

P2-2017-3

Т. Г. Дедович\*, М. В. Токарев\*\*

**ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФРАКТАЛОВ  
ПРИ НАЛИЧИИ ФОНОВЫХ СОБЫТИЙ**

Направлено в журнал «Письма в ЭЧАЯ»

---

\* E-mail: [dedovich@sunhe.jinr.ru](mailto:dedovich@sunhe.jinr.ru)

\*\* E-mail: [tokarev@jinr.ru](mailto:tokarev@jinr.ru)

Дедович Т. Г., Токарев М. В.

P2-2017-3

Восстановление фракталов при наличии фоновых событий

В работе выполнен анализ наборов данных, содержащих фракталы и фоновые события, методом систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC) и методом подсчета клеток (BC). Изучены особенности этих методов при нахождении фракталов в наборах, содержащих только фракталы и только фоновые события. Предложены процедуры определения наличия фракталов, оценки их количества в исходном наборе, выделения фракталов и оценки доли фоновых событий в выделенном наборе. Проведено сравнение результатов анализа смешанных событий этими методами.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2017

Dedovich T. G., Tokarev M. V.

P2-2017-3

Reconstruction of Fractals in the Presence of Background Events

Analysis of samples containing fractal and background events is performed using the method of systems of equations of  $P$ -adic coverages (SePaC) and Box Counting (BC) method. The features of these methods are studied. The procedures to indicate the existence of fractals in the combined sample, reconstruct fractals, estimate a fraction of fractals and estimate background in the extracted sample are suggested. The results of a comparative analysis of combined fractal samples using these methods are presented.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2017

## ВВЕДЕНИЕ

Множественное рождение частиц происходит во взаимодействиях лептонов, адронов и ядер высоких энергий. Помимо жесткого рассеяния оно включает ливни в начальном и конечном состояниях, многочастичные взаимодействия, адронизацию, распад нестабильных адронов. Предполагается, что некоторые из механизмов, например развитие партонных ливней, обладают фрактальными свойствами. В этом случае представляет интерес изучение характеристик — размерности  $D_F$ , количества уровней  $N_{lev}$  и основания образования  $P$  — фрактальных процессов. В работах [1, 2] предложены PaC- и SePaC-методы фрактального анализа. Они использовались для восстановления фракталов с независимым [3], зависимым [4] и комбинированным [5] делением. Двухступенчатая процедура анализа, развитая в работе [6], позволила увеличить эффективность восстановления  $D_F$ ,  $N_{lev}$  и  $P$  в наборах данных, содержащих различные виды фракталов. Было показано преимущество двухступенчатой процедуры SePaC-метода по сравнению с PaC и широко используемым методом подсчета клеток (BC-метод) [7, 8]. Отметим, что фрактальный характер партонных ливней могут исказить вторичные взаимодействия и процесс адронизации. В этом случае возникает вопрос о степени нарушения фрактальности и возможности восстановления информации о характеристиках первичного процесса.

В настоящей работе изучаются смешанные события, состоящие из фракталов и фоновых событий. Предложены схемы фрактального анализа, использующие SePaC- и BC-методы, для установления наличия фракталов, оценки их количества, выделения фракталов и оценки доли фоновых событий в выделенном наборе. В разд. 1 представлено краткое описание этих методов. Характеристики наборов данных обсуждаются в разд. 2. В разд. 3 и 4 исследованы особенности реконструкции фракталов в смешанных событиях SePaC- и BC-методами. Сравнительный анализ результатов приведен в разд. 5. Основные выводы сформулированы в заключении.

## 1. ФРАКТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

В этом разделе приведено краткое описание SePaC- и BC-методов фрактального анализа, используемых в данной работе.

**1.1. Метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий.** Метод систем уравнений  $P$ -адических покрытий (SePaC-метод) основан на определении размерности Хаусдорфа–Безиковича (см. приложение А). Рассматриваются различные наборы распределений исследуемой величины (например, псевдо-быстроты). Количество бинов  $\{M_i\}$  в распределениях изменяется по степенному закону  $M_i = (P)^i, i = 0, 1, 2, \dots, \text{lev}_{\max}$ . Эти наборы называются покрытиями исследуемого множества с основанием  $P$  и количеством уровней  $\text{lev}_{\max}$ . Наборы распределений отличаются величиной основания, которое принимает значения  $P = 3, \dots, P_{\max}$ , где  $P_{\max}$  является параметром метода. Проверяются различные гипотезы (зависимого и независимого деления) формирования фракталов для каждого покрытия.

Процедура проверки сводится к построению и решению системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{Nd_{\text{lev}}} (d_{i \text{ lev}})^{D_F^{\text{lev}}} = 1, \quad (1)$$

где  $Nd_{\text{lev}}$  и  $d_{i \text{ lev}}$  — количество и длина допустимых диапазонов для каждого уровня. Рассматриваемый набор точек считается фракталом, если для каждого уровня относительное отклонение размерности от среднего значения  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$  меньше заданного значения параметра Dev. Фрактал характеризуется основанием  $P$ , размерностью  $\langle D_F^{\text{lev}} \rangle$  и количеством уровней  $\text{lev}$ , которое определяется условием насыщения  $N(\text{lev}, P) = N(\text{lev} + 1, P)$ . Этот метод имеет два параметра: основание максимального  $P$ -адического покрытия  $P_{\max}$  и предельное относительное отклонение Dev фрактальных размерностей различных уровней от их среднего. Более подробное описание, особенности и результаты применения SePaC-метода представлено в работах [2–6].

