, полученные на основании (15), составляют основу процедуры вычисления  $\mathbf{r}_i$  — коэффициентов в конструкции МБЭ-полинома. Например, по формулам для  $U'_i$ ,  $i = \overline{0, 4}$ , и табл. 1 получим 15 значений  $r_{i\nu}$  для пяти векторов  $\mathbf{r}_i$ , с помощью которых полином 14-й степени можно представить в виде

$$P_{14}(x; \mathbf{a}) = \sum_{i=0}^4 Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i.$$

**Примечание 2.** Из приведенных выше формул и табл. 1 следует, что для приближения функции полиномом  $n$ -й степени требуется вычислять только  $\lfloor n/3 \rfloor$

Таблица 1.

$\nu$	$w_1'$	$w_2'$	$w_3'$	$w_1''$	$w_2''$	$w_3''$	$Q'$	$Q''$	$Q'''$
$\alpha$	$\frac{\gamma-\alpha}{\alpha\gamma}$	$\alpha/\beta\gamma$	$-\gamma/\alpha\beta$	$-2/\alpha\gamma$	$2/\beta\gamma$	$2/\alpha\beta$	$-\alpha\gamma$	$4\alpha - 2\beta$	6
$\beta$	$-\beta/\alpha\gamma$	$\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}$	$\gamma/\alpha\beta$	$-2/\alpha\gamma$	$2/\beta\gamma$	$2/\alpha\beta$	$\beta\gamma$	$4\beta - 2\alpha$	6
0	$\beta/\alpha\gamma$	$-\alpha/\beta\gamma$	$\frac{-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$	$-2/\alpha\gamma$	$2/\beta\gamma$	$2/\alpha\beta$	$\alpha\beta$	$-2(\alpha + \beta)$	6

ее производных и производные четырех базисных элементов до второго-третьего порядков.

Степень редуцированных полиномов понижается на три на каждом шаге вычисления  $\mathbf{r}_i$ . Последний в этом ряду полином будет либо квадратичной параболой, либо прямой линией или константой. В итоге, исходный полином запишется в виде

$$P_{n \downarrow k}(x; \mathbf{r}_i) = \underbrace{\Pi_0(\mathbf{r}_0) + Q \left[ \underbrace{\Pi_1(\mathbf{r}_1) + Q \left[ \Pi_2(\mathbf{r}_2) + Q \left[ \dots \left[ \Pi_{k-1}(\mathbf{r}_{k-1}) + Q \underbrace{\Pi_k(\mathbf{r}_k)}_{U_k} \right] \dots \right]}_{U_1} \right]}_{U_2} \right]}_{U_2}, \quad (16)$$

где  $k = \lfloor n/3 \rfloor$ , а  $\Pi_i$  и  $Q$  зависят также от  $x, \alpha, \beta$ .

Таким образом, найденные  $\mathbf{r}_i$  позволяют выразить полином  $P_n(x)$  через квадратичные и кубические элементы в виде (16), что служит основой для доказательства следующей теоремы.

**Теорема I.** Для заданной тройки чисел  $\{x_\alpha, x_\beta, x_0\} \in R$  и четверки базисных элементов  $\{w_1, w_2, w_3, Q\}$ , определенных формулами (9) и (10), многочлен

$$P_n(x; \mathbf{a}) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$$

может быть представлен в виде

$$P_{n \downarrow k}(x; \mathbf{r}_i) = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i, \quad (17)$$

где  $k = \lfloor n/3 \rfloor$ ,  $\tau = x - x_0$ ,  $\alpha = x_\alpha - x_0$ ,  $\beta = x_\beta - x_0$ , а  $\mathbf{r}_i = [r_{i\alpha}, r_{i\beta}, r_{i0}]^T$  — вектор, образованный из ординат, расположенных на линиях  $\tau = \alpha$ ,  $\tau = \beta$  и  $\tau = 0$ . ■

**1.4. Геометрическая интерпретация МБЭ.** Чтобы избежать оговорок, результат преобразования  $P_n(x; \mathbf{a})$  в сумму произведений  $\Pi_i Q^i$ ,  $i = 0, \overline{k}$ ,  $k = \lfloor n/3 \rfloor$ , ранее был обозначен через  $P_{n\downarrow k}$ , где  $n$  и  $k$  — максимальные степени соответственно для  $x$  и  $Q$ :

$$P_{n\downarrow k}(Q, w; \mathbf{r}_i) = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i. \quad (18)$$

Представление (18) имеет ясную геометрическую интерпретацию. В зависимости от расположения ординат  $r_{i\nu}$  на координатной плоскости линии  $\Pi_i$  однозначно определяются одной, двумя или тремя ординатами — горизонтальная прямая, наклонная прямая или квадратичная парабола соответственно (рис. 1, справа).

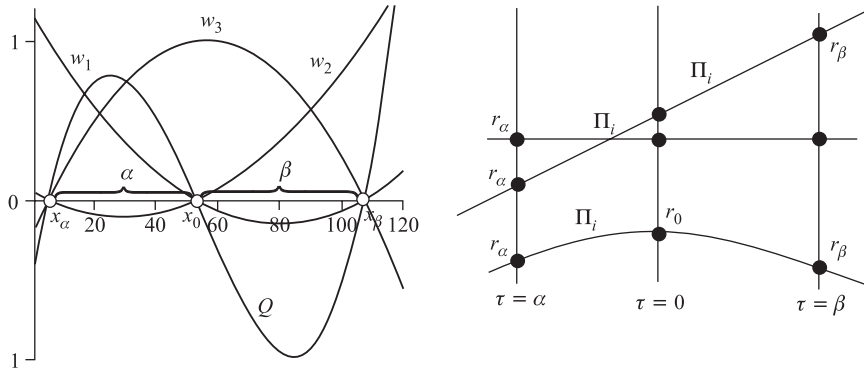


Рис. 1. Графики функций  $w_j(\tau; \alpha, \beta)$ ,  $Q(\tau; \alpha, \beta)$  (слева) и варианты расположения ординат на координатной плоскости для  $\Pi_i = r_{i\alpha}w_1 + r_{i\beta}w_2 + r_{i0}w_3$  (справа)

### 1.5. Следствия из теоремы I.

1. Рекурсивное вычисление базисных функций:  
 $\mathbf{b}_i = Q\mathbf{b}_{i-1}$ , где  $\mathbf{b}_{i-1} = Q^{i-1}\mathbf{w}$ ,  $i = \overline{1, k}$ .
2. Если в точках  $\alpha, 0, \beta$  заданы значения функции  $f \in C_{[\alpha, \beta]}$  и ее производной  $f'$ , то уравнение МБЭ-полинома 5-й степени, проходящего через эти точки, запишется в виде

$$P_{5\downarrow 1}(\tau) = (f_\alpha + QU_\alpha)w_1 + (f_\beta + QU_\beta)w_2 + (f_0 + QU_0)w_3,$$

где  $U_\alpha, U_\beta, U_0$  вычисляются по (13) с заменой  $P_n(x)$  и  $P'_n(x)$  на  $f(x)$  и  $f'(x)$  соответственно.

3. Так как для  $\forall \lambda \in R, \lambda \neq 0, \lambda < \infty$ ,

$$w_j(\lambda\tau; \lambda\alpha, \lambda\beta) = w_j(\tau; \alpha, \beta), \text{ а } Q(\lambda\tau; \lambda\alpha, \lambda\beta) = \lambda^3 Q(\tau; \alpha, \beta),$$

то  $P_{n\downarrow k}(\lambda\tau) = \sum_{i=0}^k \lambda^{i3} Q^i(\tau; \alpha, \beta) \Pi_i(\tau; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i^{(\lambda)})$ , где  $\mathbf{r}_i^{(\lambda)} = [r_{i1}^{(\lambda)}, r_{i2}^{(\lambda)}, r_{i3}^{(\lambda)}]^T$ .

