

P4-2018-59

В. В. Пупышев *

ДВУМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ МЕДЛЕННОЙ
КВАНТОВОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОГО
ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕГО ПОТЕНЦИАЛА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

* E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В.

P4-2018-59

Двумерное движение медленной квантовой частицы
в поле центрального дальнегодействующего потенциала

Исследуется двумерное движение медленной квантовой частицы в поле центрального дальнегодействующего потенциала, убывающего в пределе больших расстояний r как степенная функция $r^{-\beta}$ с показателем $\beta \in (1, 2)$. Найдены низкоэнергетические асимптотики всех парциальных фаз и дифференциального сечения рассеяния такой частицы. Получено простое приближение для энергий ее слабосвязанных состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2018

Pupyshev V. V.

P4-2018-59

Two-Dimensional Movement of a Slow Quantum Particle
in the Field of a Central Long-Range Potential

We study the two-dimensional movement of a slow quantum particle in the field of a central long-range potential decreasing in the limit of large distances r as a power function $r^{-\beta}$ with the exponent $\beta \in (1, 2)$. For this particle, we found the low-energy asymptotics of the phase-shifts and differential cross-section, as well as a simple approximation for the energies of weakly bound states.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Начнем с предположений. Предположим, что квантовая частица p_1 движется в двумерной плоскости \mathcal{P} и обладает полной энергией E . Пусть точка O лежит в \mathcal{P} и является неподвижным силовым центром, удаленным от частицы p_1 на расстояние r . По определению силовой центр O воздействует на эту частицу посредством центрального медленно убывающего потенциала

$$V(r) = \alpha V_0 r^{-\beta}, \quad \alpha = \pm 1, \quad V_0 > 0, \quad \beta \in (1, 2). \quad (1)$$

Наша задача — найти главное слагаемое низкоэнергетической ($E \rightarrow 0+$) асимптотики дифференциального сечения рассеяния частицы p_1 и приближенные энергии ее всех слабосвязанных ($E \rightarrow 0-$) состояний.

Для решения этой задачи применим известный метод построения асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром перед старшей производной [1].

В разд. 1 к уравнению такого типа сведем одномерное уравнение Шредингера, описывающее радиальное движение частицы p_1 в дальнодействующем поле (1). Разд. 2 и 3 посвятим выводу и анализу неявных и явных низкоэнергетических асимптотик всех парциальных фаз двумерного рассеяния частицы p_1 отталкивающим ($\alpha = 1$) или притягивающим ($\alpha = -1$) потенциалом (1). В разд. 4 и 5 для амплитуды и дифференциального сечения рассеяния потенциалом (1), $\alpha = \pm 1$, построим довольно простые низкоэнергетические приближения. В разд. 6 найдем приближение для энергий всех слабосвязанных состояний частицы p_1 в притягивающем потенциале (1). В заключении просуммируем результаты наших исследований.

Сделаем несколько важных замечаний.

Трехмерное рассеяние квантовой частицы в поле потенциала типа (1) до сих пор не исследовано в полном объеме. Точные решения задачи рассеяния и задачи на связанные состояния квантовой частицы в таком поле не известны. В работе [2] впервые найдены два первых слагаемых низкоэнергетических асимптотик парциальных фаз трехмерного рассеяния. Старшее слагаемое амплитуды трехмерного рассеяния впервые получено в работе [3]. Авторы работ [2, 3] использовали метод построения асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром перед старшей производной [1].

Двумерное движение медленной квантовой частицы в поле медленно убывающего потенциала (1) ранее не исследовалось. Настоящая работа является попыткой восполнить этот пробел современной теории двумерного рассеяния математически обоснованным анализом. Поэтому в разд. 2–6 особое внимание уделяется доказательствам сходимости используемых интегралов и рядов, выводам оптимальных для вычисления представлений и исследованию неявных и явных, равномерных и неравномерных асимптотик всех используемых функций.

1. РАДИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОГО РАССЕЯНИЯ

В плоскости \mathcal{P} введем стандартным образом полярную систему координат с начальной точкой, совпадающей с силовым центром O . Положение квантовой частицы p_1 в плоскости \mathcal{P} зададим ее полярными координатами $\mathbf{r} = (r, \varphi)$, где r — расстояние от частицы p_1 до точки O , а φ — азимутальный угол двумерного вектора \mathbf{r} . Пусть \hbar — постоянная Планка. Символами m_1 , \mathbf{k} и E обозначим массу, волновой вектор и полную энергию частицы p_1 . Считаем, что волновой вектор \mathbf{k}_0 ее начального состояния имеет нулевой азимутальный угол.

Пусть d — некоторое фиксированное ненулевое расстояние. Безразмерные волновое число q , аргументы x , ρ и параметр b определим соотношениями

$$q \equiv kd, \quad x \equiv \frac{r}{d}, \quad \rho \equiv kr = qx, \quad b \equiv \left(\frac{2m_1}{\hbar^2} d^{2-\beta} V_0 \right)^{1/\beta}. \quad (2)$$

Приведем формулы для вычисления полной энергии квантовой частицы p_1 :

$$E = \frac{1}{2m_1} (\hbar k)^2, \quad E = \frac{1}{2m_1} \left(\frac{\hbar q}{d} \right)^2. \quad (3)$$

В силу этих формул $q \rightarrow 0+$ тогда и только тогда, когда $E \rightarrow 0+$, и наоборот.

Перейдем к формулировке исходной радиальной задачи двумерного рассеяния частицы p_1 потенциалом (1). Этот потенциал не зависит от угла φ . Поэтому согласно теории двумерного рассеяния [4, 5] двумерная задача Шредингера для волновой функции частицы p_1 допускает разделение переменных r и φ и сводится к бесконечной, но счетной ($2\lambda = -1, 1, \dots$) совокупности радиальных краевых задач Шредингера. В принятых обозначениях (2) каждая из таких задач является одномерным уравнением Шредингера

$$\left[\partial_x^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} + q^2 - \alpha \left(\frac{b}{x} \right)^\beta \right] \tilde{u}_\lambda(x, q) = 0, \quad x > 0, \quad q > 0, \quad (4)$$

с условием

$$\tilde{u}_\lambda(x, q) = O(x^{\lambda+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (5)$$

и условием

$$\tilde{u}_\lambda(x, q) = \sin[\rho - \pi\lambda/2 + \delta_m(q)] + O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad m \equiv \lambda - 1/2. \quad (6)$$

Непрерывное в области $0 \leq x < \infty$ решение \tilde{u}_λ краевой задачи (4)–(6) является регулярной радиальной волновой функцией частицы p_1 в состоянии рассеяния $|q, \lambda\rangle$ с квантовыми числами q и λ . Асимптотика (6) такой функции содержит искомую фазу рассеяния $\delta_m(q)$.

Теперь перепишем краевую задачу (4)–(6) в виде, наиболее удобном для наших исследований. Для этого сначала положим по определению

$$p^2(y, s) \equiv 1 - \alpha \left(\frac{b}{y}\right)^\beta - \left(\frac{s}{y}\right)^2, \quad y \geq 0, \quad s \geq 0, \quad \beta \in (1, 2). \quad (7)$$

Затем подстановкой

$$x = q^{-2/\beta}y, \quad \tilde{u}_\lambda(x, q) = u_\lambda(y, q), \quad \nu = (2 - \beta)/\beta, \quad s = q^\nu \sqrt{\lambda(\lambda + 1)}, \quad \rho = yq^{-\nu} \quad (8)$$

сведем уравнение (4) к уравнению

$$[q^{2\nu} \partial_y^2 + p^2(y, s)] u_\lambda(y, q) = 0, \quad (9)$$

а из граничных условий (5) и (6) выведем условие

$$u_\lambda(y, q) = O(y^{\lambda+1}), \quad q^{2/\beta}y \rightarrow 0, \quad (10)$$

и условие

$$u_\lambda(y, q) = \sin[\rho - \pi\lambda/2 + \delta_m(q)] + O(\rho^{-1}), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad m \equiv \lambda - 1/2. \quad (11)$$

Пределом низких энергий рассеяния называем предел $q \rightarrow 0+$ при фиксированных значениях квантового числа λ , параметра d и параметров α , V_0 и β потенциала (1).

2. РАВНОМЕРНЫЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ ФАЗ

Асимптотику фазы $\delta_m(q)$, справедливую при $q \rightarrow 0+$ и любом значении m номера $m = \lambda + 1/2$, назовем равномерной по этому номеру низкоэнергетической асимптотикой.

Определим функции $y_0(s)$ и $p(y, s)$. Для этого используем определение (7) функции $p^2(y, s)$ и перепишем уравнение $p^2(y, s) = 0$ в виде уравнения

$$y^2 - \alpha b^\beta y^{2-\beta} = s^2, \quad y \geq 0, \quad s \geq 0, \quad \beta \in (1, 2). \quad (12)$$

Его левую и правые части считаем функциями $f_1(y)$ и $s^2 \geq 0$ аргумента y в области $y \geq 0$. Построим графики этих функций. При $\alpha = 1$ и при $\alpha = -1$ функция $f_1(y)$ монотонно возрастает, если увеличивается ее аргумент y . В точке $y = 0$ эта функция равна нулю или единице, если $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Поэтому кривая $f_1(y)$ всегда пересекает прямую $s^2 > 0$, причем только в одной точке. Абсцисса $y_0(s)$ этой точки является единственным, причем неотрицательным, корнем уравнения (12). Эта же абсцисса является монотонно возрастающей функцией переменной s . В точке $s = 0$ эта функция равна нулю или числу b , если $\alpha = -1$ или $\alpha = 1$. Согласно определению (7) функция $p^2(y, s)$ неотрицательная, если $\alpha = \pm 1$, $y \geq y_0(s)$ и $s \geq 0$. При таких условиях функция $p(y, s) \equiv \sqrt{p^2(y, s)}$ является вещественной и неотрицательной. Именно этот случай и рассматривается ниже.

Приступим к выводу равномерных низкоэнергетических асимптотик фаз рассеяния $\delta_m(q)$.

Положим $q \rightarrow 0+$. Тогда исследуемое уравнение (9) станет двучленным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром $q^{2\nu}$ перед старшей производной. Следуя монографии [1], применим известный метод построения асимптотических решений уравнений такого типа в случае физических граничных условий (10) и (11). Сначала выполним замены

$$\lambda(\lambda + 1) \rightarrow (\lambda + 1/2)^2 = m^2, \quad q^\nu \sqrt{\lambda(\lambda + 1)} \rightarrow q^\nu m.$$

Затем запишем искомую асимптотику фазы $\delta_m(q)$ в виде равенства

$$\delta_m(q) = q^{-\nu} g(s) + O(q^\nu), \quad m = 0, 1, \dots, \quad s = q^\nu m, \quad q \rightarrow 0+. \quad (13)$$

В этом равенстве функция $g(s)$ определена формулой

$$g(s) \equiv \frac{\pi}{2} s + \int_{y_0(s)}^{\infty} [p(y, s) - 1] dy - y_0(s), \quad s \geq 0. \quad (14)$$

Поэтому производная $\partial_s g(s)$ этой функции равна следующей разности:

$$\partial_s g(s) = \frac{\pi}{2} - h(s), \quad h(s) \equiv s \int_{y_0(s)}^{\infty} \frac{dy}{y^2 p(y, s)}, \quad s \geq 0. \quad (15)$$

Обсудим формулы (13)–(15). Согласно формуле (13) функция $q^{-\nu}g(s)$ при частном значении $q^\nu m$ аргумента s является главным слагаемым асимптотики фазы рассеяния $\delta_m(q)$ при $q \rightarrow 0+$. Асимптотика (13) является равномерной по номеру m . При любом $s \geq 0$ функция $g(s)$ определена соотношением (14). Представления (14) и (15) функций $g(s)$ и $\partial_s g(s)$ содержат интегралы, нижние пределы которых зависят от переменной s , а верхние равны бесконечности. Такие интегралы сложно и исследовать, и вычислять. Поэтому необходимо вывести более удобные представления функций $g(s)$ и $h(s)$ в виде интегралов по конечному отрезку $0 \leq z \leq 1$.