**1.2. Метод подсчета клеток.** Метод подсчета клеток (BC-метод) основан на определении клеточной размерности (см. приложение А). Она вычисляется как параметр наклона  $D_b$  дважды логарифмической зависимости  $\ln N \sim \ln M^{D_b}$  количества ненулевых бинов  $N$  в распределении исследуемой величины (например, быстроты) от их общего количества  $M$ . Как правило, рассматривается набор распределений, в которых количество бинов  $\{M_i\}$  изменяется по степенному закону ( $M_i = (P)^i, i = 0, 1, 2, \dots$ ) с фиксированным основанием  $P$ . Наиболее популярным является основание  $P = 2$ . Рассматриваемый набор точек считается фракталом с размерностью  $D_b$ , если  $\chi^2$  линейной аппроксимации зависимости  $\ln N$  от  $\ln M$  меньше заданного значения  $\chi_{\text{lim}}^2$ , являющегося параметром BC-метода.

## 2. ОПИСАНИЕ НАБОРА ДАННЫХ

В работе анализируются фракталы и фоновые события. Рассматривается набор, состоящий из 1854 фракталов различных типов (независимого, зависимого и комбинированного деления) с основаниями  $P = 3–8$ . Процедура по-

строения фракталов описана в приложении В. В качестве фоновых событий выбираются наборы точек, распределенных случайно на том же интервале, что и фракталы. Исследуется возможность восстановления фракталов при различном содержании примеси (от 5 до 95%).

### 3. РЕКОНСТРУКЦИЯ ФРАКТАЛОВ SePaC-МЕТОДОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПРИМЕСИ

SePaC-метод имеет два параметра —  $P_{\max}$  и  $Dev$ , выбор значений которых основывается на анализе зависимостей:  $Prtn(P_{\max})$  — доли событий  $Prtn$ , восстановленных как фракталы от параметра  $P_{\max}$  при фиксированном значении  $Dev$ , и  $Prtn(Dev)$  — доли событий, восстановленных как фракталы от параметра  $Dev$  при оптимальных значениях  $P_{\max}$ . Процедура разделения фракталов и фоновых событий основана на различии в поведении этих зависимостей.

**3.1. Особенности анализа фракталов и фоновых событий.** На рис. 1, *a* представлены зависимости  $Prtn$  от параметра  $P_{\max}$  для фракталов с множественностью  $N = 64$  при значениях  $Dev = 0,01$  и  $Dev = 0,18$ . Минимальное значение параметра  $\min_{P_{\max}}$ , при котором восстанавливается более 1% фракталов, равно трем для обоих значений  $Dev$ . При увеличении значения  $P_{\max}$  доля  $Prtn$  монотонно возрастает и, достигнув максимума  $\max_{Prtn}$ , выходит на плато. При  $Dev = 0,01$  фракталы восстанавливаются частично ( $\max_{Prtn} = 0,85$ ). Полное восстановление фракталов ( $\max_{Prtn} = 1,0$ ) происходит при значениях  $P_{\max} \geq 8$  и  $Dev = 0,18$ .

Для нахождения общих закономерностей восстановления фракталов SePaC-методом были проанализированы наборы фракталов, имеющие различные основания ( $P = 3-8$ ) и множественности ( $N = 8-3125$ ). Для всех

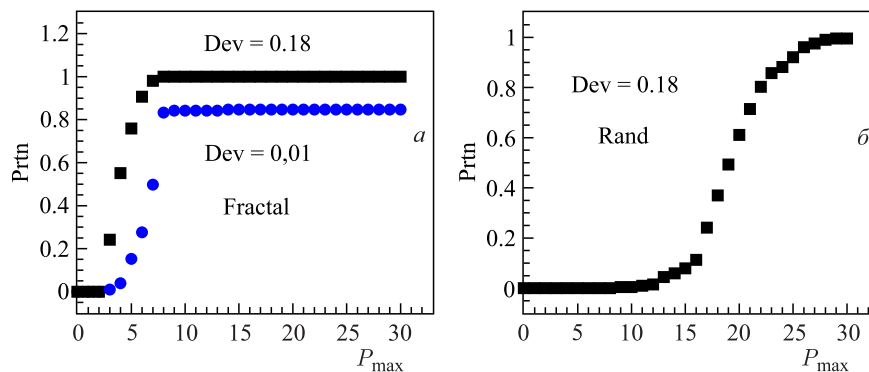


Рис. 1. Анализ SePaC-методом: зависимости доли восстановленных фракталов с множественностью  $N = 64$  от параметра  $P_{\max}$  для фракталов (*a*) и фоновых (*б*) событий

наборов установлены следующие особенности. Значение  $\min_{P_{\max}}$ , при котором  $\text{Prtn} > 0,01$ , равно трем. Зависимость  $\text{Prtn}$  от  $P_{\max}$  имеет плато с максимальным значением доли восстановленных фракталов  $\max_{\text{Prtn}}$ . Для  $\text{Dev} = 0,18$  график функции  $\text{Prtn}(P_{\max})$  выходит на плато при  $P_{\max} = 8$ . Доля достигает значения  $\max_{\text{Prtn}} = 1,0$ , что соответствует полному восстановлению фракталов. Величина  $P_{\max} = 8$  совпадает со значением максимального основания в рассматриваемом блоке данных. Для некоторых наборов фракталов полное восстановление начинается со значения  $\text{Dev} < 0,18$ .

Таким образом, все рассмотренные фракталы восстанавливаются полностью при  $\text{Dev} \geq 0,18$  и оптимальном значении  $P_{\max}$ , определяемом как начало плато в зависимости  $\text{Prtn}(P_{\max})$ . В дальнейшем при анализе фоновых событий будет использовано значение параметра  $\text{Dev} = 0,18$ , которое обеспечивает полное восстановление всех фракталов.