Например, при  $n = 5$  значение  $k = \lfloor 5/3 \rfloor = 1$ . Тогда

$$P_{5\downarrow 1}(\lambda\tau) = \Pi_0(\tau; \alpha, \beta, \mathbf{r}_0^{(\lambda)}) + \lambda^3 Q(\tau; \alpha, \beta) \Pi_1(\tau; \alpha, \beta, \mathbf{r}_1^{(\lambda)}),$$

что позволяет в  $\lambda^3$  раз подавлять ошибки для прореженных данных (в обработку включается каждая  $\lambda$ -я точка):

$$\lambda^{-3} \{ \tilde{f}(x) - \Pi_0(\tau; \alpha, \beta, \hat{\mathbf{r}}_0^{(\lambda)}) \} = Q(\tau; \alpha, \beta) \Pi_1(\tau; \alpha, \beta, \mathbf{r}_1^{(\lambda)}).$$

**Пример 1.** На рис. 2 слева показаны графики многочленов  $P_5(x) = -0,15x^5 + 0,3x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 12x + 18$ ,  $x \in [-5, 5, 5]$ ,  $P_{5\downarrow 1}(Q, \mathbf{w}; \mathbf{r}) = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0 + Q \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1$ , где  $\mathbf{r}_0^T = [-2, 480256, 4, 3429563, 18]$ ,  $\mathbf{r}_1^T = [-1, 828999028, -0, 5183500329, 0, 886108067]$ , а также графики парабол  $\Pi_0$ ,  $\Pi_1$  и  $Q$  с параметрами  $x_0 = 0$ ,  $\alpha = -3,6$ ,  $\beta = 4,0$ .

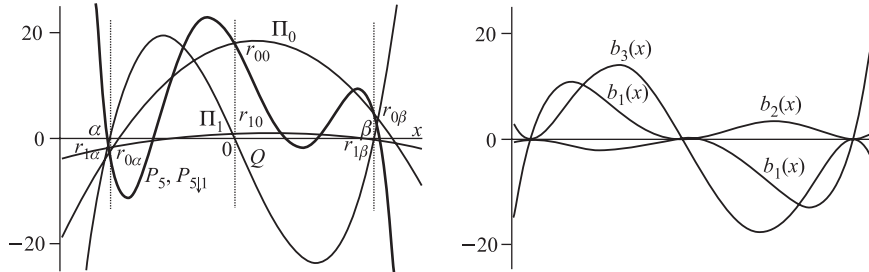


Рис. 2. Представление многочлена 5-й степени через базисные элементы. Графики  $\Pi_0(x), \Pi_1(x), Q(x)$ , многочлена  $P_{5\downarrow 1}(x) = \Pi_0(x) + Q(x)\Pi_1(x)$  (слева) и базисных функций  $\mathbf{b}(x; \alpha, \beta)$  (справа)

**1.6. Векторная запись МБЭ-полинома.** Запишем формулу (17) в векторной форме

$$P_{n\downarrow k}(x; \mathbf{r}_i) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i = \sum_{i=0}^{\lfloor n/3 \rfloor} \sum_{j=1}^3 b_{ij}(x; \alpha, \beta) r_{ij}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{b}_i = Q^i \mathbf{w}^T = [Q^i w_1, Q^i w_2, Q^i w_3] = [b_{i1}, b_{i2}, b_{i3}]^T$ , а  $\mathbf{r}_i^T = [r_{i1}, r_{i2}, r_{i3}]$  — реперные ординаты на параболах  $\Pi_i(x; \alpha, \beta, \mathbf{r}_i)$ , где  $r_{i1} \equiv r_{i\alpha}, r_{i2} \equiv r_{i\beta}, r_{i3} \equiv r_{i0}$ .

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МБЭ-ПОЛИНОМАМИ

Использование МБЭ-многочлена (18) для локального приближения  $f(x) \in C_{[a,b]}^{(k)}$  имеет свои особенности. Структура разложения  $f(x)$  по степеням  $Q = (x - x_0)(x - x_\alpha)(x - x_\beta)$  (18) аналогична структуре формулы тейлоровского разложения  $f(x)$  по степеням  $(x - x_0)$ , в которой значения функции и ее производных вычисляются в точке  $x = x_0$ . При разложении  $f(x)$  по степеням  $Q$  используются формулы (13)–(15), табл. 1 и формулы вычисления функции и ее производных до  $k$ -го порядка включительно в трех точках  $x = x_\nu, \nu = \alpha, \beta, 0$  (рис. 1). При этом весьма важно подчеркнуть, что элементы  $Q$  и  $w_j, j = \overline{1, 3}$ , зависят от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , изменяющих базис, тогда как в тейлоровском разложении базис фиксирован. Рассуждения, подобные тем, что были использованы при доказательстве теоремы I, позволяют сформулировать следующую теорему.

**Теорема II.** Если действительная функция  $f(x), x \in [a, b]$ , одного переменного имеет  $k$  непрерывных производных в точках  $x_0, x_\alpha, x_\beta, x_\alpha < x_0 < x_\beta$ , причем  $x_\alpha$  и  $x_\beta$  находятся вблизи  $a$  и  $b$  соответственно, то  $f(x)$  может быть представлена в виде

$$f(x) = \sum_{i=0}^k Q^i \mathbf{w}^T \mathbf{r}_i + R_{k+1}, \quad k = \lfloor n/3 \rfloor, \quad (20)$$

где  $\mathbf{r}_i$  вычисляются по формулам (13)–(15) на основе  $f(x), \mathbf{w}(x; \alpha, \beta)$  и  $Q(x; \alpha, \beta)$ . При этом остаточный член равен  $R_{k+1} = Q^{k+1} U_{k+1}(x; \alpha, \beta)$ .

**Примечание 3.** В разложении (20) базисные элементы зависят от параметров, изменение которых влияет на величину остаточного члена. В этом случае  $\alpha$  и  $\beta$  являются параметрами регулирования (управления) и от их выбора зависит точность аппроксимации. Вопрос оптимального выбора управляющих параметров представляет отдельную задачу и в данной работе не рассматривается.

**Пример 2.** Найдем МБЭ-полином 5-го порядка ( $k = 1$ ) для приближения  $\sin(x), x \in [-\pi, \pi]$ , ( $\alpha = -\pi, x_0 = 0, \beta = \pi, \gamma = 2\pi$ ). Так как  $\mathbf{r}_0 = [0, 0, 0]^T$ ,  $\sin'_{-\pi} = \sin'_\pi = -1$  и  $\sin'_0 = 1$ , то по формулам (13) найдем  $\mathbf{r}_1 = -\pi^{-2}[1/2, 1/2, 1]^T$ . После подстановки этих значений в (12)

с учетом (9) получим

$$\begin{aligned} \sin(x) &\approx \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0 + Q \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1 = -Q(w_1 + w_2 + 2w_3)/(2\pi^2) = \\ &= -Q(1 + w_3)/(2\pi^2), \text{ или} \\ \sin(x) &\approx -x(x^2 - \pi^2)(2\pi^2 - x^2)/(2\pi^4). \end{aligned}$$

При этом  $\max_{x \in [-\pi, \pi]} |\sin(x) - Q \mathbf{w}^T \mathbf{r}_1| < \max_{x \in [-\pi, \pi]} |\sin(x) - (x - x^3/6 + x^5/120)|$ .