Решим эту задачу. Сначала подстановкой

$$y = \frac{1}{\tau(s)} \left(\frac{s^2}{b^\beta} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \quad (16)$$

сведем уравнение $p^2(y, s) = 0$ к уравнению

$$\tau^2(s) + \alpha \tau^\beta(s) = \left(\frac{s}{b} \right)^{\frac{2\beta}{2-\beta}}, \quad s \geq 0, \quad \alpha = \pm 1, \quad \beta \in (1, 2). \quad (17)$$

Графическим способом нетрудно показать, что при любом $s > 0$ это уравнение имеет единственный, причем положительный корень, который монотонно возрастает на полуоси $s \geq 0$, а в пределе $s \rightarrow 0$ сходится к нулю в случае $\alpha = 1$ и к единице в случае $\alpha = -1$. Такой корень обозначим символом $\tau_0(s)$. Так как уравнение $p^2(y, s) = 0$ заменой (16) сводится к уравнению (17), то имеется однозначная связь между корнями $y_0(s)$ и $\tau_0(s)$ этих уравнений. Действительно, если в правой части равенства (16) заменить функцию $\tau(s)$ корнем $\tau_0(s)$ уравнения (17), то левая часть этого же равенства будет корнем $y_0(s)$ уравнения $p^2(y, s) = 0$. Поэтому из равенства

$$y = \frac{1}{z\tau_0(s)} \left(\frac{s}{b} \right)^{\frac{2\beta}{2-\beta}} \quad (18)$$

следует, что $y = y_0(s)$, если $z = 1$, и $y = \infty$, если $z = 0$. Используя эти соотношения, сначала перейдем в интеграле, содержащемся в сумме (14), к переменной z , затем проинтегрируем полученный интеграл по частям и тем самым закончим вывод искомого представления функции $g(s)$:

$$g(s) = \frac{s}{2} \left[\pi - \int_0^1 \frac{2 + \alpha\beta\tau_0^{\beta-2}(s)z^{\beta-2}}{\sqrt{1 - z^2 + \alpha\tau_0^{\beta-2}(s)(1 - z^\beta)}} dz \right], \quad \alpha = \pm 1, \quad s \geq 0. \quad (19)$$

Затем той же подстановкой (18) сведем исходное представление (15) функции $h(s)$ к искомому представлению

$$h(s) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 + \alpha \tau_0^{\beta-2}(s)(1 - z^\beta)}}, \quad \alpha = \pm 1, \quad s \geq 0. \quad (20)$$

Полученные представления (18), $z = 1$, и (19), (20) функций $y_0(s)$, $g(s)$ и $h(s)$ содержат лишь одну неизвестную функцию $\tau_0(s)$. Воспользуемся этим фактом в следующем разделе.

3. НЕРАВНОМЕРНЫЕ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ ФАЗ

Считаем, что значения параметров d , α , β и b фиксированы. Асимптотику фазы $\delta_m(q)$ при $q \rightarrow 0+$ и дополнительном условии $m \ll q^{-\nu}$ или $m \gg q^{-\nu}$ называем низкоэнергетической асимптотикой этой фазы при малых или больших значениях ее номера m . Такая асимптотика верна не при всех значениях номера m и поэтому называется неравномерной по этому номеру.