На рис. 1, б представлена зависимость доли  $\text{Prtn}$  от параметра  $P_{\max}$  для фоновых событий с множественностью  $N = 64$  при  $\text{Dev} = 0,18$ . Значение параметра  $\min_{P_{\max}}$ , при котором  $\text{Prtn} > 0,01$ , равно девяти. Отметим, что при  $P_{\max} = 8$  фракталы с множественностью  $N = 64$  восстанавливаются полностью (рис. 1, а). При этом ни одно фоновое событие не определяется как фрактал (рис. 1, б). Видно, что график функции  $\text{Prtn}(P_{\max})$  выходит на плато при  $P_{\max} = 27$  и достигает максимального значения  $\max_{\text{Prtn}} = 0,99$ . Установлено, что для случайных событий произвольной множественности функция  $\text{Prtn}(P_{\max})$  при любых значениях  $\text{Dev}$  имеет характерное поведение, показанное на рис. 1, б. Далее приведены результаты анализа случайных событий с различной множественностью  $N$  при  $\text{Dev} = 0,18$ . В табл. 1 показаны: значения  $\min_{P_{\max}}$ , соответствующие  $\text{Prtn} > 0,01$ , значения доли  $\max_{\text{Prtn}}$  на плато и значения  $P_{\max}$ , при которых функция  $\text{Prtn}(P_{\max})$  выходит на плато.

**Таблица 1. Результаты анализа фоновых событий SePaC-методом при значении  $\text{Dev} = 0,18$**

$N$	8	16	27	32	64	81	125	216	243	256	625
$\min_{P_{\max}}$ ( $\text{Prtn} > 0,01$ )	3	4	5	6	9	15	18	27	32	32	—
$\max_{\text{Prtn}}$	0,39	0,60	0,79	0,83	0,99	0,99	0,98	0,24	0,14	0,14	—
$P_{\max}$ ( $\max_{\text{Prtn}}$ )	9	15	19	20	29	35	41	41	41	41	—

На основе результатов, представленных в таблице, можно сделать следующие выводы. Минимальное значение параметра  $\min_{P_{\max}}$  растет с увеличением множественности. Для событий с  $N = 8$  значение  $\min_{P_{\max}}$  совпадает с аналогичным значением для фракталов. При большой множественности

( $N \geq 625$ ) случайные наборы точек не восстанавливаются как фракталы. Это связано с тем, что количество уровней, определяемое SePaC-методом, при больших значениях  $P_{\max}$  меньше минимального количества уровней фрактала ( $N_{\text{lev}} = 3$ ). Значение величины  $\max_{\text{Prtn}}$  зависит от множественности. С увеличением множественности максимальная доля растет, достигая максимума ( $\max_{\text{Prtn}} = 0,99$  при  $N = 64$ ), и затем монотонно убывает до нуля при  $N = 625$ . Такое поведение обусловлено тем, что для случайных событий, имеющих множественность  $16 \leq N \leq 125$ , с вероятностью 0,6–0,99 можно подобрать такой набор покрытий, что размерности для уровней фрактала (разных покрытий) отличаются на величину Dev. Для событий с малой ( $N = 8$ ) и большой ( $N \geq 125$ ) множественностями это условие выполняется с меньшей вероятностью ( $\max_{\text{Prtn}} \leq 0,39$ ). Значение  $P_{\max}$ , при котором функция  $\text{Prtn}(P_{\max})$  выходит на плато, растет (от 9 до 41) с увеличением множественности.

**3.2. Восстановление фракталов при наличии примеси.** Анализ зависимости  $\text{Prtn}(P_{\max})$  позволяет определить наличие фракталов в исходном наборе. Набор с множественностью  $N > 8$  содержит фракталы, если значение  $\min_{P_{\max}}$  равно 3. Для событий с  $N = 8$  таким условием является  $\max_{\text{Prtn}} > 0,39$ .

Предполагается, что экспериментальные данные содержат фракталы и фоновые события:

$$N_{\text{ev}} = N_{\text{frac}} + N_{\text{rnd}}, \quad (2)$$

где  $N_{\text{ev}}$ ,  $N_{\text{frac}}$  и  $N_{\text{rnd}}$  — количество смешанных событий, фракталов и случайных наборов точек. Выше было показано, что при некоторых значениях параметров метода возможно восстановление всех фракталов. В этом случае количество реконструированных как фракталы событий  $N_{\text{rec}}$  определяется формулой

$$N_{\text{rec}} = N_{\text{frac}} + P_{\text{rf}} \cdot N_{\text{rnd}}. \quad (3)$$

Здесь  $P_{\text{rf}}$  — доля фоновых событий, восстановленных как фракталы, при заданных значениях параметров. Из (2), (3) находим

$$N_{\text{frac}} = \frac{N_{\text{rec}} - P_{\text{rf}} \cdot N_{\text{ev}}}{1 - P_{\text{rf}}}. \quad (4)$$

Отметим, что применимость этой формулы обоснована для набора, содержащего статистически обеспеченное количество ( $\sim 10^3$ ) фоновых событий.

Ранее показано, что для событий с  $N \geq 64$  возможно однозначное разделение фракталов и фоновых событий. На рис. 2, *a* приведены зависимости  $\text{Prtn}$  от  $P_{\max}$  при  $\text{Dev} = 0,18$  для фракталов, фоновых событий и набора данных, содержащих 90% примеси с  $N = 64$ . Для смешанного набора значение  $\min_{P_{\max}}$  равно трем (указание на наличие фракталов). При увеличении  $P_{\max}$  доля  $\text{Prtn}$  возрастает и выходит на плато. При дальнейшем увеличении  $P_{\max}$