**Пример 3.** На рис. 3, 4 представлены результаты приближения синуса на отрезке  $x \in [-4, 4]$  формулой (20) для  $k = 3$  с параметрами  $\alpha = -\pi - \delta, \beta = -\alpha$ . Показаны графики ошибок и опорные точки для  $U_i(x), i = \overline{0, 4}$ . Для

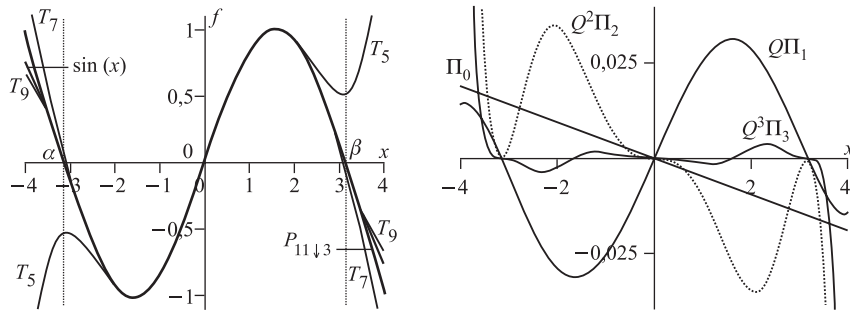


Рис. 3. Аппроксимация  $\sin(x)$  многочленами Тейлора и МБЭ-полиномами с параметрами  $\alpha = -\pi - \delta, \beta = -\alpha$ , где  $\delta = 0,015$  получено подбором параметра  $\alpha$ . Справа показаны графики функций  $Q^i(x)\Pi_i(x), i = \overline{1, 3}$

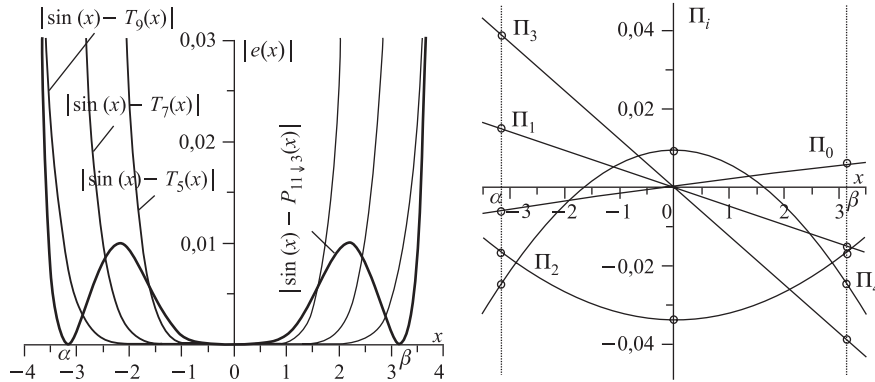


Рис. 4. Модули ошибок аппроксимации (слева) и графики  $\Pi_k(x)$ , проходящие через точки  $r_{i\nu}$  на перпендикулярах  $x = \nu$  (справа). Графики  $\Pi_1(x), \Pi_2(x), \Pi_3(x)$  и  $\Pi_4(x)$  умножены на  $1/3, 100, 3000$  и  $7000$  соответственно

сравнения показаны также графики приближений синуса формулой Тейлора для 5-го, 7-го и 9-го порядков. Параметры  $\alpha$  и  $\beta$  подбирались экспериментально.

Ниже приведены ординаты  $r_{i\nu}$ , рассчитанные по формулам (13), (15) и показанные на рис. 4 справа:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0^T &= [0, 01499943751, -0, 01499943751, 0], \\ \mathbf{r}_1^T &= [-0, 05029383927, -0, 05029383927, -0, 1008374145], \\ \mathbf{r}_2^T &= [0, 00038881521, -0, 00038881521, 0], \\ \mathbf{r}_3^T &= [-8, 227677 \cdot 10^{-6}, -8, 227677 \cdot 10^{-6}, -3, 089631 \cdot 10^{-6}]. \end{aligned}$$

Из рис. 3 видно, что график  $P_{11\downarrow 3} = \Pi_0 + Q\Pi_1 + Q^2\Pi_2 + Q^3\Pi_3$  на границах отрезка находится между  $T_7(x)$  и  $T_9(x)$ , а  $\max |P_{11\downarrow 3}(x)| < \max |T_9(x)|$ ,  $x \in [-4, 4]$  (рис. 4). При этом следует заметить, что для получения  $P_{11\downarrow 3}$  использовались значения только  $f, f', f''$  и  $f'''$  в трех реперных точках, тогда как для приближения формулой Тейлора использовались значения производных до 9-го порядка включительно, что подтверждает выгоду МБЭ в плане *понижения порядка производных и расширения интервала аппроксимации*.

### 3. СТРУКТУРА И СВОЙСТВА МБЭ-МОДЕЛИ

Использование полиномиальной МБЭ-модели  $P_{n\downarrow k}(x; \alpha, \beta; \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_i)$  в задачах сглаживания данных и аппроксимации функций  $f(x) \in C_{[a,b]}$ :

$$f(x) \approx \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0 + \sum_{i=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} \mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i \quad (21)$$

дает ряд преимуществ для практической реализации соответствующих процедур, так как (21) конструктивно и качественно отличается от (5).

*Во-первых*, управляющие параметры  $\alpha$  и  $\beta$  позволяют изменять значения базисных функций. На рис. 5 приведены графики функций  $Q^i w_3$ , ( $\alpha = -0,95, \beta = 0,75$ ) и  $x^i$  на отрезке  $[-1, 1]$ , представляющих степени 3, 5, 8 и 11, а также графики десятичных логарифмов модулей отношений их значений для  $x \in [-1, 1]$  (рис. 5, справа). Графики функций  $\{Q^i w_j\}$  трансформируются в зависимости от значений  $\alpha$  и  $\beta$ .

*Во-вторых*, МБЭ-модель расчленяется на две составляющие — *реперную* ( $\Pi_0 = \mathbf{w}^T \mathbf{r}_0$ ) и *свободную* ( $\mathbf{b}_i^T \mathbf{r}_i$ ).

Фиксированная составляющая модели («реперная парабола»  $\Pi_0$ ) использует данные вместо коэффициентов при меньших степенях  $x$  с возможностью *вычислений по параметрам*  $\alpha$  и  $\beta$ , что существенно расширяет рамки алгоритмизации расчетов. Например, в зависимости от выбора параметров  $x_0, \alpha$

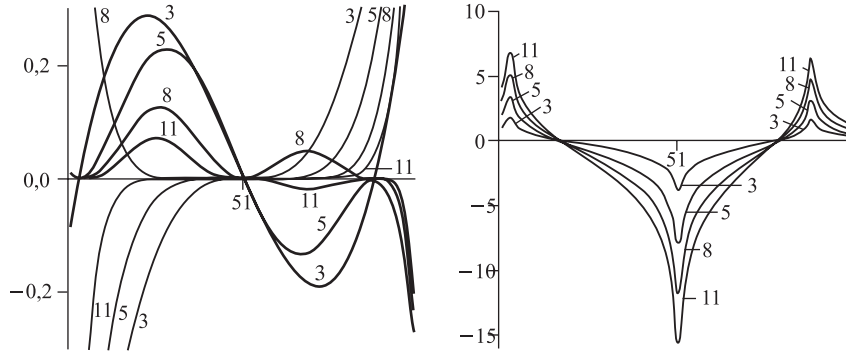


Рис. 5. Графики базисных функций  $x^i$  и  $Q^i w_3(x; \alpha, \beta)$ ,  $i = 3, 5, 8, 11$  (слева). Справа — графики  $\lg|x^i/Q^i w_3|$ ;  $x \in [-1, 1]$  (масштаб графиков 8 и 11 слева увеличен в 2 и 4 раза соответственно)

и  $\beta$  модель (21) можно использовать как в *статическом* (все три параметра фиксированы), так и в *динамическом* (хотя бы один из параметров изменяется синхронно с текущей переменной) режимах [11].

*В-третьих*, выбор «сопровождающих троек» из входных данных  $\{(x_\nu, r_{0\nu})\}$ ,  $\nu = \alpha, \beta, 0$ ,  $r_{0\nu} = f_\nu$ , обеспечивает *естественную привязку* к кривой  $f$ . В зависимости от дисперсии входных ошибок ординаты  $r_{0\nu}$  приравниваются либо соответствующим значениям функции ( $r_{0\nu} \equiv f_\nu$ ), либо их оценкам, полученным усреднением по нескольким соседним точкам ( $r_{0\nu} = \hat{f}_\nu$ ).

