

P1-2016-71

А. В. Беляев, А. П. Иерусалимов,
Ф. Которобай *, В. Н. Печенов **, В. С. Рихвицкий

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ ФИТ

* IFIN, Бухарест–Магуреле, Румыния

** GSI, Дармштадт, Германия

Беляев А. В. и др.
Кинематический фит

P1-2016-71

При измерениях, проводимых в экспериментальной физике частиц, для каждой частицы, участвующей во взаимодействии или распаде, индивидуально находят кинематические параметры — модуль импульса и углы вылета. Из-за ошибок, возникающих при измерениях, в совокупности полученных кинематических параметров в той или иной степени не выполняются законы сохранения энергии-импульса. Разработанная еще в 60-х гг. XX в. процедура кинематического фитирования (kinematical fit) уточняет значения кинематических параметров, устраняет их несоответствие законам сохранения и уменьшает их ошибки.

В настоящей работе кратко, но исчерпывающе описан алгоритм кинематического фитирования. Изложение ведется в матричном виде. Представляются новые особенности тестирования и использования результатов фитирования. На моделированных материалах np -взаимодействия с помощью критерия согласия Колмогорова показано, что процедура кинематического фитирования не вносит систематических искажений в численные результаты.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2016

Belyaev A. V. et al.
The Kinematical Fit

P1-2016-71

At measurements performed in experimental particle physics, for every particle taking part in collision or decay, kinematical parameters such as momentum and exit angles are fixed individually. Due to measurement errors the conservation laws of energy and momentum are violated in this set of kinematical parameters. The procedure of “kinematical fitting”, which was developed as early as the sixties of the 20th century, makes values of kinematical parameters more precise, eliminates violations of the conservation laws and makes smaller errors in parameters.

In this work the algorithm of kinematical fitting is described briefly but enough to create a program code. The matrix representation is used. New details of testing and using of results of fitting are presented. At the Monte Carlo generation of the np -interaction using the Kolmogorov criterion, it was shown that the kinematical fit procedure does not imbed systematical errors in its results.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2016

ВВЕДЕНИЕ

Процедура кинематического фитирования для экспериментальной физики частиц подробно представлена в [1]. Описанию подобной процедуры посвящены также работы [2–7]. Данная процедура фитирования базируется на [1]; с начала 1980-х гг., неоднократно модифицируемая, она применялась при измерении np -взаимодействий [8] с импульсом налетающего нейтрона от 1,25 до 5,20 ГэВ/с (np -эксперимент), изучавшихся с помощью однометровой водородной пузырьковой камеры ЛФВЭ ОИЯИ (Дубна) [9].

Процедура применялась также при изучении pp -взаимодействий с энергией налетающего протона 2,2 и 3,5 ГэВ на установке HADES GSI (Дармштадт) [10].

Входными данными для описываемой процедуры кинематического фитирования являются измеренные кинематические параметры частиц, участвующих во взаимодействии (в столкновении или при распаде), например, импульс и углы вылета, их измерительные ошибки, а также их массы. Численные значения измеренных кинематических параметров предполагаются случайными величинами с нормальным гауссовым распределением. При этом — из-за реальных ошибок измерения — в совокупности измеренных кинематических параметров (по всем частицам взаимодействия) законы сохранения энергии и импульса в большей или меньшей степени не соблюдаются.

Задача кинематического фитирования — выполнить подгонку совокупности кинематических параметров так, чтобы последние, по-прежнему обладая свойствами случайных гауссовых величин, «наилучшим образом» приблизились к точным параметрам взаимодействия частиц и одновременно обеспечили соблюдение законов сохранения энергии и импульса.

В описываемом np -эксперименте исследуются события с одной вершиной, причем в числе вторичных частиц рассматривается не более одной нейтральной. В качестве кинематических параметров частиц выбираются три независимо измеряемые случайные величины. Поскольку заряженная частица в пространстве пузырьковой камеры оставляет след (трек) в виде винтовой линии с осью z , направленной вдоль силовых линий магнитного поля, в качестве кинематических параметров можно выбирать:

1) проекцию p_{xy} импульса частицы на плоскость (xy) , которая связана с кривизной K и радиусом R винтовой линии известными пропорциями $R \sim p_{xy}$, $K \sim 1/p_{xy}$;

2) широтный угол α — угол подъема винтовой линии (или его тангенс), определяющий связь между импульсом p и его проекцией на плоскость (xy) : $p_{xy} = p \cdot \cos \alpha$;

3) азимутальный угол β .

Как показывает опыт, для конкретного случая np -эксперимента вместо проекции p_{xy} можно использовать непосредственно импульс p . В [1] установлена параметризация $(1/(p \cos \alpha), \operatorname{tg} \alpha, \beta)$, в [11] — $(1/p, \alpha, \beta)$. В описываемой процедуре предусмотрены — по выбору — параметризации $(p, \operatorname{tg} \alpha, \beta)$ и $(1/p, \operatorname{tg} \alpha, \beta)$. Компоненты импульса частиц для параметризации $(p, \operatorname{tg} \alpha, \beta)$ в случае однометровой пузырьковой камеры записываются в виде

$$p_x = p \frac{\cos \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad p_y = p \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \quad p_z = -p \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}.$$

След от пучковой частицы в np -эксперименте отсутствует и поэтому не измеряется. Следовательно, кинематические параметры налетающего нейтрона в конкретном событии не определены, но задаются всякий раз в качестве начальных приближений в виде некоторых средних величин, полученных из внешних соображений. Но, поскольку дисперсии кинематических параметров пучкового нейтрона в np -эксперименте сравнимы по величине с дисперсиями кинематических параметров вторичных частиц, пучковый нейтрон в настоящей процедуре подвергается фитированию наряду со вторичными частицами. В соответствии с этим принимается, что кинематические параметры пучкового нейтрона измерены (хотя и не так, как вторичные частицы).

Параметры единственной допустимой в данной процедуре нейтральной частицы (среди вторичных) не измеряются, но определяются в ходе вычислений.