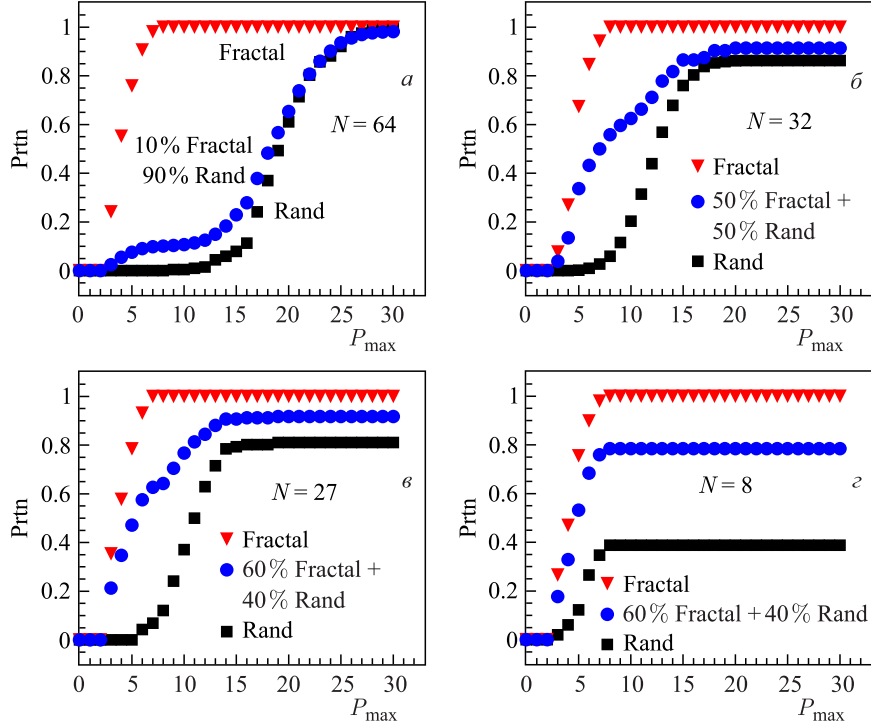


Рис. 2. Анализ SePaC-методом: зависимости доли  $Prtn$  событий, определяемых как фракталы, от параметра  $P_{max}$  при  $Dev = 0,18$  для набора данных с  $N = 64$  и 90% примеси (а), с  $N = 32$  и 50% примеси (б),  $N = 27$  и 40% примеси (в),  $N = 8$  и 40% примеси (г)

наблюдаются повторный рост  $Prtn$  и выход на второе плато. Отметим, что области, соответствующие фракталам и фоновым событиям, разделены первым плато. Выбор значения  $P_{max}$ , как минимального на первом плато зависимости  $Prtn(P_{max})$  при  $Dev = 0,18$ , позволяет однозначно разделить фракталы и фоновые события в исследуемом наборе данных с  $N \geq 64$ . Минимальное значение  $N = 64$ , определяется наибольшим значением основания образования фракталов ( $P = 8$ ) в рассматриваемом наборе. Однозначно разделить фракталы и фоновые события при меньшей множественности возможно, если фракталы имеют основание  $P < 8$ .

Для наборов данных с  $N < 64$  зависимость  $Prtn(P_{max})$  не содержит явно выделенной области, разделяющей фракталы и фоновые события. На рис. 2 представлены зависимости  $Prtn$  от  $P_{max}$  при  $Dev = 0,18$  для наборов с  $N = 32$  и 50% примеси (б),  $N = 27$  и 40% примеси (в),  $N = 8$  и 40% примеси (г). Для событий с множественностями 32, 27 область перекрытия



фракталов и фоновых событий ( $P_{\max} = 6-8$ ) выглядит как «плечо». При значениях примеси больше, чем указанные на рис. 2, *a-г*, «плечо» отсутствует. В этом случае зависимость  $\text{Prtn}(P_{\max})$  имеет одно плато, как и для событий с  $N = 8$ . Для уменьшения количества фоновых событий, восстанавливаемых как фракталы, выбиралось значение  $P_{\max}$ , соответствующее точке на «плече» (рис. 2, *б, в*). Если «плечо» отсутствует, то  $P_{\max}$  соответствует началу плато (рис. 2, *г*).

Оценка доли  $\text{Cont}$  фоновых событий, восстановленных как фракталы, определяется формулой

$$\text{Cont} = \frac{N_{\text{rnd}} \cdot P_{\text{rf}}}{N_{\text{rec}}}. \quad (5)$$

В SePaC-методе в наборе с  $N < 64$  эта величина равна

$$\text{Cont} = \frac{P_{\text{rf}}}{N_{\text{rec}}} \cdot \frac{N_{\text{ev}} - N_{\text{rec}}}{1 - P_{\text{rf}}}. \quad (6)$$

Значение  $\text{Dev} = 0,18$  позволяет однозначно разделить фракталы и фоновые события. Такое разделение возможно и без фиксации параметров  $\text{Dev}$ , но только для событий с  $N \geq 64$ . В этом случае значение  $\text{Dev}$  выбирается из диапазона  $0,01-0,3$ . Такой выбор связан с предположением, что набор  $P$ -адических покрытий и рассматриваемая гипотеза в SePaC-методе удовлетворительно описывают фрактал, если значения фрактальных размерностей для различных уровней отличаются от их среднего не больше чем 30% ( $\text{Dev} \leq 0,3$ ) и не меньше чем 1% ( $\text{Dev} \geq 0,01$ ). Анализ функции  $\text{Prtn}(P_{\max})$  для каждого значения  $\text{Dev}$  позволяет определить минимальное значение  $P_{\max}$  на первом плато и соответствующее ему  $\text{Prtn}$ . Начало выхода на плато зависимости выбранной доли  $\text{Prtn}$  от  $\text{Dev}$  определяет оптимальное значение  $\text{Dev}$ .