Сформулируем нашу задачу и поясним план ее решения. Итак, необходимо найти явные приближения асимптотики (13) фазы $\delta_m(q)$ при условии $q^\nu m \ll 1$ и при условии $q^\nu m \gg 1$. Для этого достаточно сначала в представлении (13) заменить функцию $g(s)$ ее явными асимптотиками при $s \rightarrow 0$ или $s \rightarrow \infty$, а затем положить $s = q^\nu m$. Чтобы получить такие асимптотики, придется последовательно вывести явные асимптотики функций $\tau_0(s)$, $y_0(s)$ и $h(s)$ в пределе $s \rightarrow 0$ и в пределе $s \rightarrow \infty$. Для этого удобно сначала исследовать корень $\tau_0(s)$ уравнения (17), а затем воспользоваться представлениями (18), $z = 1$, и (19), (20) функций $y_0(s)$ и $g(s)$, $h(s)$ через этот корень.

3.1. Явные асимптотики функции $\tau_0(s)$. Напомним, что $\tau_0(s)$ — единственный, причем неотрицательный, корень уравнения (17). Покажем, что при $\beta = 4/3$ и $\beta = 3/2$ это уравнение имеет точное решение.

В случае $\beta = 4/3$ уравнение (17) подстановкой $\tau(s) = (v/3)^{3/2}$ с условием $v \geq 0$ сводится к кубическому уравнению

$$v^3 + 3\alpha v^2 = 2u, \quad u \equiv (27/2)(s/b)^4 \geq 0, \quad \alpha = \pm 1.$$

Известным способом [6] найдем неотрицательный корень v_1 такого уравнения. Затем в использованной подстановке $\tau(s) = (v/3)^{3/2}$ положим $v = v_1$. В итоге получим точное решение $\tau_0(s)$ исходного уравнения (17): в случае $\alpha = 1$ и $\beta = 4/3$

$$\begin{aligned} \tau_0(s) &= 3^{-3/2} [2 \cos(t/3) - 1]^{3/2}, & t &\equiv \arccos(u - 1), & u &\in [0, 2]; \\ \tau_0(s) &= 3^{-3/2} [2 \operatorname{ch}(t/3) - 1]^{3/2}, & t &\equiv \operatorname{arch}(u - 1), & u &> 2, \end{aligned} \quad (21)$$

а в случае $\alpha = -1$ и $\beta = 4/3$

$$\tau_0(s) = 3^{-3/2} [2 \operatorname{ch}(t/3) + 1]^{3/2}, \quad t \equiv \operatorname{arch}(u + 1), \quad u \geq 0. \quad (22)$$

Для случая $\alpha = \pm 1$, $\beta = 3/2$ обсуждаемое уравнение (17) также имеет точное решение, потому что подстановкой $\tau = v^2$, $v \geq 0$, сводится к биквадратному уравнению, положительный корень которого нетрудно выразить через элементарные функции по известным формулам [6].

При значениях параметра β , отличных от $4/3$ и $3/2$, уравнение (17) решить не удалось. Однако при любых фиксированных параметрах $\alpha = \pm 1$, $\beta \in (1, 2)$ и $b > 0$ удалось построить явные асимптотики корня $\tau_0(s)$ этого уравнения в двух пределах $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$. Поясним вывод таких асимптотик.

Начнем со случая $\alpha = 1$, $s \rightarrow 0$. Исследуем уравнение (17). При $s \rightarrow 0$ его правая, а значит, и левая части сходятся к нулю. Следовательно, $\tau(s) \rightarrow 0+$. Так как $\beta < 2$, то $\tau^2(s) \ll \tau^\beta(s)$. Поэтому в обсуждаемом уравнении можно пренебречь слагаемым $\tau^2(s)$, а затем получить приближенное соотношение

$$\tau(s) \approx \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2}{2-\beta}}, \quad \alpha = 1, \quad s \rightarrow 0.$$

Его правая часть — старшее слагаемое искомой асимптотики функции $\tau(s)$. Поэтому эту функцию будем искать в виде произведения такого слагаемого и суммы $1 + w(t)$:

$$\tau(s) = \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2}{2-\beta}} [1 + w(t)]. \quad (23)$$

Заменим в исходном уравнении (17) функцию $\tau(s)$ таким произведением, затем выведем уравнение для искомой функции $w(t)$ и попутно определим ее аргумент t :

$$\beta t [1 + w(t)]^2 + [1 + w(t)]^\beta = 1, \quad t \equiv \frac{1}{\beta} \left(\frac{s}{b}\right)^2.$$