ПАРАМЕТРЫ ИЗМЕРЕННЫЕ И ФИТИРУЕМЫЕ

Пусть в событии имеется n частиц, кинематические параметры которых измерены. Установим, что частица с номером 1 есть пучковая, а частицы с номерами от 2 до n — вторичные заряженные (следовательно, измеренные). В дальнейшем измеренные кинематические параметры будем снабжать верхней пометкой m (measured). Вводится вектор измеренных данных (вектор-столбец с $N = 3n$ компонентами)

$$\mathbf{x}^m = (x_1^m \ x_2^m \ x_3^m \ \dots \ x_{3i-2}^m \ x_{3i-1}^m \ x_{3i}^m \ \dots \ x_{3n-2}^m \ x_{3n-1}^m \ x_{3n}^m)^T \quad (i = 1, n),$$

где для параметризации $(p, \text{tg}\alpha, \beta)$

$$\begin{aligned} x_1^m &= p_1^m, & x_2^m &= \text{tg}\alpha_1^m, & x_3^m &= \beta_1^m, \dots, \\ x_{3n-2}^m &= p_n^m, & x_{3n-1}^m &= \text{tg}\alpha_n^m, & x_{3n}^m &= \beta_n^m. \end{aligned}$$

Компоненты вектора \mathbf{x}^m содержат ошибки измерения. Ковариационная матрица, или матрица ошибок (размерностью $N \times N$)

$$\mathbf{G}^{-1} = \left\{ \delta\mathbf{x}^m \cdot \delta\mathbf{x}^{mT} \right\}_{NN}$$

(здесь $\delta\mathbf{x}^m$ — вектор-столбец с N компонентами), формируется из ковариационных матриц для каждой частицы:

$$\mathbf{G}^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} \text{cov}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{cov}_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \text{cov}_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{cov}_n \end{array} \right).$$

Для параметризации $(p, \text{tg}\alpha, \beta)$ имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}_1 &= \begin{pmatrix} (\Delta p_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\Delta \text{tg}\alpha_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\Delta \beta_1)^2 \end{pmatrix}, \\ \text{cov}_i &= \begin{pmatrix} (\Delta p_i)^2 & 0 & k_{p_i\beta_i} \\ 0 & (\Delta \text{tg}\alpha_i)^2 & 0 \\ k_{p_i\beta_i} & 0 & (\Delta \beta_i)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

причем для каждой вторичной i -й измеренной частицы ($i = \overline{2, n}$) матрица ошибок рассчитывается в [11]. В нашем случае корреляционные моменты $k_{p_i\beta_i}$ суть ненулевые.

Введем также вектор-столбец величин, предназначенных для результатов фитирования (без верхней пометки m):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_{3i-2} \ x_{3i-1} \ x_{3i} \ \dots \ x_{3n-2} \ x_{3n-1} \ x_{3n})^T \quad (i = \overline{1, n}), \text{ где} \\ x_1 &= p_1, \ x_2 = \text{tg}\alpha_1, \ x_3 = \beta_1, \dots, \ x_{3n-2} = p_n, \ x_{3n-1} = \text{tg}\alpha_n, \ x_{3n} = \beta_n. \end{aligned}$$

УРАВНЕНИЯ СВЯЗИ

Уравнения связи основываются, например, на законах сохранения энергии-импульса или на свойстве инвариантности массы. Различные случаи совокупности уравнений связи описаны в [1]. В настоящей работе на примере

параметризации $(p, \text{tg}\alpha, \beta)$ рассматриваются только случаи, согласно [1] обозначаемые как 1C и 4C (C — сокращение от constraint).

Случай 4C. Кинематические параметры всех вторичных частиц измерены (следовательно, все вторичные частицы заряжены, как в реакции $n + p \rightarrow p + p + \pi^-$). Ограничения на поиск минимума в этом случае записываются *четырьмя* уравнениями связи относительно неизвестного вектора \mathbf{x} в виде законов сохранения:

$$\begin{cases} F_1 = e_1 + m_T - \sum_{i=2}^n e_i = 0, \\ (F_2, F_3, F_4) = \mathbf{p}_1 - \sum_{i=2}^n \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \end{cases} \quad (1)$$

где $e_i = \sqrt{p_i^2 + m_i^2}$ — энергия; \mathbf{p}_i — импульс частиц ($i = \overline{1, n}$); m_T — масса мишени.

Случай 1C. Среди вторичных частиц, помимо заряженных (а следовательно, измеренных), есть одна нейтральная, неизмеренная. Например, $n + p \rightarrow p + p + \pi^- + \pi^0$. Имеется только *одно* уравнение связи:

$$F_1 = e_1 + m_T - \left(\sum_{i=2}^n e_i + \sqrt{\left(\mathbf{p}_1 - \sum_{i=2}^n \mathbf{p}_i \right)^2 + m_{\text{neutra}}^2} \right) = 0.$$

В общем случае имеем M уравнений связи, которые представим уравнением с M -мерным вектором-строкой:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1, F_2, \dots, F_M) = \mathbf{0}. \quad (2)$$

УСЛОВНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ

При заданных ограничениях (2) требуется найти *условный* экстремум (минимум) функционала

$$\chi^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^m)^T \mathbf{G} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^m), \quad (3)$$

откуда можно получить фитированные кинематические параметры. С этой целью находится *абсолютный* экстремум (минимум) функционала

$$L = \chi^2 + 2 \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\lambda},$$

где вектор-столбец $\boldsymbol{\lambda}$ размерности M представляет собой неопределенные лагранжевы коэффициенты. Опуская выкладки, приведенные в [1], и используя

обозначения

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{x}^k) &= \mathbf{G}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}^k}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}^k) &= \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}^k}{}^T \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}^k}, \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}^k) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) + (\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^k)^T \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x}^k)}{d\mathbf{x}^k},\end{aligned}$$

где $k = 0, 1, \dots$, приведем результат, который достаточен для создания программного кода.

Имеем последовательные приближения для лагранжевых коэффициентов и фитируемых переменных:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^{k+1} &= \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^k) \cdot \mathbf{b}^T(\mathbf{x}^k), \\ \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{x}^m - \mathbf{E}(\mathbf{x}^k) \cdot \boldsymbol{\lambda}^{k+1},\end{aligned}\tag{4}$$

причем за начальное значение фитируемых переменных принимается $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^m$. В начальных значениях для вектора $\boldsymbol{\lambda}$ нет необходимости, поскольку

$$\boldsymbol{\lambda}^1 = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^0) \cdot \mathbf{b}^T(\mathbf{x}^0) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^m) \cdot \mathbf{b}^T(\mathbf{x}^m).$$

УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ

Сходимость процесса будет достигнута, когда очередное $(k + 1)$ -е приращение δL минимизируемого функционала L станет достаточно малым. Можно показать, что

$$\delta L_{\boldsymbol{\lambda}}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T,$$

поэтому достижение сходимости по $\boldsymbol{\lambda}$ контролируется условием

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T < \varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}},\tag{5}$$

где $\varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}}$ — заданный ограничитель (см. ниже).

После достижения сходимости по $\boldsymbol{\lambda}$ контролируется сходимость функционала L по \mathbf{x} . Обозначая $\boldsymbol{\Psi} = \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}^{k+1}} - \frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{x}^k} \right) \cdot \boldsymbol{\lambda}^{k+1}$, можно показать, что

$$\delta L_{\mathbf{x}}^2 = \boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Psi},$$

поэтому достижение сходимости по \mathbf{x} контролируется условием

$$\boldsymbol{\Psi}^T \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Psi} < \varepsilon_{\mathbf{x}},\tag{6}$$

где $\varepsilon_{\mathbf{x}}$ — заданный ограничитель (см. ниже).

Итеративный процесс считается сошедшимся, если:

- 1) дважды подряд выполнены условия (5) и (6);
- 2) число итераций оказалось меньше предельного (см. ниже).

При достижении сходимости можно получить, во-первых, результирующее значение χ^2 , во-вторых, матрицу ошибок для фитированных переменных.