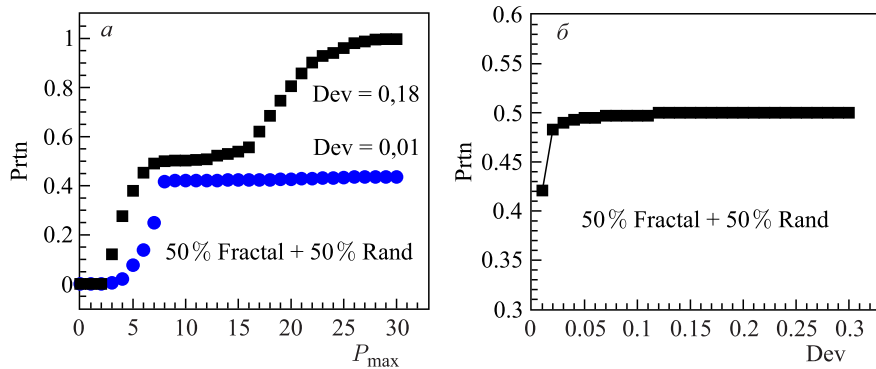


Рис. 3. Анализ SePaC-методом: зависимость доли  $\text{Prtn}$  событий, определяемых как фракталы, от параметра  $P_{\max}$  (*a*); зависимость оптимальной доли  $\text{Prtn}$  от параметра  $\text{Dev}$  для набора данных с  $N = 64$ , содержащих 50% примеси

Типичный вид функции  $\text{Prtn}(P_{\max})$  показан на рис. 3, *a* ( $N = 64$ , 50% примеси,  $\text{Dev} = 0,01$  и  $0,18$ ). Зависимость  $\text{Prtn}(\text{Dev})$  для событий с  $N = 64$  и 50% примеси представлена на рис. 3, *б*. Видно, что при  $\text{Dev} = 0,01$  восстанавливается часть фракталов. С ростом  $\text{Dev}$  наблюдаются увеличение и последующее насыщение  $\text{Prtn}$ . Минимальное значение  $\text{Dev} = 0,12$  на плато соответствует полному восстановлению фракталов.

#### 4. РЕКОНСТРУКЦИЯ ФРАКТАЛОВ ВС-МЕТОДОМ ПРИ НАЛИЧИИ ПРИМЕСИ

ВС-метод имеет один параметр  $\chi_{\text{lim}}^2$ . Выбор его значения основывается на анализе зависимости доли  $\text{Prtn}$  событий, восстановленных как фракталы, от значения  $\chi^2$ , рассматриваемого в диапазоне от 0,01 до 2,5. Процедура разделения фракталов и фоновых событий основана на различии в поведении этой зависимости.

**4.1. Особенности анализа фракталов и фоновых событий.** На рис. 4, *a* представлена зависимость  $\text{Prtn}(\chi^2)$  для фракталов с множественностью  $N = 64$ . Минимальное значение  $\min_{\chi^2}$  параметра, при котором восстанавливается более 1% фракталов, равно 0,02. При увеличении  $\chi^2$  до значения  $\chi_{\text{ch}}^2 = 0,4$  доля  $\text{Prtn}$  резко возрастает до 90%. При  $\chi^2 > 0,4$  наблюдается медленный выход на плато  $\max_{\text{Prtn}} = 1,0$ .

Для нахождения общих закономерностей восстановления фракталов ВС-методом были проанализированы наборы фракталов, имеющие различные основания ( $P = 3-8$ ) и множественности ( $N = 8-3125$ ). Установлено, что функция  $\text{Prtn}(\chi^2)$  имеет характерное поведение, показанное на рис. 4, *a*. Значение  $\min_{\chi^2}$  не превышает 0,05. Величина  $\chi_{\text{ch}}^2$ , характеризующая резкое

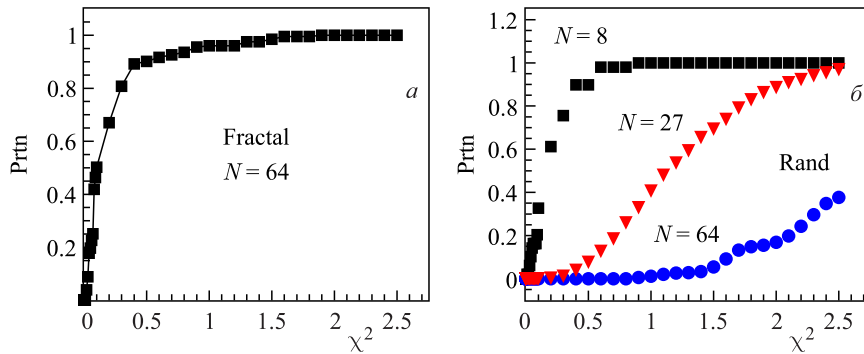


Рис. 4. Анализ ВС-методом: зависимости доли  $\text{Prtn}$  событий, определяемых как фракталы, от параметра  $\chi^2$  для фракталов с  $N = 64$  (*a*) и фоновых событий (*б*) с  $N = 8, 27, 64$

изменение скорости роста  $\text{Prtn}$ , изменяется в диапазоне 0,4–0,6. Отметим, что только для некоторых наборов возможно 100 %-е восстановление фракталов. При  $\chi^2$  из диапазона 0,6–2,5 значения  $\text{Prtn}$  для разных наборов событий отличаются на 6 %. Так при  $\chi^2 = 0,6$  доля восстановленных фракталов изменяется от 90 до 96 %.

На рис. 4, б представлена функция  $\text{Prtn}(\chi^2)$  для фоновых событий с множественностью  $N = 8, 27, 64$ . Для  $N = 8$  значение  $\min_{\chi^2}$  не превышает 0,05 и  $\chi_{\text{ch}}^2 = 0,4$ . Это означает, что невозможно разделить фракталы и фоновые события при этой множественности. Из рисунка видно, что для  $N = 27$  и 64 величина  $\min_{\chi^2}$  равна 0,4 и 0,9 соответственно. Эти значения больше чем 0,05, характерное для фракталов. Для  $N = 27$  наблюдается монотонный рост  $\text{Prtn}(\chi^2)$ . Максимальное значение доли  $\max_{\text{Prtn}}$  равно 0,95. Для  $N = 64$  эта функция также возрастает и при  $\chi^2 = 2,5$  доля  $\max_{\text{Prtn}}$  достигает 0,37.