В этом уравнении представим функцию $w(t)$ суммой

$$w(t) = \sum_{n=1}^3 a_n t^n + \chi(t), \quad \chi(t) = \sum_{n=4}^{\infty} a_n t^n, \quad (24)$$

содержащей искомые коэффициенты a_n и функцию $\chi(t)$. В полученном соотношении разложим функции $[1 + w(t)]^2$ и $[1 + w(t)]^\beta$ в ряды Маклорена [7] по аргументу t , затем приведем подобные члены и положим равными нулю коэффициенты перед линейно независимыми степенными функциями t^n , $n = 1, 2, 3$. Таким образом однозначно определим коэффициенты a_n , $n = 1, 2, 3$, через параметр β и убедимся в том, что $\chi(t) = O(t^4)$ при

$s \rightarrow 0$. Затем в равенстве (23) заменим функцию $w(t)$ суммой (24) с найденными коэффициентами a_n , $n = 1, 2, 3$, и в итоге получим искомую явную асимптотику корня $\tau_0(s)$ уравнения (17) для случая $\alpha = 1$, $s \rightarrow 0$. Запишем ее в виде

$$\tau_0(s) = \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2}{2-\beta}} \left[1 - t + (5 - \beta)\frac{t^2}{2} + (7 - \beta)(2\beta - 7)\frac{t^3}{6} + O(t^4) \right],$$

$$t = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s}{b}\right)^2 \rightarrow 0. \quad (25)$$

Теперь исследуем случай $\alpha = -1$, $s \rightarrow 0$. В этом случае второе слагаемое левой части уравнения (17) отрицательное. Поэтому $\tau(s) \rightarrow 1+$, и следует использовать подстановку $\tau(s) = 1 + w(t)$. Такой подстановкой сведем исследуемое уравнение (17) к уравнению

$$[1 + w(t)]^2 - [1 + w(t)]^\beta = (2 - \beta)t, \quad t \equiv \frac{1}{2 - \beta} \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2\beta}{2-\beta}}.$$

Решение $w(t)$ этого уравнения найдем способом, подробно изложенным для предыдущего случая ($\alpha = 1, s \rightarrow 0$): функцию $w(t)$ заменим суммой (24), затем определим все коэффициенты a_n , $n = 1, 2, 3$, в равенство $\tau(s) = 1 + w(t)$ подставим сумму (24) с найденными коэффициентами a_n , $n = 1, 2, 3$. Полученную явную асимптотику корня $\tau_0(s)$ уравнения (17) в случае $\alpha = -1$, $s \rightarrow 0$ представим формулой

$$\tau_0(s) = 1 + t - (\beta + 1)\frac{t^2}{2} + (\beta + 3)(2\beta + 1)\frac{t^3}{6} + O(t^4), \quad t = \frac{1}{2 - \beta} \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2\beta}{2-\beta}} \rightarrow 0. \quad (26)$$

Осталось рассмотреть случай $\alpha \pm 1$, $s \rightarrow \infty$. Исследуем уравнение (17). Так как $\beta < 2$, то $s \rightarrow \infty$. Поэтому обе части этого уравнения неограниченно возрастают и, кроме того, $\tau^2(s) \gg \tau^\beta(s)$. Поэтому в обсуждаемом уравнении можно пренебречь слагаемым $\tau^\beta(s)$, получить приближенное соотношение

$$\tau(s) \approx \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{\beta}{2-\beta}}, \quad \alpha = \pm 1, \quad s \rightarrow \infty$$

и, используя его, положить

$$\tau(s) = \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{\beta}{2-\beta}} [1 + w(t)],$$

а затем вывести уравнение

$$[1 + w(t)]^2 + \alpha t [1 + w(t)]^\beta = 1, \quad t = \left(\frac{b}{s}\right)^\beta.$$