ФУНКЦИОНАЛ И ЕГО СРЕДНЕЕ ЗНАЧЕНИЕ

Подставляя (4) в определение (3), можно получить одну из форм итогового значения функционала:

$$\chi_1^2 = \boldsymbol{\lambda}^T \cdot \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\lambda}.$$

Можно также рассмотреть иную форму его представления:

$$\chi_2^2 = \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\lambda}.$$

Ввиду многочисленных округлений во время арифметических операций описываемого алгоритма следует проверять расхождение между этими теоретически равными формами. Если проверка

$$\left| \frac{\chi_1^2 - \chi_2^2}{\chi_1^2} \right| < \varepsilon_a, \quad (7)$$

где ε_a — заданный ограничитель (см. ниже), оказывается успешной, принимается

$$\chi^2 = \frac{\chi_1^2 + \chi_2^2}{2}. \quad (8)$$

При отсутствии систематических погрешностей распределение полученной случайной величины χ^2 должно подчиняться стандартному χ^2 -распределению (или «статистике Пирсона»). Можно показать, что среднее значение $\overline{\chi^2}$ равно M , из чего следует, что число степеней свободы у функционала (3) равно количеству M уравнений связи.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОШИБОК

Из (4) следует $\delta \mathbf{x}^{k+1} = \delta \mathbf{x}^m - \mathbf{E}(\mathbf{x}^k) \cdot \delta \boldsymbol{\lambda}^{k+1}$. Составляя матрицу ошибок для фитированных параметров

$$\mathbf{V}^{-1} = \langle \delta \mathbf{x}^{k+1}, \delta \mathbf{x}^{k+1 T} \rangle,$$

можно показать, что

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{G}^{-1} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{E}^T. \quad (9)$$

Доказано, что ошибки фитированных величин (квадратные корни из диагональных элементов матрицы \mathbf{V}^{-1}) меньше, чем ошибки измеренных. Таким образом, для диагональных элементов g_{ii}^{-1} и ν_{ii}^{-1} ($i = \overline{1, 3n}$) соответствующих матриц есть соотношение

$$0 < \nu_{ii}^{-1} < g_{ii}^{-1}. \quad (10)$$

Выполняя при вычислениях операцию (9), необходимо, однако, учитывать дискретность расчетов так, чтобы прежде всего выполнялось условие

$$g_{ii}^{-1} \cdot 10^{-\zeta} < (\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{E}^T)_{ii} < g_{ii}^{-1}, \quad (11)$$

где ζ — десятичная разрядность мантиссы вещественного числа. В этом есть необходимость, поскольку реально в пренебрежимо редких случаях последнее условие может нарушаться из-за накапливающихся ошибок округления (соответствующее решение отбрасывается).

Установлено также, что матрица $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{E}^T$ является матрицей ошибок для вектора разности случайных величин $\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^{k+1}$. Отсюда (при отсутствии систематических погрешностей) случайные величины

$$\Pi_i = \frac{x_i^m - x_i^{k+1}}{\sqrt{g_{ii}^{-1} - \nu_{ii}^{-1}}} \quad (i = \overline{1, 3n}) \quad (12)$$

(которые в [1] обозначаются «stretch», а в [10] — «pull») должны являться нормально распределенными со средним 0 и дисперсией 1. «Минус» под радикалом в (12) есть следствие корреляции между векторами \mathbf{x}^{k+1} и \mathbf{x}^m .

Заметим, что при нарушении условия (11) не будет выполнено условие (10), что приведет к невозможности вычисления величин (12).

Случай 1С-фит. Расчетные переменные в этом случае — компоненты импульса нейтральной (незарегистрированной) частицы. Обозначим расчетные переменные вектор-столбцом $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^T$. Имея в виду (1), получаем, что, независимо от параметризации,

$$y_1 = F_2, \quad y_2 = F_3, \quad y_3 = F_4.$$

Найдем матрицу ошибок для расчетных параметров $\mathbf{U}^{-1} = \langle \delta \mathbf{y}^{k+1}, \delta \mathbf{y}^{k+1^T} \rangle$. Поскольку $\delta \mathbf{y}^{k+1} = \frac{d\mathbf{y}^T}{d\mathbf{x}} \delta \mathbf{x}^{k+1}$, можем получить

$$\mathbf{U}^{-1} = \frac{d\mathbf{y}^T}{d\mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}}. \quad (13)$$

Пренебрежимо редко и у матрицы \mathbf{U}^{-1} диагональные элементы оказываются неположительными; соответствующий фит отбрасывается.

ОГРАНИЧИТЕЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ

Конкретные величины ограничительных констант ε_λ и ε_x подбираются эмпирически на статистически значимой выборке актов фитирования (а следовательно, на достаточно большом массиве исследуемых актов взаимодействия частиц — событий). В алгоритме процедуры фитирования требуется выполнение условий (5) и (6) два раза подряд. Отсюда константы не должны быть «слишком большими», т. е. должны быть достаточно чувствительными так, чтобы сходимость в среднем осуществлялась не при первых двух итерациях. «Слишком малые» величины констант, очевидно, также недопустимы: опытным путем выяснено, что при слишком малых ε_λ и ε_x результирующее распределение случайной величины χ^2 для массива фитируемых событий обедняется в области больших значений по сравнению со стандартным распределением χ^2 . В нашем случае было установлено $\varepsilon_\lambda = 10^{-5}$, $\varepsilon_x = 10^{-7}$.

В [1] для ограничительных констант были указаны иные значения, а именно $\varepsilon_\lambda = \varepsilon_x = 10^{-2}$. Отчасти это различие объясняется выбором в [1] единиц измерения МэВ для энергии частицы, тогда как в описываемой процедуре энергия измеряется в ГэВ.

Для константы ε_a было подобрано значение $1,5 \cdot 10^{-3}$ в отличие от [1], где $\varepsilon_a = 10^{-4}$. Заметим, что проверка условия (7) более важна для случая 4C, поскольку для 1C количество выполняемых вычислений существенно меньше.

Типичное распределение числа итераций N_{it} по статистически значимой выборке актов фитирования представлено на рис. 1.

Данное распределение пропорционально плотности вероятности f дискретной случайной величины N_{it} . Исходя из вида этого распределения предельное число итераций было выбрано равным 10.