Далее приведены результаты анализа ВС-методом случайных событий с различной множественностью. В табл. 2 показаны: минимальные значения  $\min_{\chi^2}$ , при которых  $\text{Prtn} > 0,01$ , и значения  $\text{Prtn}$  при  $\chi^2 = 0,6$ . Из таблицы видно, что значение  $\min_{\chi^2}$  растет с увеличением множественности. Для  $N \geq 216$  случайные события не восстанавливаются как фракталы. Значение доли  $\text{Prtn}$  при  $\chi^2 = 0,6$  уменьшается с увеличением множественности. Для  $N \geq 64$  при  $\chi^2 = 0,6$  ни одно случайное событие не восстанавливается как фрактал. Для событий с  $N = 8$  поведение зависимости  $\text{Prtn}(\chi^2)$  не отличается от поведения аналогичной зависимости для фракталов. Поэтому невозможно определить наличие фракталов в таком наборе данных.

**Таблица 2. Результаты анализа фоновых событий ВС-методом**

$N$	8	16	27	32	64	81	125	216
$\min_{\chi^2}$	0,01	0,04	0,2	0,4	0,9	1,5	2,1	—
$\text{Prtn}$ при $\chi^2 = 0,6$	0,99	0,54	0,13	0,05	—	—	—	—

**4.2. Восстановление фракталов при наличии примеси.** Для событий с множественностями  $N > 8$  указанием на наличие фракталов является значение  $\min_{\chi^2} < 0,05$ .

В ВС-методе не для всех наборов фракталов возможно их полное восстановление. Количество событий  $N_{\text{rec}}$ , реконструированных как фракталы, определяется формулой

$$N_{\text{rec}} = P \cdot N_{\text{frac}} + P_{\text{ff}} \cdot N_{\text{rnd}}, \quad (7)$$

где  $P$  и  $P_{\text{ff}}$  — доли реконструированных фракталов и фоновых событий,

определяемых методом как фракталы. Из (2), (7) находим

$$N_{\text{frac}} = \frac{N_{\text{rec}} - P_{\text{rf}} \cdot N_{\text{ev}}}{P - P_{\text{rf}}}. \quad (8)$$

Доля  $P$  при  $\chi^2 = 0,6$  изменяется в диапазоне от 0,9 до 0,96. Это позволяет получить верхнюю и нижнюю оценки количества фракталов в исходном наборе данных.

Для событий с множественностью  $N \geq 64$  возможно однозначное разделение фракталов и фоновых событий. На рис. 5, *a* показаны зависимости  $\text{Prtn}(\chi^2)$  для фракталов, фоновых событий и набора данных, содержащих 90% примеси с  $N = 64$ . Из рисунка видно, что значение  $\min_{\chi^2}$  меньше 0,05 (указание на наличие фракталов) и доля  $\text{Prtn}$  растет с увеличением  $\chi^2$ . Отметим, что зависимость имеет два плато при  $\chi^2 = 0,4-0,9$  и  $\chi^2 = 1,7-2,0$ .

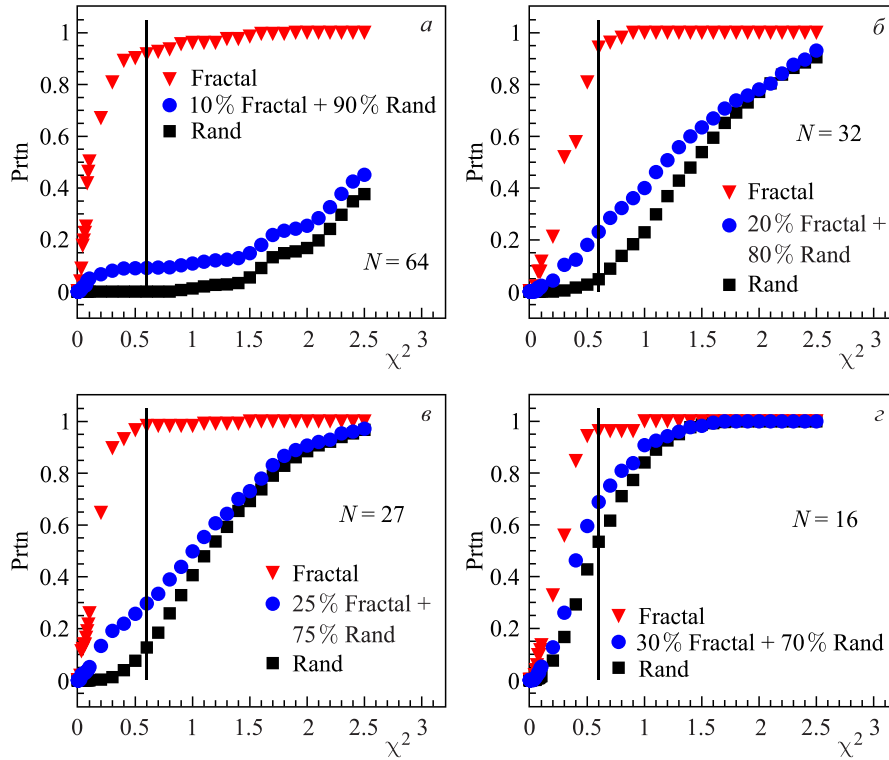


Рис. 5. Анализ ВС-методом: зависимости доли  $\text{Prtn}$  событий, определяемых как фракталы, от параметра  $\chi^2$  для фракталов, случайных и смешанных событий с множественностью  $N = 64$  (*a*),  $N = 32$  (*б*),  $N = 27$  (*в*) и  $N = 16$  (*г*)

Первое плато разделяет области, соответствующие фракталам и фоновым событиям. А второе повторяет поведение  $\text{Prtn}(\chi^2)$  для случайных событий. При выборе  $\chi^2$  из диапазона 0,4–0,9 набор данных, определяемых как фракталы, не содержит фоновых событий.