*В-четвертых*, дробно-рациональная зависимость базисных функций от параметров позволяет *повышать устойчивость к ошибкам* и *понижать вычислительную сложность* аппроксимационных алгоритмов (для подходящих  $\alpha$  и  $\beta$  знаменатели в  $w_j$  уменьшают ошибки в реперных ординатах, что обеспечивает устойчивость трансформации данных). Например, модель с полиномом 5-й степени можно преобразовать к виду

$$\tilde{f}(x) - \mathbf{w}^T(x; \alpha, \beta) \hat{\mathbf{r}}_0 \approx \mathbf{b}^T(x; \alpha, \beta) \mathbf{r}_1,$$

где  $\hat{\mathbf{r}}_0$  — оценка реперных ординат,  $\mathbf{b}$  — новый базис 5-й степени (рис. 2, справа), а  $\mathbf{r}_1$  — неизвестные ординаты.

При этом происходит устойчивое преобразование ошибки  $e(x) \xrightarrow{e_0} e_u(x)$ , где  $e_0^T = [e_\alpha, e_\beta, e_0]$  — ошибки  $\hat{\mathbf{r}}_0$ , а число коэффициентов ( $\mathbf{r}_1$ ) сокращается до трех:

$$\tilde{u}(x) = \mathbf{b}^T(x; \alpha, \beta) \mathbf{r}_1 + e_u(x). \quad (22)$$

Таким образом, при работе с матрицами число арифметических операций для аппроксимации данных  $\tilde{u}(x) = f(x) - \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}_0 - e(x)$  сравнимо с числом операций в случае квадратичной модели.



#### 4. ПРИМЕНЕНИЕ МБЭ ДЛЯ СГЛАЖИВАНИЯ ДАННЫХ

В этом разделе на основе вычислительных экспериментов показана эффективность МБЭ-модели путем сравнения результатов МНК-сглаживания «оцифрованного» гауссоподобного сигнала полиномами пятой и выше степеней с использованием МБЭ- и канонической (С) модели.

Отметим, что модель (5) при  $n = 5$  содержит шесть неизвестных коэффициентов  $(a_0, a_1 \dots a_5)$ . Обозначим ее нормальную матрицу через  $\mathbf{C}_{6 \times 6}$ . Для МБЭ-модели матрица нормальных уравнений может иметь размерность  $6 \times 6$  с базисом  $\{\mathbf{w}, \mathbf{b}\}$  и неизвестными  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}$  или  $3 \times 3$  с базисом  $\mathbf{b}$ , известной оценке  $\hat{\mathbf{r}}_0$  и неизвестном  $\mathbf{r}$  ( $\mathbf{B}_{6 \times 6}$  и  $\mathbf{B}_{3 \times 3}$  соответственно).

**МБЭ-алгоритм сглаживания.** В случае матрицы  $\mathbf{B}_{6 \times 6}$  ищутся оценки  $\hat{\mathbf{r}}_0$  и  $\mathbf{r}$  по стандартной схеме МНК, а в случае  $\mathbf{B}_{3 \times 3}$  алгоритм выполняется в *три этапа*:

1°. Оценка реперных ординат  $\hat{\mathbf{r}}_0$  по  $2J + 1$  соседним ординатам и преобразование данных  $\tilde{f}_i \xrightarrow{\hat{\mathbf{r}}_0} \tilde{u}_i$ :

$$\hat{r}_{0\nu} = \frac{1}{2J+1} \sum_{j=-J}^J \tilde{f}_j; \quad \tilde{u}_i = \tilde{f}_i - \hat{\Pi}_{0i}, i = \overline{1, N}; \quad \nu = \alpha, \beta, 0. \quad (23)$$

2°. Формирование матрицы нормальных уравнений и вычисление МНК-оценки  $\hat{\mathbf{r}}$  на основе данных  $\tilde{\mathbf{u}} = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \dots \tilde{u}_N]^T$  и базисных функций  $\mathbf{b} = \mathbf{Q}\mathbf{w}$ , по которым вычисляются элементы матрицы  $\mathbf{B}$  и  $\hat{\mathbf{r}}$ :

$$\hat{\mathbf{r}} = [\mathbf{B}^T \mathbf{B}]^{-1} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{u}}. \quad (24)$$

3°. Вычисление оценки  $\hat{f}(x)$  по формуле восстановления (21):

$$\hat{f}(x; \alpha, \beta, \hat{\mathbf{r}}_0, \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{r}}.$$

**Пример 4.** Рассмотрим МНК-сглаживание полиномами 5-й и 11-й степеней для двух моделей — канонической (матрица  $\mathbf{C}_{6 \times 6}$ ) и МБЭ-модели с матрицами  $\mathbf{B}_{3 \times 3}$ ,  $\mathbf{B}_{6 \times 6}$  и  $\mathbf{B}_{12 \times 12}$  для трех наборов данных, полученных «оцифровкой» гауссоподобной функции

$$S(x) = A \exp \left( -\frac{(x-m)^2}{2(s+\omega(x-m))^2} \right).$$

Функция  $S(x)$  моделирует форму сигналов в радиационных детекторах [25]. Для сравнения моделей сделаны расчеты по данным  $\{\hat{S}_i\}, i = \overline{1, N}$ , сгенерированным для трех наборов параметров с ошибками  $e_i \sim N(0, \sigma)$  (табл. 2).

Статистические оценки значений  $\hat{S}(x_i)$  для обеих моделей дают хорошее согласие (рис. 6, 7), хотя значения определителей и чисел обусловленности их

Таблица 2. Параметры сигнала и МБЭ-модели для трех наборов данных

Набор	$N$	$A$	$m$	$s$	$\omega$	$[a, b]$	$\sigma$	$x_0$	$\alpha, \beta$
I	120	1	1	1	0,1	$[-1,4, 4,5]$	0,15	1,4	-2,2, 2,3
II	120	1	-0,23	0,35	0,3	$[-1, 1]$	0,05	-0,25	-0,5, 1,2
III	300	1	1,7	0,8	0,15	$[0, 7,0]$	0,1	3,7	-3,3, 3,1

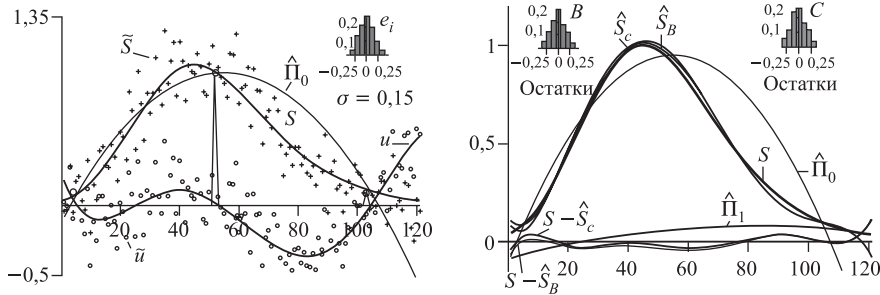


Рис. 6. Сигнал  $S(x)$ , его «оцифровка»  $\tilde{S}$  и данные  $\tilde{u} = \tilde{S} - \hat{\Pi}_0$ . Справа — исходный сигнал  $S$ , его оценки  $\hat{S}_B = \hat{\Pi}_0 + Q\hat{\Pi}_1$ ,  $\hat{S}_C$ , гистограммы остатков и невязки  $S - \hat{S}_*$ , а также  $\hat{\Pi}_0, \hat{\Pi}_1$  (набор данных I)