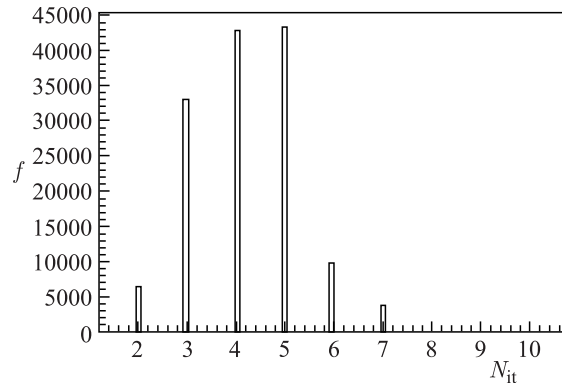


Рис. 1. Типичное распределение числа итераций N_{it}

ТЕСТИРОВАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ

Для проверки справедливости вышеизложенного методом Монте-Карло была сгенерирована статистически значимая выборка, имитирующая множество событий фазового объема для нейтрона с импульсом 5,2 ГэВ/с, налетающего на неподвижный протон. Имитировались каналы реакции (по 100 000 событий в каждом)

$$np \rightarrow pp\pi^-, \quad np \rightarrow pp\pi^-\pi^0, \quad np \rightarrow p\pi^+\pi^-n.$$

Использовались два способа генерации событий:

- 1) при помощи известной программы GENBOD;
- 2) по алгоритму Копылова [12].

Все сгенерированные события подвергались процедуре фитирования. В последующих разделах даются результаты применения описываемого алгоритма к генерированным событиям.

УМЕНЬШЕНИЕ ОШИБОК КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Вектор-столбцом x^t обозначим (подобно ранее введенным x^m и x) совокупность идеальных (true) кинематических параметров, непосредственно доступных в условиях генерации событий. В этих условиях компоненты вектора x^m измеренных величин получают значения

$$x_j^m = x_j^t + \sigma_j(x_j^t) \cdot \gamma \quad (j = \overline{1, 3n}),$$

где $\sigma_j(x_j^t)$ — среднеквадратическая ошибка j -й компоненты, подбираемая на основе известных распределений ошибок, вводимых через матрицу \mathbf{G}^{-1} ; γ —

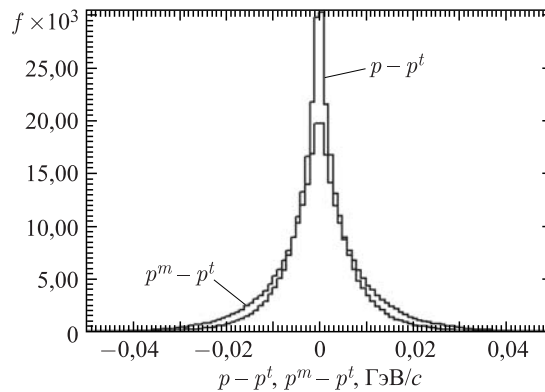


Рис. 2. Распределения величин «измеренная минус истинная» ($p^m - p^t$), «фитированная минус истинная» ($p - p^t$) в канале $np \rightarrow pp\pi^-$ для первого из вторичных протонов

случайное нормально распределенное число, последовательно разыгрываемое соответствующим генератором случайных чисел.

Справедливость условия (10) подтверждается на рис. 2, где одновременно для двух векторных величин $(\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^t)$ и $(\mathbf{x} - \mathbf{x}^t)$ представлены распределения компонент, соответствующих импульсу одного из вторичных протонов.

Видно, что распределение второй величины заметно уже распределения первой. Из этого следует, что и в процессе фитирования реальных данных ошибки кинематических параметров уменьшаются, а достоверность вектора \mathbf{x} по сравнению с вектором \mathbf{x}^m возрастает.

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НЕЗАРЕГИСТРИРОВАННОЙ (НЕЙТРАЛЬНОЙ) ЧАСТИЦЫ

В условиях генерации событий можно также показать (рис. 3) величины отклонений *вычисленных* параметров незарегистрированной (нейтральной) частицы от *истинных*. Это дает представление о порядке величин диагональных элементов матрицы (13).

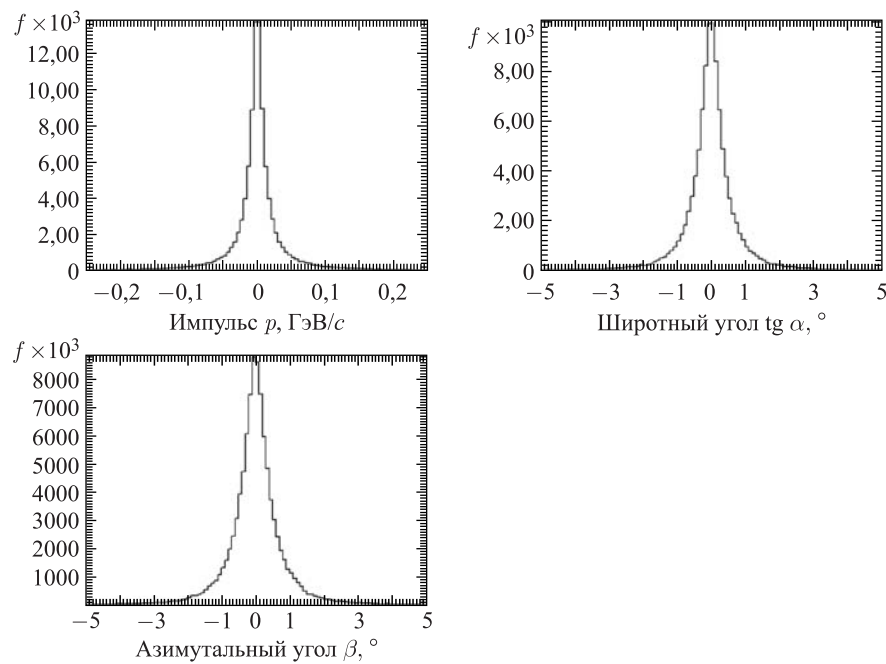


Рис. 3. Распределения величин «вычисленная минус истинная» для нейтральной частицы в канале $n\rho \rightarrow \rho\rho\pi^-\pi^0$

Таким образом, при фитировании реальных данных кинематические параметры нейтральной частицы (случай 1C) становятся доступными и снабженными гауссовой ошибкой.

ПРОВЕРКА АЛГОРИТМА НА НЕВНЕСЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

При отсутствии систематической погрешности («систематики») в экспериментальных данных, если систематика не вносится вышеописанной процедурой минимизации, распределение экспериментальной случайной величины χ^2 (8) должно представлять собой стандартное χ^2 -распределение, плотность вероятности которого

$$p(r, \chi^2) = \frac{(\chi^2)^{\frac{r}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{2^{\frac{r}{2}} \cdot \Gamma(r/2)}, \quad (14)$$

где целочисленный параметр r (в случаях 1C и 4C равный соответственно 1 или 4) является числом степеней свободы, а случайная величина $\chi^2 \geq 0$.