На рис. 5, б–г показаны зависимости доли  $\text{Prtn}$  от  $\chi^2$  для фракталов, случайных и смешанных событий с  $N = 32, 27$  и  $16$  соответственно. Для данных множественностей функция  $\text{Prtn}(\chi^2)$  не имеет плато, разделяющее фракталы и фоновые события. Выбор значения  $\chi^2 = 0,6$  позволяет выделить от 90 до 96 % фракталов. Долю  $\text{Cont}$  фоновых событий в выделенном как фракталы наборе данных можно оценить по формуле

$$\text{Cont} = \frac{P_{\text{rf}}}{N_{\text{rec}}} \cdot \frac{P \cdot N_{\text{ev}} - N_{\text{rec}}}{P - P_{\text{rf}}}, \quad (9)$$

где  $P = 0,93$  выбирается как среднее в диапазоне 0,9–0,96. Большее количество примеси, чем то, которое указано на рис. 5, а–г, не позволяет оценить  $\text{Cont}$ .

## 5. СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ

В разд. 3, 4 показано, что для исследуемых данных SePaC-метод выделяет все фракталы, а ВС — не менее 90 %. Установлено, что при больших множественностях ( $N \geq 64$ ) наборы, восстановленные обоими методами как фракталы, не содержат фоновых событий. Для событий с меньшими множественностями и различным содержанием примеси доли  $\text{Cont}$  фоновых событий в наборах, определенных как фракталы, приведены в табл. 3. Из табл. 3 видно, что как с ростом примеси, так и с уменьшением множественности в исходных данных  $\text{Cont}$  увеличивается. Полученные значения  $\text{Cont}$  для рассматриваемых методов отличаются не больше чем 3 %. Подчеркнем, что для  $N = 32$  и  $27$  оба метода заметно уменьшают долю примеси. Для  $N = 16$  и 75 % примеси доля фоновых событий в выделенном наборе превышает 63 %. В этом случае спектры фрактальных размерностей и других

**Таблица 3. Доля  $\text{Cont}$  фоновых событий, определенных ВС- и SePaC-методами как фракталы, для смешанных наборов с различным значением множественности и примеси**

Метод	$N = 32$			$N = 27$			$N = 16$			$N = 8$		
	25 %	50 %	75 %	25 %	50 %	75 %	25 %	50 %	75 %	25 %	50 %	75 %
ВС	0,04	0,09	0,15	0,04	0,10	0,27	0,13	0,39	0,63	—	—	—
SePaC	0,01	0,10	0,18	0,03	0,10	0,30	0,10	0,37	0,66	0,18	0,30	0,47

характеристик фракталов будут сильно искажены. Отметим, что в отличие от SePaC-метода ВС-метод не разделяет фракталы и фоновые события с  $N = 8$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ смешанных событий, содержащих фракталы и случайные наборы точек, SePaC- и ВС-методами. Изучены особенности этих методов при нахождении фракталов в наборах, содержащих только фракталы и только фоновые события. Предложены способы определения наличия фракталов и оценки их количества в исходном наборе, выделения фракталов и оценки доли фоновых событий в выделенном наборе. Установлено, что для событий с большими множественностями ( $N \geq 64$ ) наборы, восстановленные как фракталы, не содержат фоновых событий. Для событий с меньшей множественностью наблюдается зависимость доли фоновых событий в выделенном наборе от множественности и величины примеси в исходном наборе. Показано, что SePaC-метод восстанавливает все фракталы, а ВС-метод не менее 90%. Установлено, что SePaC-метод точно определяет, а ВС-метод дает только оценку количества фракталов в смешанных событиях и доли примеси в выделенном наборе. Подчеркнем, что SePaC-метод, в отличие от ВС-метода, позволяет анализировать события даже с очень маленькой множественностью ( $N = 8$ ).

### Приложение А

Одной из основных характеристик фрактала является размерность, значение которой зависит от динамики его образования. Фракталы характеризуются различными размерностями: Хаусдорфа–Безиковича [9], Минковского (клеточная) [7, 8] и др. [8].

Размерность Хаусдорфа–Безиковича  $D_F$  называется фрактальной и определяется как значение  $\delta$ , при котором мера  $M_\delta$  имеет конечное значение:

$$M_\delta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_K \sum_{i=1}^N l_i^\delta. \quad (10)$$

Здесь оператор  $\inf$  означает минимальное из всех возможных покрытий  $K$  рассматриваемого множества;  $\{l_i\}$  — диаметры шаров покрытия, не превышающие значения  $\epsilon$ . Величина  $\epsilon^{-1}$  называется разрешением. Размерность Хаусдорфа–Безиковича является инвариантом метрических пространств.

Размерность Минковского (клеточная размерность)  $D_b$  определяется по формуле

$$D_b = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln N(\delta)}{\ln \delta}. \quad (11)$$

Здесь  $N(\delta)$  — количество пробников размером  $\delta$ , покрывающих объект. Для некоторых типов фракталов клеточная размерность совпадает с размерностью Хаусдорфа–Безиковича ( $D_b = D_F$ ), а для некоторых они различны ( $D_b > D_F$ ). Клеточная размерность является более грубой характеристикой, так как предполагает одинаковую длину частей фрактала на одном уровне.

### Приложение Б

В настоящей работе рассматриваются различные типы фракталов (с независимым, зависимым и комбинированным делением частей), которые являются разновидностями канторовской пыли.