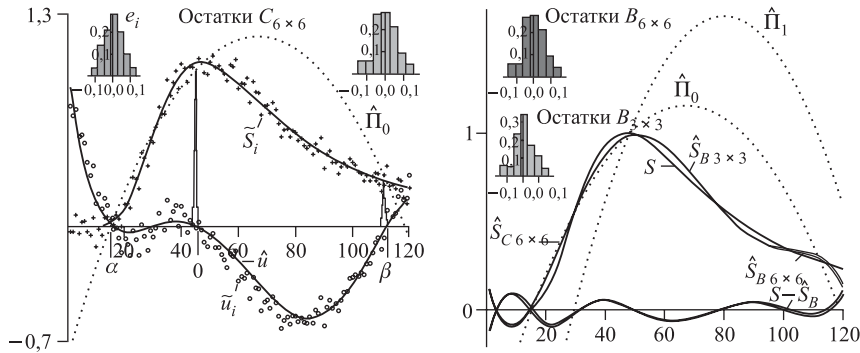


Рис. 7. Сигнал  $\tilde{S}_i$  и данные  $\tilde{u}_i$ . Справа — исходный сигнал  $S$ , его оценки  $\hat{S}_{B_{3 \times 3}}$ ,  $\hat{S}_{B_{6 \times 6}}$ ,  $\hat{S}_{C_{6 \times 6}}$ , гистограммы остатков и невязки  $S - \hat{S}_{B_{6 \times 6}}$  (набор данных II)

нормальных матриц существенно различны (табл. 3, 4). Далее на графиках и в тексте МНК-оценки  $\hat{S}$  для МБЭ-модели обозначены как  $\hat{S}_B$ , а оценки, полученные с использованием канонической модели, как  $\hat{S}_C$ .

Оценки реперных ординат  $\hat{r}_0^T = [\hat{r}_{0\alpha}, \hat{r}_{0\beta}, \hat{r}_{00}]$  вычислены усреднением по семи ближайшим точкам с ошибками  $e_0^T = [0,0053, 0,0043, -0,0238]$  для первого набора и  $e_0^T = [-0,005, -0,011, 0,030]$  для второго.

Таблица 3. Результаты для первого набора данных ( $x \in [-1, 4, 4, 5]$ )

Операция	$\mathbf{C}_{6 \times 6}$	$\mathbf{B}_{6 \times 6}$	$\mathbf{B}_{3 \times 3}$
$\det(\mathbf{A})$	$2,717895053 \cdot 10^{17}$	$1,011068478 \cdot 10^{12}$	$4,376978762 \cdot 10^4$
$\det(\mathbf{A}^{-1})$	$3,67931793 \cdot 10^{-18}$	$9,89052693 \cdot 10^{-13}$	$2,28468095 \cdot 10^{-5}$
$\mu(\mathbf{A})$	<b>43933,21348</b>	<b>165,1123553</b>	<b>3,087489426</b>
$\rho_e$	0,2389887152	0,2389887164	0,2396251877
$ \text{dev} _{\max}$	0,1169980906	0,1169981224	0,1155876900

Таблица 4. Результаты для второго набора данных ( $x \in [-1, 1]$ )

Операция	$\mathbf{C}_{6 \times 6}$	$\mathbf{B}_{6 \times 6}$	$\mathbf{B}_{3 \times 3}$
$\det(\mathbf{A})$	<b>17083,41889</b>	<b>28486,83940</b>	<b>2,638593740</b>
$\det(\mathbf{A}^{-1})$	$5,8536292 \cdot 10^{-5}$	$3,5103930 \cdot 10^{-5}$	0,378989757
$\mu(\mathbf{A})$	<b>4823,689752</b>	<b>200,5616621</b>	<b>9,401765301</b>
$\rho_e$	0,1019066494	0,1019066503	0,1019066504
$ \text{dev} _{\max}$	0,1185953608	0,1185953664	0,1185953659

При использовании моделей с шестью коэффициентами выборка  $\{\tilde{S}_i\}$  обрабатывалась процедурой из пакета Maple *LeastSquares*(·). Кривая регрессии  $\hat{S}(x)$  с матрицей  $\mathbf{B}_{3 \times 3}$  была восстановлена по формуле  $\hat{S}(x; \alpha, \beta) = \hat{\Pi}_0(x; \alpha, \beta; \hat{\mathbf{r}}_0) + Q(x; \alpha, \beta) \hat{\Pi}_1(x; \alpha, \beta; \hat{\mathbf{r}})$ . Поведение невязки  $S(x) - \hat{S}(x; \alpha, \beta)$  для каждой модели показано справа, в нижней части рис. 6, 7. Также приведены графики  $S(x)$ ,  $\hat{S}_{B_{3 \times 3}}$ ,  $\hat{S}_{B_{6 \times 6}}$  и  $\hat{S}_{C_{6 \times 6}}$  (два последних графика совпадают). Как по самому графику, так и по невязке видно, что оценка  $\hat{S}_{B_{3 \times 3}}$  находится ближе к истинной кривой. Такой результат получается за счет реперной привязки модели к данным, однако он вызывает незначительное смещение центра гистограммы остатков.

В табл. 2 приведены значения определителей  $\det(\mathbf{A})$ ,  $\det(\mathbf{A}^{-1})$  и чисел обусловленности  $\mu(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2 \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|_2$  матриц нормальных уравнений соответствующей модели. В последних двух строках табл. 3, 4, 5 приведены значения глобальной относительной ошибки

$$\rho_e = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\tilde{S}_i - \hat{S}_i)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^N \tilde{S}_i^2},$$

и модуль максимального отклонения  $|\text{dev}|_{\max} = \max\{|S_i - \hat{S}_i|\}_{i=1}^N$  для каждой модели. Видно, что ошибки в оценках  $\hat{S}_{C_{6 \times 6}}$  и  $\hat{S}_{B_{6 \times 6}}$  практически со-

падают, тогда как значения определителей их нормальных матриц (прямой и обратной) различаются на 5 порядков при отношении их чисел обусловленности  $\mu(\mathbf{C}_{6 \times 6})/\mu(\mathbf{B}_{6 \times 6}) > 265$ .

На рис. 7 и в табл. 4 приведены аналогичные результаты.

Оценка  $\hat{S}$  (вариант  $\mathbf{B}_{3 \times 3}$ ) вычислялась в виде  $\hat{S} = \mathbf{w}^T \hat{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{b}^T \hat{\mathbf{r}}_1 = \hat{\Pi}_0 + \hat{Q}\Pi_1$ , где  $\hat{\mathbf{r}}_0^T = [0,03251752380, 0,2884184664, 0,9687460471]$  получен усреднением по семи соседним точкам (23), а МБЭ-оценка  $\hat{\mathbf{r}}_1^T = [-0,9787216345, 0,9828752736, 0,9231061073]$  получена на основе преобразованных данных по формуле (24).

Оценки опорных ординат  $\hat{\mathbf{r}}_0, \hat{\mathbf{r}}_1$  (вариант  $\mathbf{B}_{6 \times 6}$ ):  $\hat{\mathbf{r}}_0^T = [0,0447019517, 0,305538972, 0,967090115]$  и  $\hat{\mathbf{r}}_1^T = [-0,978721637, 0,982875274, 0,923106105]$ . Параболы  $\hat{\Pi}_0$  и  $\hat{\Pi}_1$  показаны на рис. 7 справа. Вектор оценок коэффициентов для матрицы  $\mathbf{C}_{6 \times 6}$  равен  $\hat{\mathbf{a}}^T = [-2,343326201, 4,037989719, 0,6327394797, -3,530327311, 0,5726347, 0,9670901765]$ .

При обработке третьего набора данных использовалась МБЭ-модель с 12 коэффициентами  $\hat{\mathbf{r}}_j$ :

$$S(x) = \Pi_0(x; \mathbf{r}_0) + Q\Pi_1(x; \mathbf{r}_1) + Q^2\Pi_2(x; \mathbf{r}_2) + Q^3\Pi_3(x; \mathbf{r}_3) + e(x).$$

МНК-оценки  $\hat{r}_{ij}$  получены из условия (см. формулу (19))

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}_{ij}} \sum_{k=1}^N [\tilde{S}_k - \sum_{i=0}^3 \sum_{j=1}^3 b_{ijk} \hat{r}_{ij}]^2 = 0,$$

где  $b_{ijk} = Q^i(\tau_k)w_j(\tau_k)$ ,  $\tau_k = x_k - x_0$ . В табл. 5 приведены значения определителей, чисел обусловленности матриц нормальных уравнений и глобальные оценки точности для МБЭ- и С-моделей.