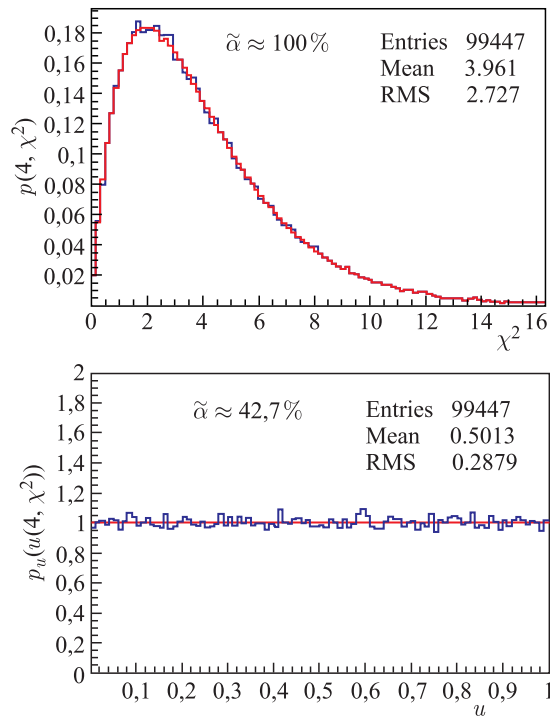


Рис. 4. Канал $np \rightarrow p\pi^-$

С другой стороны, случайная величина

$$u(r, \chi^2) = \int_{\chi^2}^{+\infty} p(r, z) dz,$$

где нижний предел интеграла сам распределен в соответствии с (14), является равномерно распределенной на промежутке $[0,1]$ для любого числа r степеней свободы, откуда $p_u(u(r, \chi^2)) \equiv 1$. Следовательно, равномерно должна распределяться экспериментальная случайная величина $u(r, \chi^2)$. Данные утверждения относительно экспериментальных распределений χ^2 и $u(r, \chi^2)$ следует подвергать проверке.

Для этого к генерированным распределениям применялся критерий согласия Колмогорова. Это было исследовано при обоих способах генерации и для разных параметризаций: $(p, \text{tg}\alpha, \beta)$ и $(1/p, \text{tg}\alpha, \beta)$. Результаты всех испытаний оказались практически идентичными. Ниже приводятся конкретные данные применения критерия Колмогорова и соответствующие им графические иллюстрации (рис. 4, 5) для массива данных, полученных по алгоритму

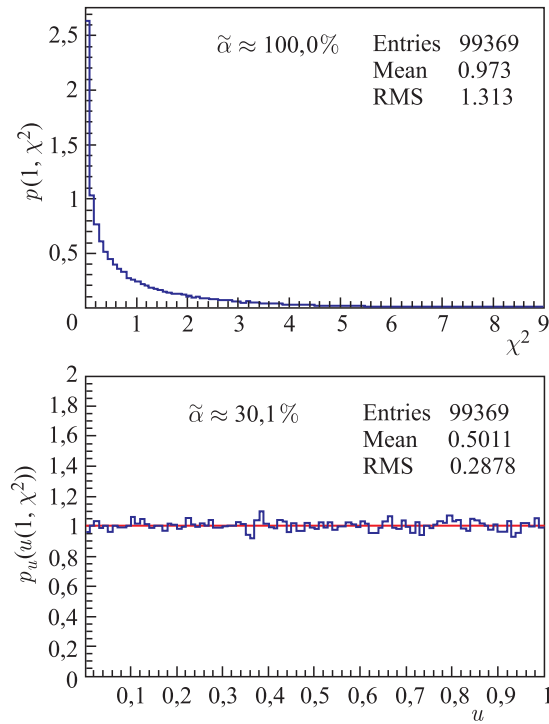


Рис. 5. Канал $np \rightarrow p\pi^+\pi^-n$

Копылова при параметризации $(p, \text{tg}\alpha, \beta)$. Уровень доверительной вероятности на рис. 4, 5 (и далее 6, 7), определяемой по критерию Колмогорова, обозначен символом $\tilde{\alpha}$.

Отметим, что критерий Колмогорова исследует не плотности вероятности, а соответствующие функции распределения Φ , являющиеся их первообразными. В нашем случае это

$$\Phi(\chi^2) = \int_{-\infty}^{\chi^2} p(r, z) dz = \int_0^{\chi^2} p(r, z) dz \quad \text{и}$$

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u p_u(u(r, \chi^2)) du = \int_0^u p_u(u(r, \chi^2)) du = u.$$

Заметим при этом, что совмещения графиков экспериментальных и теоретических функций распределения графической наглядностью не обладают. Поэтому для иллюстрации результатов применения критерия Колмогорова показываются совмещения графиков соответствующих плотностей вероятности $p(r, \chi^2)$ и $p_u(u(r, \chi^2))$. Впрочем, для $r = 1$ совмещенные графики плотностей вероятности $p(r, \chi^2)$ наглядностью также не обладают. Вполне наглядны, однако, все графики для $p_u(u(r, \chi^2))$ независимо от r .