Рассмотрим фракталы с независимым делением частей. Наиболее известным представителем этого типа является триадное канторовское множество. Процесс формирования этого фрактала представлен на рис. 6, *a*. Пусть исходное множество представляет собой отрезок  $[-5; 5]$ . Условно разделим его на три части. На первом уровне фрактала остаются первая и третья части.

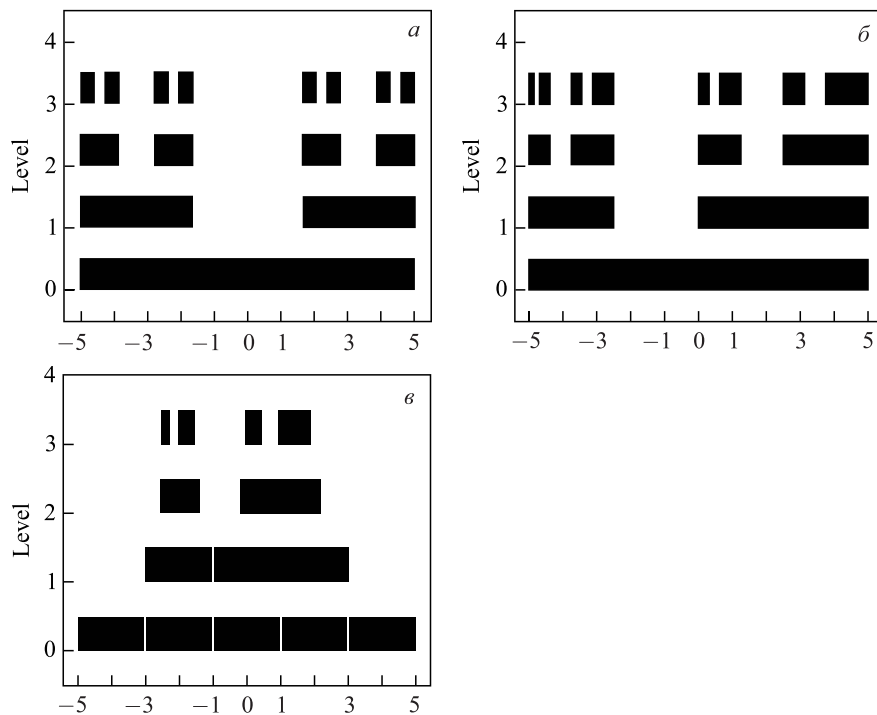


Рис. 6. Процесс формирования фракталов с независимым (*a*), зависимым (*b*) и комбинированным (*v*) делением частей

На последующих уровнях процесс деления повторяется для каждой из оставшихся частей. Исходное множество условно делится на  $n = P^{\text{lev}}$  частей, где  $\text{lev}$  — уровень, а  $P$  — основание образования фрактала. Для триадного канторовского множества  $P$  равно трем. Каждая из частей делится независимо, поэтому такой тип фракталов будем называть фракталами с независимым делением частей.

На рис. 6, б представлен процесс формирования фрактала с зависимым делением частей. Исходное множество (отрезок  $[-5; 5]$ ) условно делится на четыре части. На первом уровне фрактала остаются первая, третья и четвертая части. На последующих уровнях формирования фрактала процесс деления повторяется с учетом того, что третья и четвертая части представляют собой единый отрезок (зависимое деление частей). Основание  $P$  рассмотренного фрактала равно четырем.

Процесс образования фрактала с комбинированным делением частей показан на рис. 6, в. Исходное множество условно делится на  $n = 5^{\text{lev}}$  частей (основание фрактала  $P = 5$ ). В каждом акте деления остаются вторая, третья и четвертая части. Несмотря на то, что оставшиеся части представляют собой единый отрезок, в процессе деления вторая часть делится независимо, а третья и четвертая части рассматриваются как единый объект (делятся зависимо). Такой процесс формирования фрактала будем называть комбинированным.

В работе использовались 774 фрактала с независимым делением, 437 — с зависимым и 646 — с комбинированным делением. Для каждого типа фрактала с основаниями  $P = 3-8$  рассматривались все возможные комбинации размещения делящихся отрезков. Анализируемые фракталы имели от 3 до 11 уровней. Напомним, что допустимое минимальное количество уровней фрактала равно трем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Dedovich T., Tokarev M. P-adic Coverage Method in Fractal Analysis of Showers // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 8, No. 6. P. 521–532.*
2. *Dedovich T., Tokarev M. Method of Systems of the Equations of P-adic Coverages for Fractal Analysis of Events // Phys. Part. Nucl. Lett. 2011. V. 9, No. 6. P. 552–566.*
3. *Dedovich T., Tokarev M. Comparison of Fractal Analysis Methods in the Study of Fractals with Independent Branching // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013. V. 10, No. 6. P. 481–490.*
4. *Dedovich T., Tokarev M. Analysis of Fractal with Dependent Branching by Box Counting, P-adic Coverages and System of Equations of P-adic Coverages // Phys. Part. Nucl. Lett. 2013. V. 10, No. 6. P. 491–500.*
5. *Dedovich T., Tokarev M. Analysis of Fractals with Combined Partition // Phys. Part. Nucl. Lett. 2016. V. 13, No. 2. P. 169–177.*



6. *Dedovich T., Tokarev M.* A Two-Step Procedure of Fractal Analysis // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2016. V. 13, No. 2. P. 178–189.
7. *Mandelbrot B.* The Fractal Geometry of Nature. Freeman, San Francisco, 1982.
8. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
9. *Hausdorff F.* Dimension and äusseres Mass // *Math. Ann.* 1918. V. 79. P. 157.

Получено 2 февраля 2017 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 23.03.2017.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,12. Уч.-изд. л. 1,31. Тираж 275 экз. Заказ № 59073.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)