Результаты сглаживания и промежуточные результаты (включая базисные функции и элементы) приведены на рис. 8, 9. Оценки опорных ординат  $\hat{r}_i$  для квадратичных парабол  $\Pi_i, i = \overline{0, 3}$ , показаны справа на рис. 8, а их

**Таблица 5. Результаты для третьего набора данных ( $x \in [0, 7]$ )**

Величина	$\mathbf{C}_{12 \times 12}$	$\mathbf{B}_{12 \times 12}$	Фактор
$\det(\mathbf{A})$	$4,956460145 \cdot 10^{63}$	$1,455147291 \cdot 10^{49}$	$3,406157009 \cdot 10^{14}$
$\det(\mathbf{A}^{-1})$	$2,015242586 \cdot 10^{-64}$	$6,872156500 \cdot 10^{-50}$	$2,932474815 \cdot 10^{-15}$
$\mu(\mathbf{A})$	$9,025308527 \cdot 10^{12}$	$1,656274031 \cdot 10^7$	$5,449163821 \cdot 10^5$
$\rho_e$	0,02647408101	0,02647406692	1,000000532
$ \text{dev} _{\max}$	0,3807327671	0,3807322134	1,000001454

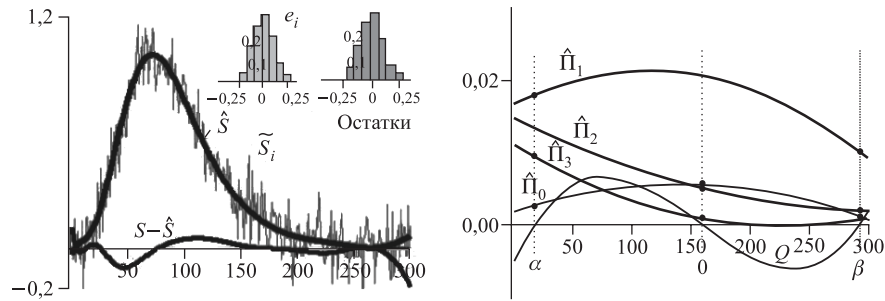


Рис. 8. Сглаживание сигнала  $\hat{S}(x), x \in [0, 7]$  полиномом 11-й степени; верху — гистограммы входных ошибок и остатков; внизу — отклонение  $S(x) - \hat{S}(x)$ . Справа — графики парабол  $\hat{P}_i(x), i = 0, 3$ , и  $Q(x)$  с множителями 0,03, 1, 5, 50 и 0,0005 соответственно (набор данных III)

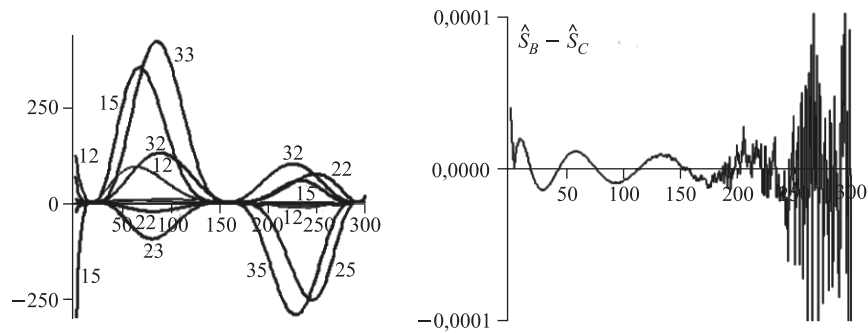


Рис. 9. Слева — графики базисных функций  $b_{ji}$  (функции  $b_{13}, b_{23}$  и  $b_{33}$  уменьшены в три раза); справа — разность оценок  $\hat{S}_B(x) - \hat{S}_C(x)$

значения равны

$$\hat{\mathbf{r}}_0^T = [0, 0920750834, 0, 0410621063, 0, 188424410],$$

$$\hat{\mathbf{r}}_1^T = [0, 0178529547, 0, 0101572284, 0, 020526047],$$

$$\hat{\mathbf{r}}_2^T = [0, 0026828853, 0, 0004179276, 0, 001036583],$$

$$\hat{\mathbf{r}}_3^T = [0, 0001866736, 0, 0000137170, 0, 000017215].$$

На рис. 10 приведены результаты сглаживания одного и того же набора данных ( $N = 1000$ ) (график слева) известным пакетом «Гусеница» [26] и МНК с МБЭ-полиномиальной моделью с 12 коэффициентами и матрицей  $\mathbf{B}_{12 \times 12}$ . В верхней части правого рисунка показан график точечных оценок в системе осей (МБЭ, ГУС).

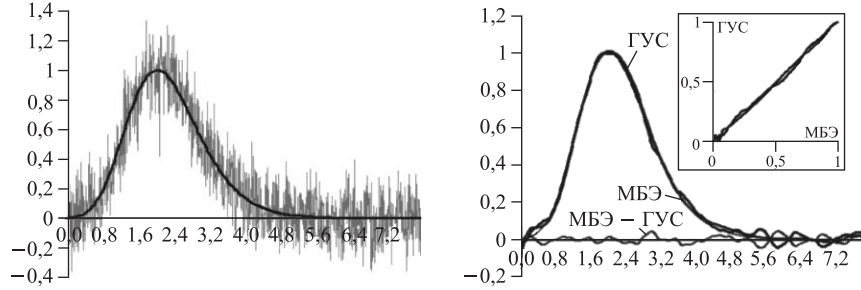


Рис. 10. Слева — аддитивно искаженный сигнал на входе; справа — результаты сглаживания двумя методами и разность оценок  $\hat{S}_{\text{МБЭ}}(x) - \hat{S}_{\text{ГУС}}(x)$

## 5. РЕКУРСИВНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ $\hat{\mathbf{r}}$

На примере модели с шестью параметрами покажем, как можно понизить вычислительную сложность рекурсивного метода наименьших квадратов (РНК), используя реперные ординаты и МБЭ-модель (22) с матрицей  $\mathbf{B}_{3 \times 3}$ .

С учетом трансформации  $\tilde{f}_i \xrightarrow{\tilde{\mathbf{r}}_0} \tilde{u}_i$  исходная модель с шестью коэффициентами редуцируется к модели (22) с тремя неизвестными коэффициентами  $r_j$ :

$$u(x) \approx \sum_{j=1}^3 b_j r_j, \text{ где } b_j = Q w_j. \quad (25)$$

При вычислении оценки  $\hat{\mathbf{r}}$  по РНК-алгоритму на вход подается временная последовательность точек  $\{\tilde{f}_i\}_{i=1,2,\dots}$ , упорядоченных по  $x$  ( $x_i < x_{i+1}$ ), с неизвестным заранее  $N$ .

В работе [11] для оценки свободного параметра  $\theta$  в кубической 4-точечной модели использовался режим вычисления по параметрам, где  $\beta$  синхронно изменялся с  $x_n$  при фиксированных  $\alpha$  и  $x_0$ . Здесь рассматривается схема, в которой все параметры фиксированы, а оценки реперных ординат предварительно найдены, что позволяет вычислять  $\tilde{u}_i$  с ошибками  $e_{u_i} = (e_i - e_\alpha w_{1i} - e_\beta w_{2i} - e_0 w_{3i})$ , где  $e_i$  — ошибка  $f_i$ , а  $e_\alpha$ ,  $e_\beta$  и  $e_0$  — ошибки в оценках реперных ординат (23).

Формула (24) дает оценку  $\hat{\mathbf{r}}^T = [\hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3]$  для модели (25) в матричной форме. В принципе,  $\hat{\mathbf{r}}$  можно вычислять для каждой точки  $(x_n, \tilde{u}_n)$  по мере их поступления. Однако для этого потребуются большой объем вычислений, так как коэффициенты  $\hat{r}_j$  будут каждый раз пересчитываться заново.