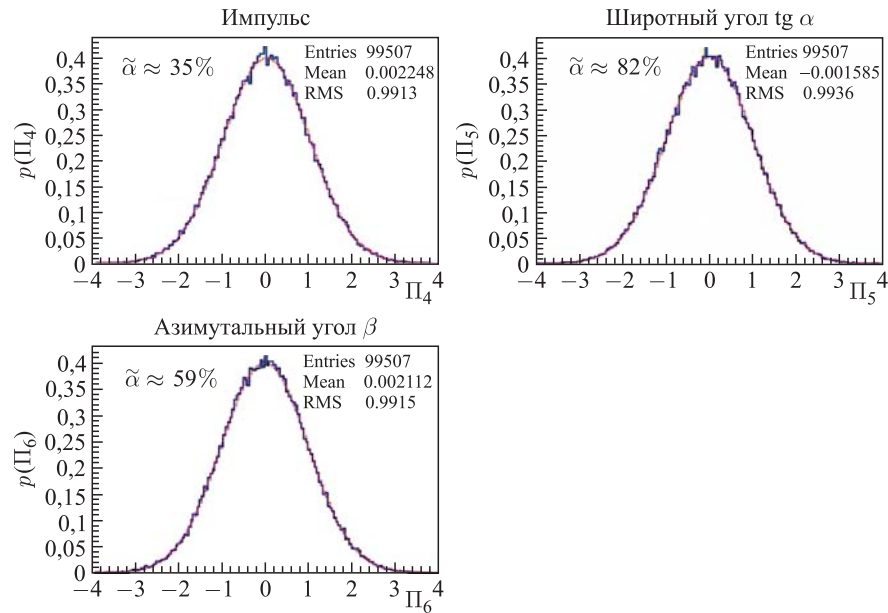


Рис. 6. Канал $np \rightarrow pp\pi^-$, тест для первого протона

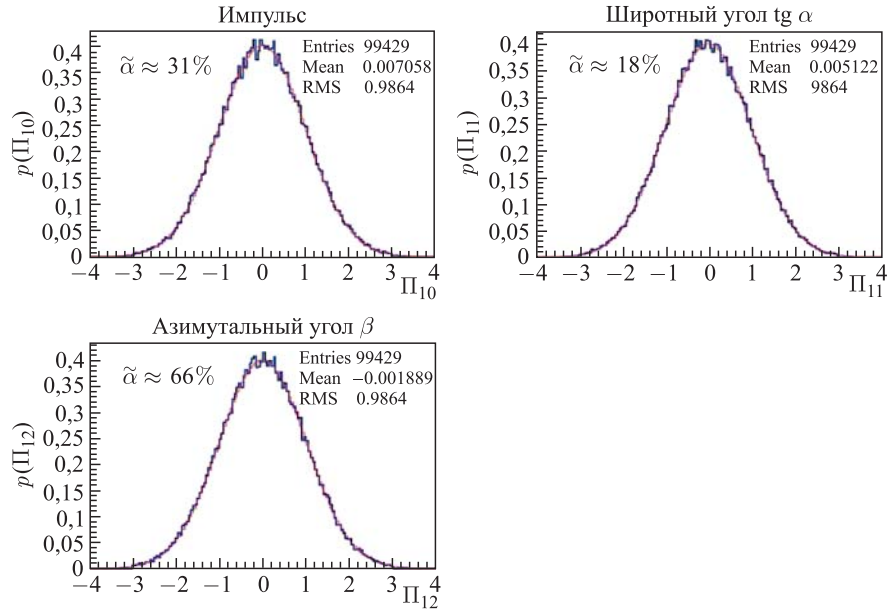


Рис. 7. Канал $np \rightarrow p\pi^+\pi^-n$, тест для пиона π^-

В каждом акте сравнения, выполняемом по методике критерия Колмогорова, вычисленный уровень доверительной вероятности $\tilde{\alpha}$ сравнивался с «критическими» уровнями, за которые традиционно принимаются 10, 5 и 1 %.

Дополнительно критерий Колмогорова применялся к поведению случайных pull-величин Π_i ($i = \overline{1, 3n}$) (14), вычисленных на тех же массивах данных, что и выше. Избранные данные тестирования проиллюстрированы на рис. 6, 7. На графиках распределение величин Π_i совмещено со стандартной гауссовой кривой.

Как видно, во всех случаях $\tilde{\alpha}$ существенно превосходит «самый критический» уровень доверительной вероятности $\alpha = 1\%$. На основании всех выше примененных тестов Колмогорова можно сделать вывод, что при допустимом доверительном уровне вероятности алгоритм минимизации систематических погрешностей не вносит.

PULL-ПЕРЕМЕННЫЕ И ФУНКЦИОНАЛ χ^2

Рассмотрим совместную плотность вероятности случайных величин — pull-переменных Π_i ($i = \overline{1, 3n}$) (12) и функционала χ^2 . Вид распределений (рис. 8) существенно зависит от типа канала реакции.

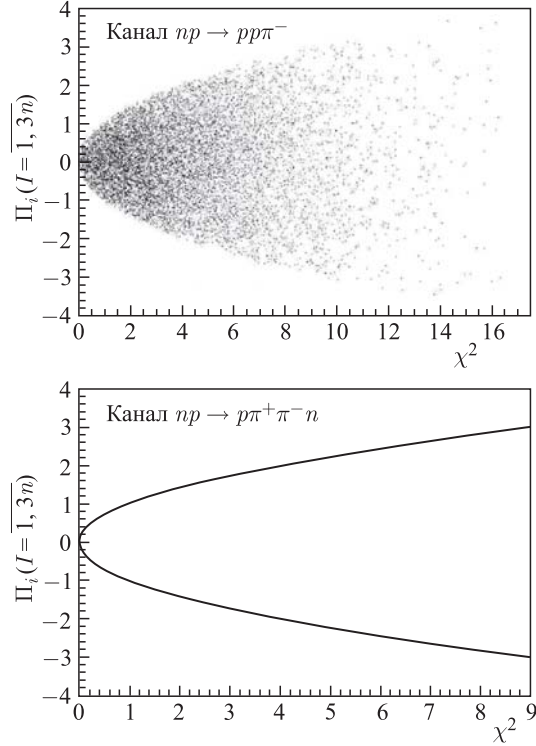


Рис. 8. Зависимость pull-переменных Π_i ($i = \overline{1, 3n}$) от χ^2

Экспериментально установлено, что в канале с нейтральной частицей (на рис. 8 снизу) все случайные величины Π_i ($i = \overline{1, 3n}$) и χ^2 связаны функциональной (параболической) зависимостью:

$$\chi^2 = (\Pi_i)^2 \quad (i = \overline{1, 3n}). \quad (15)$$

В канале без нейтральных частиц (пример сверху), напротив, соответственные пары случайных величин (Π_i, χ^2) расположены во внутренней части параболы (15).

Из формулы (12) следует, что при отсутствии систематики случайные величины Π_i ($i = \overline{1, 3n}$) должны подчиняться гауссовому распределению, т. е. их соответствующие гауссовы кривые должны располагаться по крайней мере в диапазоне $[-3, +3]$ (что с вероятностью 99,73 % означает отсутствие систематики). Поэтому для того, чтобы для случайных величин Π_i ($i = \overline{1, 3n}$) соблюсти диапазон $[-3, +3]$ в случае функционала χ^2 с одной степенью свободы (получаемого при минимизации каналов с нейтральной частицей), следует

установить предельное значение $\chi_{\text{lim}}^{2^{1C}} \geq 9 = 3^2$. Хвост такого распределения χ^2 содержит вероятность

$$\int_9^{+\infty} p(1, \chi^2) d\chi^2 \approx 0,27 \%$$

Для уравнивания каналов с одной и четырьмя степенями свободы по отбрасываемым в хвостах распределений вероятностей представляется естественным найти предельное значение $\chi_{\text{lim}}^{2^{4C}}$ из отношения

$$\int_{\chi_{\text{lim}}^{2^{4C}}}^{+\infty} p(4, \chi^2) d\chi^2 \leq 0,27 \%$$

Получается $\chi_{\text{lim}}^{2^{4C}} \geq 16,3$.

Тогда после завершения процедуры минимизации следует требовать выполнения условия

$$\chi^2 < \chi_{\text{lim}}^2 \quad (16)$$

и отбрасывать решение, если условие не выполнено.

Требование (16) обусловлено только возможным недостатком статистики в диапазоне больших значений χ^2 , при которых оказывается невозможным построение статистически значимых гистограмм.

КВАДРАТ НЕДОСТАЮЩЕЙ МАССЫ И ФУНКЦИОНАЛ χ^2

Имея в виду (1), квадрат недостающей массы события вычисляем по вектору \mathbf{x}^m :

$$\mu^2(\mathbf{x}^m) = F_1^2(\mathbf{x}^m) - [F_2^2(\mathbf{x}^m) + F_3^2(\mathbf{x}^m) + F_4^2(\mathbf{x}^m)].$$

Рассмотрим (рис. 9) совместную плотность вероятности двух случайных величин — квадрата недостающей массы μ^2 и функционала χ^2 .

Между случайными величинами μ^2 и χ^2 заметна корреляция. В 4C-канале она выражается семейством прямых:

$$\mu^2 = \mu_0^2 + v^{4C} \cdot \chi^2,$$

выходящих из точки ($\mu_0^2 = 0, \chi^2 = 0$), где v^{4C} — параметр с преимущественно отрицательным значением.