Разрешив его тем же способом, что и для рассмотренных выше случаев ($\alpha = \pm 1, s \rightarrow 0$), нетрудно получить искомую явную асимптотику корня $\tau_0(s)$ уравнения (17) в случае $\alpha = \pm 1, s \rightarrow \infty$. Запишем эту асимптотику в виде

$$\tau_0(s) = \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{\beta}{2-\beta}} \left[1 - \alpha t + (2\beta - 1)\frac{t^2}{4} - \alpha(\beta - 1)(3\beta - 1)\frac{t^3}{16} + O(t^4) \right],$$

$$t = \left(\frac{b}{s}\right)^\beta.$$
(27)

Теперь докажем, что функция τ_0 бесконечно дифференцируема в области $s \geq 0$. Для этого заменой $\tau(s) \rightarrow \tau_0(s)$ сведем уравнение (17) к тождеству. Продифференцируем это тождество по переменной s . Разрешив полученное соотношение относительно искомой производной, получим равенство

$$\partial_s \tau_0(s) = \frac{2b\beta}{2-\beta} \left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{3\beta-2}{2\beta}} \frac{1}{a_\tau(s)}, \quad a_\tau(s) \equiv 2\tau_0(s) + \alpha\beta\tau_0^{\beta-1}(s). \quad (28)$$

В любом из случаев $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$ благодаря асимптотикам (25)–(27) и монотонному возрастанию функции $\tau_0(s)$ правая часть этого равенства непрерывна в области $s \geq 0$. Следовательно, этим же свойством обладает и производная $\partial_s \tau_0(s)$. По индукции несложно показать, что производная любого порядка правой части равенства (28) непрерывна в области $s \geq 0$. Следовательно, в этой же области все производные $\partial_s^n \tau_0(s)$, $n = 1, 2, \dots$, являются непрерывными функциями, что и требовалось доказать.

3.2. Явные асимптотики функции $y_0(s)$. По определению $y_0(s)$ — неотрицательный корень уравнения (12). Найдем этот корень для случая $\beta = 4/3$. Подстановкой $y = b(v/\sqrt{3})^{3/2}$ сведем уравнение (12) к кубическому уравнению

$$v^3 - 3\alpha v = 2u, \quad u \equiv (3\sqrt{3}/2)(s/b)^2 \geq 0, \quad \alpha = \pm 1, \quad v \geq 0,$$

решим это уравнение известным способом [6], а затем покажем, что в случае $\alpha = 1, \beta = 4/3$

$$y_0(s) = b \left[(2/\sqrt{3}) \cos(t/3) \right]^{3/2}, \quad t \equiv \arccos u, \quad u \in [0, 1];$$

$$y_0(s) = b \left[(2/\sqrt{3}) \operatorname{ch}(t/3) \right]^{3/2}, \quad t \equiv \operatorname{arcsh} u, \quad u > 1,$$

а в случае $\alpha = -1, \beta = 4/3$

$$y_0(s) = b \left[(2/\sqrt{3}) \operatorname{sh}(t/3) \right]^{3/2}, \quad t \equiv \operatorname{arcsh} u, \quad u \geq 0.$$

Перейдем к выводу явных асимптотик функции $y_0(s)$ в двух пределах $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$ и при любых фиксированных параметрах $\alpha = \pm 1$, $\beta \in (1, 2)$ и $b > 0$. Для этого используем представление (18), $z = 1$, функции $y_0(s)$ через функцию $\tau_0(s)$. Последовательно заменим в нем функцию $\tau_0(s)$ ее асимптотикой (25), (26) и (27). Правую часть каждого полученного равенства разложим в ряд Маклорена по аргументу t . В результате получим следующие явные асимптотики функции $y_0(s)$: в случае $\alpha = 1$ и $s \rightarrow 0$

$$y_0(s) = b \left[1 + t + (\beta - 3) \frac{t^2}{2} + (\beta - 5)(2\beta - 5) \frac{t^3}{6} + O(t^4) \right], \quad t = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s}{b} \right)^2;$$