В адаптивной процедуре вычисления  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$  на текущем шаге используется значение ошибки  $\varepsilon_n = \tilde{u}_n - \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}$ , полученное на предыдущем шаге.

В этом случае требуется только увеличение объема вычислений на каждом шаге, что, по существу, аналогично схеме калмановского процесса.

Разработку РНК-алгоритма для вычисления  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$  рассмотрим по схеме работы [14]. Как отмечалось выше, на вход алгоритма поступает последовательность  $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots\}$  с ошибкой на выходе  $n$ -го шага:

$$\varepsilon_n = \tilde{u}_n - \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Оптимальная оценка  $\hat{\mathbf{r}}_n$  ищется из условия минимума суммы квадратов ошибок

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2 \rightarrow \min_{\hat{\mathbf{r}}}.$$

Решение  $\hat{\mathbf{r}}_n$  для модели (22) запишется в виде (24), где  $\mathbf{B}_n$  — матрица значений базисных функций размерности  $n \times 3$ ,  $\tilde{\mathbf{u}}_n$  — вектор данных размерности  $n \times 1$  и  $[\mathbf{B}_n^T \mathbf{B}_n]^{-1}$  — размерности  $3 \times 3$ . Обозначим  $\Omega_n = [\mathbf{B}_n^T \mathbf{B}_n]^{-1}$  и запишем (24) для  $(n-1)$  точек:

$$\hat{\mathbf{r}}^{(n-1)} = \Omega_{n-1} \mathbf{B}_{n-1}^T \tilde{\mathbf{u}}_{n-1}.$$

При переходе от  $(n-1)$  к  $n$  структура обратной матрицы  $\Omega_n$  принимает вид

$$\Omega_n = [\mathbf{B}_{n-1}^T \mathbf{B}_{n-1} + \mathbf{b}_n \mathbf{b}_n^T]^{-1}, \quad (26)$$

где  $\mathbf{b}_n^T = [Q_n w_{1n}, Q_n w_{2n}, Q_n w_{3n}]$  вычисляется в точке  $\tau_n$ .

Применяя к правой части (26) лемму об обращении матриц [24], получим формулу для вычисления обратной матрицы  $\Omega_n$  через  $\Omega_{n-1}$ :

$$\Omega_n = \Omega_{n-1} - \underbrace{\Omega_{n-1} \mathbf{b}_n [1 + \mathbf{b}_n^T \Omega_{n-1} \mathbf{b}_n]^{-1} \mathbf{b}_n^T \Omega_{n-1}}_{\mathbf{k}_n}, \quad (27)$$

где множитель

$$\mathbf{k}_n = \Omega_{n-1} \mathbf{b}_n [1 + \mathbf{b}_n^T \Omega_{n-1} \mathbf{b}_n]^{-1} \quad (28)$$

называется *коэффициентом усиления*.

Запишем выражение для  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$ :

$$\hat{\mathbf{r}}^{(n)} = \Omega_n \mathbf{B}_n^T \tilde{\mathbf{u}}_n = \Omega_n [\mathbf{B}_{n-1}^T \tilde{\mathbf{u}}_{n-1} + \mathbf{b}_n \tilde{u}_n]. \quad (29)$$

После подстановки правой части (27) в (29) вместо  $\Omega_n$ , раскрытия скобок и приведения подобных получим рекуррентную формулу для вычисления  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$ :

$$\hat{\mathbf{r}}^{(n)} = \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)} + \mathbf{k}_n [\tilde{u}_n - \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}]. \quad (30)$$

РНК-алгоритм вычисления оценки  $\hat{\mathbf{r}}^{(n)}$  для редуцированной модели, включая формулы (27), (28) и (30), окончательно принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_n &= \mathbf{\Omega}_{n-1} \mathbf{b}_n [1 + \mathbf{b}_n^T \mathbf{\Omega}_{n-1} \mathbf{b}_n]^{-1}, \\ \hat{u}_n &= \mathbf{b}_n^T \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)}, \varepsilon_n = \tilde{u}_n - \hat{u}_n, \\ \hat{\mathbf{r}}^{(n)} &= \hat{\mathbf{r}}^{(n-1)} + \mathbf{k}_n \varepsilon_n, \\ \mathbf{\Omega}_n &= \mathbf{\Omega}_{n-1} - \mathbf{k}_n \mathbf{b}_n^T \mathbf{\Omega}_{n-1}, \end{aligned} \quad (31)$$

где  $\mathbf{\Omega}_0 = \sigma \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  — единичная матрица,  $\hat{\mathbf{r}}^{(0)} = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$

**Пример 5.** Эффективность РНК-алгоритма (31) показана на примере сглаживания выборки точек  $\{\tilde{S}_i\}_{i=1}^{500}$ ,  $\sigma = 0,3$ ,  $h = 0,0088$ , рассеянных вокруг полинома  $P_5 = 0,03(x^5 + 3,5x^4 - 12,71x^3 - 22,725x^2 + 29,325x + 46,41)$ ,  $x \in [-1,7, 2,7]$ , на основе модели (25) с параметрами  $\alpha = -1,55$ ,  $x_0 = 0,01$ ,  $\beta = 2,1$  (рис. 11–13) и репером  $\hat{r}_0^T = [0,1976281418, -0,06080134616, 1,312190607]$ , усредненным по 11 соседним точкам. Процесс вычисления РНК-оценки  $\hat{\mathbf{r}}$  показан на графиках траекторий  $r_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$  (рис. 12).

На рис. 13 показаны графики коррекции ошибок  $\varepsilon_n = \tilde{u}_n - \hat{u}_n$  при вычислении  $\hat{\mathbf{r}}^T = [-0,2780076451, 0,1681186476, -0,2507904166]$ . Окончательно, с учетом  $\hat{\mathbf{r}}_0$  и  $\hat{\mathbf{r}}$ , численное решение примера 5 запишется через базисные элементы  $Q$  и  $w_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , в виде  $\hat{S} = 0,1976281418w_1 - 0,06080134616w_2 + 1,312190607w_3 - Q(0,2780076451w_1 - 0,1681186476w_2 - 0,2507904166w_3)$ .

Как отмечается в [14], оценка вычислительной сложности полученного алгоритма составляет  $2,5m^2 + 4m$  арифметических операций на один шаг итерации ( $m$  — число коэффициентов полинома), т. е. вычислительная сложность возрастает пропорционально квадрату порядка модели, что неприемлемо для практики в случае аппроксимации полиномами степени выше трех.

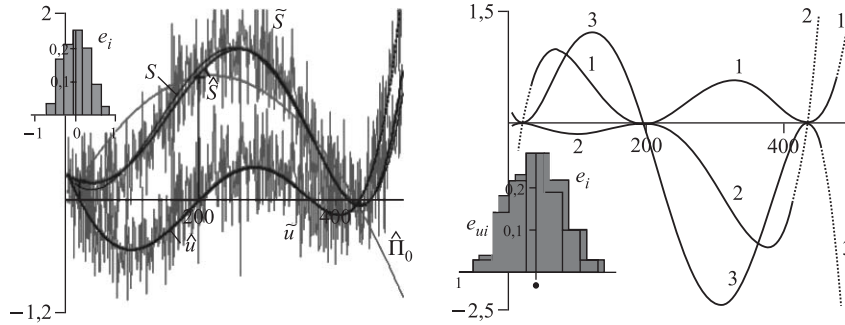


Рис. 11. Слева —  $\tilde{S}(x_i)$ ,  $\tilde{u}(\tau_i)$ , их РНК-оценки и парабола  $\hat{\Pi}_0(\tau; \alpha, \beta)$ . Справа — элементы  $b_j = Qw_j$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , и наложение гистограмм ошибок  $e_{u_i}$  и  $e_i$