В 1C-каналах корреляция иная, напоминающая семейство парабол с общей вершиной в точке ($\mu_0^2 = \mu_{\text{neutra}}^2, \chi^2 = 0$). Если совместную плотность

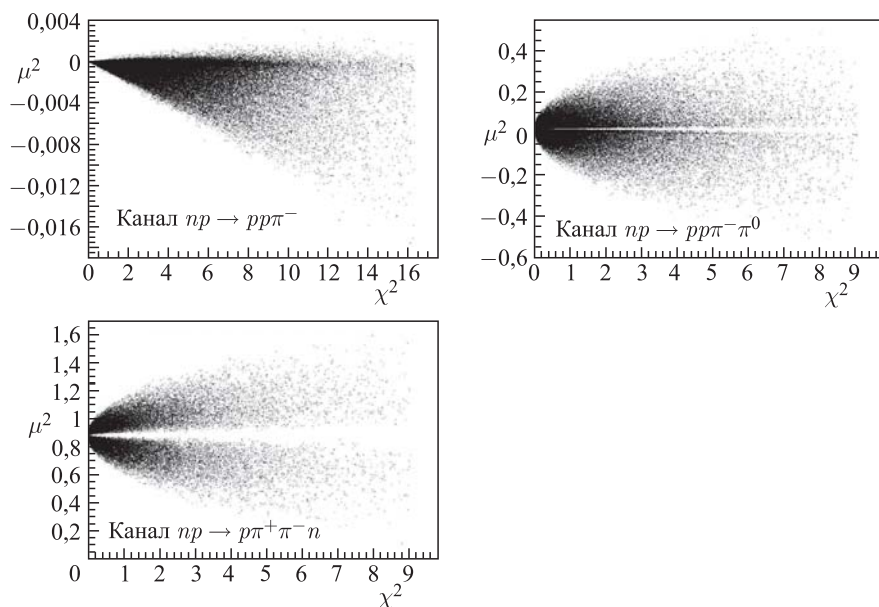


Рис. 9. Совместная плотность вероятности μ^2 и χ^2

вероятности в каналах $1C$ изобразить в случайных величинах μ^2 и $\sqrt{\chi^2}$, корреляция в этих каналах также представится семейством прямых:

$$\mu^2 = \mu_0^2 + v^{1C} \cdot \sqrt{\chi^2},$$

исходящих из одной точки ($\mu_0^2 = \mu_{\text{neutra}}^2, \sqrt{\chi^2} = 0$), где v^{1C} — параметр (рис. 10).

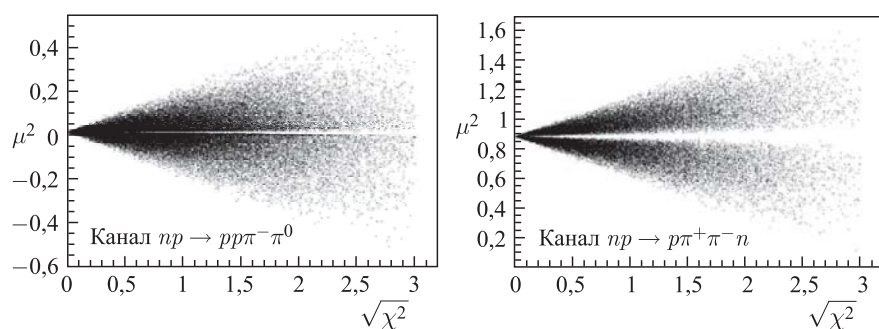


Рис. 10. Совместная плотность вероятности μ^2 и $\sqrt{\chi^2}$ в каналах $1C$

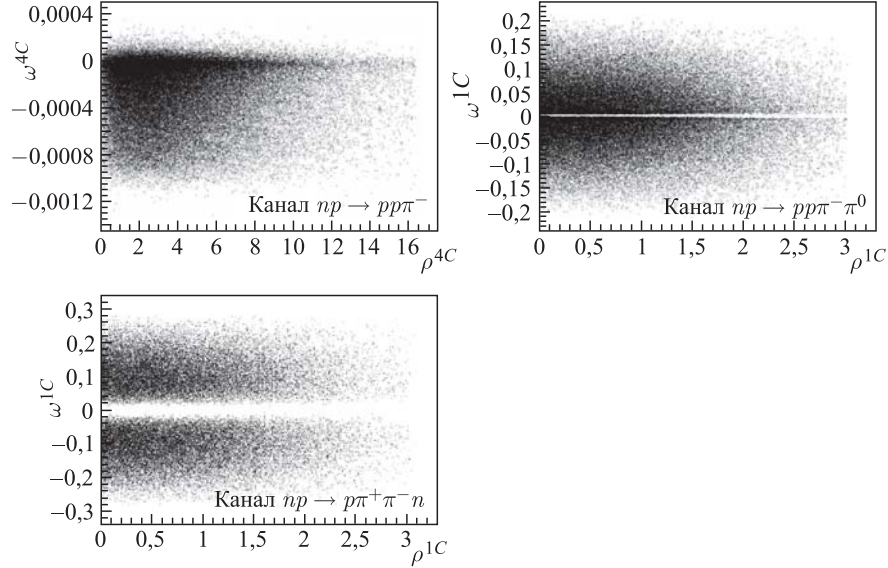


Рис. 11. Совместная плотность вероятности случайных величин ω и ρ

Параметры $v^{4C} = \frac{\mu^2 - \mu_0^2}{\chi^2}$ и $v^{1C} = \frac{\mu^2 - \mu_0^2}{\sqrt{\chi^2}}$ представляют собой тангенсы угла наклона в семействах прямых. Соответственно, перейдем к полярным координатам

для 4C-каналов:

для 1C-каналов:

$$\begin{cases} \omega^{4C} = \arctan v^{4C}, \\ \rho^{4C} = \sqrt{(\mu^2 - \mu_0^2)^2 + (\chi^2)^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \omega^{1C} = \arctan v^{1C}, \\ \rho^{1C} = \sqrt{(\mu^2 - \mu_0^2)^2 + \chi^2}. \end{cases}$$

Рассмотрение совместной плотности вероятности случайных величин ω и ρ для массивов идеальных событий (рис. 11) позволяет отчетливо наблюдать границы отсутствия систематики. При обработке реальных данных это может служить ориентиром для отбрасывания по границам в координатах ω и ρ ложных решений, вносящих систематику в результат. Так, для nr -эксперимента в дополнение к (16) можно потребовать (см. рис. 11), чтобы

$$-0,0014 < \omega^{4C} < +0,0004,$$

$$-0,3 < \omega^{1C} < +0,3.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанный алгоритм выполнял минимизацию для реальных событий преимущественно в np -эксперименте [8] с импульсом набегающей частицы от 1,25 до 5,20 ГэВ/с и с множественностью от 1 до 7 (включительно). Кроме того, алгоритм применялся при исследованиях pp -столкновений на установке NADES [10]. В [13–19] представлен неполный список работ, где было использовано описываемое здесь кинематическое фитирование.

В работе:

1) представлены особенности описанной процедуры кинематического фитирования:

— уточнение кинематических параметров частиц, участвовавших в реакции, с одновременным соблюдением для них законов сохранения энергии-импульса;

— уменьшение ошибок кинематических параметров;

— нахождение кинематических параметров (и их ошибок) нейтральной частицы (для каналов с единственной нейтральной частицей);

— получение численного значения функционала χ^2 для последующего вероятностного определения канала, по которому реализовалась данная реакция;

2) определено минимально допустимое значение верхнего предела χ_{lim}^2 функционала χ^2 , при котором численные результаты кинематического фитирования оказываются свободными от систематических погрешностей;

3) показано применение критерия Колмогорова для оценки невнесения систематических погрешностей процедурой кинематического фитирования.

Благодарности. Работа посвящена памяти В.И.Мороза, являвшегося инициатором создания нейтронного канала на синхрофазотроне ОИЯИ, и Ю.А.Трояна, ведущего физика np -эксперимента.

Авторы выражают благодарность коллегам Г. Агакишиеву, С. Г. Аракелян и А. Ю. Трояну за проявленный интерес к работе и многочисленные обсуждения ее аспектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berge J. Peter, Solmitz Frank T., Taft Horage D. Kinematical Analysis of Interaction Vertices from Bubble Chamber Data // The Review of Scientific Instruments. 1961. V. 32, No. 5.
2. Böck R. Kinematic Analysis of Bubble Chamber Events: FIT An IBM 709 Program Imposing Momentum and Energy Conservation on Measurement of Complete Events. CERN 61-29.

3. Мороз В. И. Сведение минимизации квадратичного функционала с условиями связи к минимизации функционала с дополнительным квадратичным членом. Сообщение ОИЯИ Р-1958. Дубна, 1965.
4. Лукьянцев А. Ф., Мороз В. И., Никитина В. И., Шахбазян Б. А. Программа идентификации распада V^0 -частиц (программа «2–3»). Сообщение ОИЯИ Р-1982. Дубна, 1965.
5. Жидков Е. П., Лукьянцев А. Ф. Об одном методе нахождения условных экстремумов. Сообщение ОИЯИ Р-1988. Дубна, 1965.
6. Иванченко З. М., Лукьянцев А. Ф., Мороз В. И., Макаренкова А. Д., Тентюкова Г. Н. Программа идентификации каналов реакций (варианты «10–10» и «10–20»). Сообщение ОИЯИ Р-2399. Дубна, 1965.
7. Иванченко З. М., Лукьянцев А. Ф., Макаренкова А. Д., Мороз В. И., Тентюкова Г. Н. Программа идентификации каналов реакций (вариант «10–30»). Сообщение ОИЯИ Р11-3983. Дубна, 1968.
8. Гаспарян А. П., Зиновьев Л. П., Иерусалимов А. П., Которобай Ф., Кочуров А. Г., Мороз В. И., Нагдасев С. С., Никитин В. В., Смирнов Ю. В., Троян Ю. А. Нейтронный (стриппинговый) канал Лаборатории высоких энергий ОИЯИ. 1-9111. Дубна, 1975.
9. Глаголев В. В. К истории создания и эксплуатации 100-см жидководородной пузырьковой камеры ЛВЭ ОИЯИ. <http://lhe.jinr.ru/1mHBC/index.html>.
10. Agakishiev G. et al. The High-Acceptance Dielectron Spectrometer HADES // Eur. Phys. J. A. 2009. V. 41. P. 287.
11. Маркова Н. Ф., Мороз В. И., Никитина В. И., Стельмах А. П., Тентюкова Г. Н. Программа геометрической реконструкции для больших пузырьковых камер (вариант «1–6»). Сообщение ОИЯИ Р10-3768. Дубна, 1968.
12. Копылов Г. И. Основы кинематики резонансов. М.: Наука, 1970.
13. Troyan Yu. A., Plekhanov E. V., Pechenov V. N., Troyan A. Yu., Beljaev A. V., Jerusalemov A. P., Arakelian S. G. The Search and Study of the Resonances in the System of $\pi^+\pi^-$ Mesons from the Reaction $np \rightarrow n p \pi^+\pi^-$ at $P_n = 5.20$ GeV/c // Part. Nucl., Lett. 2000. No. 6[103]. P. 25–33.
14. Troyan Yu. A., Plekhanov E. V., Pechenov V. N., Troyan A. Yu., Beljaev A. V., Jerusalemov A. P., Arakelian S. G. Resonances in the System of $\pi^+\pi^-$ Mesons from $np \rightarrow n p \pi^+\pi^-$ Reaction at $P_n = 5.20$ GeV/c: Search, Results of Direct Observations, Interpretation // Part. Nucl., Lett. 2002. No. 5[114]. P. 53–60.
15. Троян Ю. А., Плеханов Е. В., Троян А. Ю., Беляев А. В., Иерусалимов А. П., Аракелян С. Г. Поиск и исследование барионных резонансов со странностью $S = +1$ в системе nK^+ в реакции $np \rightarrow n p K^+ K^-$ при импульсе налетающих нейтронов $P_n = (5,20 \pm 0,12)$ ГэВ/с // Письма в ЭЧАЯ. 2005. Т. 2, № 1(124). С. 35–48.
16. Аникина М. Х., Беляев А. В., Голохвастов А. И., Лукстиньш Ю. Р., Троян Ю. А., Троян А. Ю. Интерференционный анализ расширяющегося объема генерации пионов в адрон-адронных и ядро-ядерных столкновениях при начальных импульсах 3,8–5,2 ГэВ/с на нуклон // ЯФ. 2009. Т. 72, № 1. С. 1–13.

17. Троян Ю. А., Плеханов Е. Б., Троян А. Ю., Беляев А. В., Иерусалимов А. П., Аракелян С. Г. Поиск и исследование маломассовых скалярных мезонов в реакции $nr \rightarrow nr\pi^+\pi^-$ при импульсе нейтронного пучка $P_n = (3,83 \pm 0,12)$ ГэВ/с // Письма в ЭЧАЯ. 2011. Т. 8, № 6(169). С. 928–935.
18. Троян Ю. А., Плеханов Е. Б., Троян А. Ю., Беляев А. В., Иерусалимов А. П., Аракелян С. Г. Поиск и исследование маломассовых скалярных мезонов в реакции $nr \rightarrow nr\pi^+\pi^-$ при импульсе нейтронного пучка $P_n = (5,20 \pm 0,12)$ ГэВ/с // Письма в ЭЧАЯ. 2012. Т. 9, № 1(171). С. 77–87.
19. Аникина М. Х., Беляев А. В., Иерусалимов А. П., Троян Ю. А., Троян А. Ю. Упругое $nr \rightarrow nr(pn)$ -рассеяние при промежуточных энергиях // Письма в ЭЧАЯ. 2014. Т. 11, № 2(186). С. 186–197.

Получено 28 октября 2016 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 07.02.2017.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 255 экз. Заказ № 59023.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/