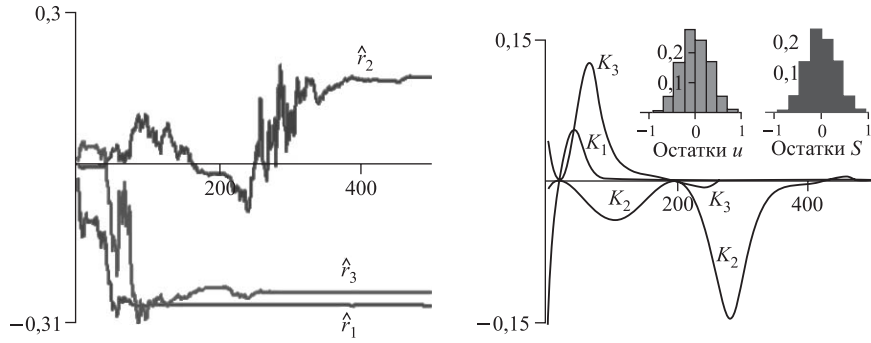


Рис. 12. Слева — траектории РНК-оценок  $\hat{r}_j$ . Справа — коэффициенты усиления  $K_j, j = \overline{1,3}$ , и гистограммы остатков  $\hat{S}_i - \hat{S}_i$  и  $\hat{u}_i - \hat{u}_i$

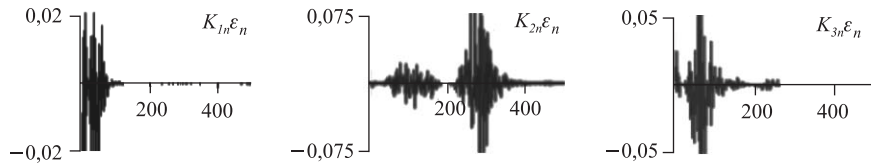


Рис. 13. Коррекция ошибок  $\varepsilon_n$  коэффициентами усиления  $K_{jn}, j = \overline{1,3}$

В нашем примере путем редукции модель 6-го порядка приведена к модели с тремя неизвестными коэффициентами и оценка ее вычислительной сложности составляет  $2,5 \times 3^2 + 4 \times 3 \approx 35$  операций на один шаг против 114 для модели с 6 коэффициентами, т. е. число операций уменьшается более чем в 3 раза, что делает алгоритм пригодным для практических применений.

Полученную оценку  $\hat{r}$  можно использовать для новой трансформации данных, что позволяет итерациями уточнять вектор реперных ординат.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в работе метод базисных элементов повышает вычислительную эффективность при решении задач полиномиальной аппроксимации функций и сглаживания экспериментальных данных. Идея МБЭ состоит в новом координатно-параметрическом представлении полинома тремя квадратичными ( $w_1, w_2, w_3$ ) и одной кубической ( $Q$ ) параболой — *базисными элементами*. Четыре базисных элемента определяются координатами четырех

точек по специальному правилу сложного отношения и зависят от параметров  $\alpha, \beta, x_0$ . Коэффициенты МБЭ-модели определяются как по самой функции, так и по ее производным. Метод использует меньший порядок производных при полиномиальной аппроксимации функций по сравнению с формулой Тейлора, обеспечивает необходимую точность вычислений и расширяет границы применения существующих методов при создании алгоритмов обработки данных за счет:

- изменения конструкции полинома (качество модели);
- введения управляющих параметров (гибкость);
- устойчивой трансформации зашумленных данных (понижение сложности);
- уменьшения свободных коэффициентов полинома (редукция порядка модели);
- уменьшения числа обусловленности нормальной матрицы (устойчивость вычислений);
- редукции порядка модели в методе РНК (скорость вычислений);
- возможности вычислений по параметрам (выбор режима) и др.

Перечисленные возможности метода подтверждены численными экспериментами с использованием МНК- и РНК-расчетов и сравнением основных характеристик, полученных при таких расчетах для МБЭ и канонической модели.

Ключевой момент использования МБЭ на практике состоит в адекватном выборе параметров  $\alpha, \beta, x_0$ . Параметр сдвига  $x_0$  позволяет выбирать положение «окна» с данными, тогда как его ширина (база) определяется параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ , от которых зависят базисные элементы и их производные, влияющие на уровень подавления ошибок при трансформации данных и на точность аппроксимации. Вопрос оптимального выбора параметров в работе не обсуждается и пока остается открытым. Рекомендуется выбирать  $\alpha$  и  $\beta$  по разные стороны от  $x_0$  и вблизи границ промежутка («окна»).

Работа выполнена при поддержке гранта полномочного представителя Правительства Словакии в ОИЯИ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.
2. Лоусон Ч., Хенсон Р. Численное решение задач метода наименьших квадратов. М.: Наука, 1986.
3. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980.

4. Мэйндоналд Дж. Вычислительные алгоритмы в прикладной статистике. М.: ФиС, 1988.
5. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.
6. Dikoussar N.D. Four-Point Transformation Methods in Approximation and the Smoothing Problems // Phys. of Part. Nucl. Lett. 2008. V. 5, No. 3. P. 317–323.
7. Дикусар Н. Д. Дискретные проективные преобразования на координатной плоскости // Математическое моделирование. 1991. Т. 10, № 3. С. 50–64.
8. Dikoussar N.D. Function Parametrization by Using 4-Point Transforms // Comput. Phys. Commun. 1997. V. 99. P. 235–254.
9. Дикусар Н. Д. Кусочно-кубическое приближение и сглаживание кривых в режиме адаптации. Сообщ. ОИЯИ Р10-99-168. Дубна, 1999.
10. Török Cs., Dikoussar N.D. Approximation with Discrete Projective Transformation // Comput. Math. Appl. 1999. V. 38. P. 211–220.
11. Дикусар Н. Д., Торок Ч. Автоматический поиск узлов для кусочно-кубической аппроксимации // Математическое моделирование. 2006. Т. 18, № 3. С. 23–40.
12. Dikoussar N.D., Török Cs. Data Smoothing by Splines with Free Knots // Phys. Part. Nucl. Lett. 2008. V. 5, No. 3. P. 324–327.
13. Dikoussar N.D., Török Cs. On One Approach to Local Surface Smoothing // Kybernetika. 2007. V. 43, No. 4. P. 533–546.
14. Фридлиндер Б. Адаптивные алгоритмы для фильтров с конечной импульсной характеристикой // Адаптивные фильтры / Ред. К.Ф.Н. Коуэн, П.М. Грант. М.: Мир, 1988. С. 45–81.
15. Dikoussar N.D. A Local Cubic Smoothing in an Adaptation Mode. E10-2001-48. Dubna, 2001. 21p.
16. Торок Ч., Дикусар Н. Д. MS.NET-компоненты для кусочно-кубической аппроксимации. Сообщ. ОИЯИ Р10-2004-202. Дубна, 2004.
17. Хардле В. Прикладная непараметрическая регрессия. М.: Мир, 1993.
18. Вазан М. Т. Стохастическая аппроксимация. М.: Мир, 1972.
19. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
20. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: ФМЛ, 1978.
21. Дрейпер Н. Р., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. 3-е изд. М.–С.-Пб.–Киев: Диалектика, 2007.

22. *Бартедьев О.В.* Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Ч.2. М.: Диалог-МИФИ, 2000.
23. Maple 9 Learning Guide. Toronto: Maplesoft. Waterloo Maple Inc., 2003.
24. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1999. С. 58.
25. *Basilio Simoes J., Simoes P. C. P. S., Correia C. M. B. A.* Nuclear Spectroscopy Pulse Height Analysis Based on Digital Signal Processing Techniques // IEEE Transactions on Nuclear Science. 1995. V. 42, No. 4. P. 700–704.
26. *Golyandina N., Nekrutkin V., Zhigljavsky A.* Analysis of Time Series Structure — SSA and Related Techniques. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton. Florida, 2001. P. 13–78.

Получено 13 августа 2009 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 16.11.2009.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,81. Уч.-изд. л. 2,24. Тираж 310 экз. Заказ № 56775.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)