в случае $\alpha = -1$ и $s \rightarrow 0$

$$y_0(s) = \left(\frac{s^2}{b\beta} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \left[1 - t + (3 + \beta) \frac{t^2}{2} - (\beta + 5)(2\beta + 3) \frac{t^3}{6} + O(t^4) \right],$$

$$t = \frac{1}{2 - \beta} \left(\frac{s}{b} \right)^{\frac{2\beta}{2-\beta}};$$

и, наконец, в случае $\alpha = \pm 1$ и $s \rightarrow \infty$

$$y_0(s) = s \left[1 + \alpha t + (3 - 2\beta) \frac{t^2}{4} + \alpha(1 - \beta)(5 - 3\beta) \frac{t^3}{16} + O(t^4) \right], \quad t = \left(\frac{b}{s} \right)^\beta.$$

Отметим, что функция $y_0(s)$ бесконечно дифференцируема в области $s \geq 0$. Это утверждение доказывается способом, аналогичным изложенному в конце предыдущего пункта, но используется уравнение (12) и приведенные выше асимптотики функции $y_0(s)$.

3.3. Свойства функции $h(s)$ и ее производной $\partial_s h(s)$. Выявим свойства функции $h(s)$, порожденные ее интегральным представлением (20) через функцию $\tau_0(s)$.

В точке $s = 0$ функция $\tau_0(s)$ равна нулю или единице, если $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$. Используя эти значения функции $\tau_0(s)$, вычислим значение функции $(2/\pi)h(s)$ в точке $s = 0$ следующим способом: умножим обе части интегрального представления (20) на число $(2/\pi)$, затем перейдем к пределу $s \rightarrow 0$ под знаком интеграла и в итоге получим

$$\frac{2}{\pi}h(0) = 0, \quad \alpha = 1; \quad \frac{2}{\pi}h(0) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^\beta - z^2}} = \frac{2}{2 - \beta}, \quad \alpha = -1.$$

В пределе $s \rightarrow \infty$, $\alpha = \pm 1$ функция $\tau_0(s)$ неограниченно возрастает. Поэтому если в представлении (20) положить $s \rightarrow \infty$ под знаком интеграла, то получатся соотношения

$$\frac{2}{\pi}h(s) \rightarrow 1-, \quad \alpha = 1, \quad s \rightarrow \infty; \quad \frac{2}{\pi}h(s) \rightarrow 1+, \quad s \rightarrow \infty, \quad \alpha = -1.$$

Заметим, что в обоих случаях $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$ функция $\tau_0(s)$ монотонно возрастает на полуоси $s \geq 0$. Поэтому вследствие представления (20) на той же полуоси функция $h(s)$ монотонно возрастает или монотонно убывает, если $\alpha = 1$ или $\alpha = -1$.

В силу перечисленных выше свойств функции $h(s)$ при любом $s \geq 0$ верны неравенства

$$0 \leq \frac{2}{\pi}h(s) < 1, \quad \alpha = 1; \quad 1 < \frac{2}{\pi}h(s) \leq \frac{2}{2-\beta}, \quad \alpha = -1. \quad (29)$$

После дифференцирования по аргументу s равенство (20) станет представлением производной $\partial_s h(s)$ через функции $\tau_0(s)$, $\partial_s \tau_0(s)$ и интеграл, сходящийся при любом $s \geq 0$. В этом представлении обе функции $\tau_0(s)$, $\partial_s \tau_0(s)$ непрерывны на всей полуоси при $s \geq 0$. Следовательно, на этой полуоси производная $\partial_s h(s)$ существует и является непрерывной функцией. В случае $\alpha = 1$ функция $h(s)$ монотонно возрастает, и поэтому $\partial_s h(s) > 0$, $s \geq 0$. В случае $\alpha = -1$ функция $h(s)$ монотонно убывает, следовательно, $\partial_s h(s) < 0$, $s \geq 0$. В обоих случаях $|\partial_s h(s)| = \alpha \partial_s h(s)$ при любом $s \geq 0$.

Наглядное представление о перечисленных выше свойствах функций $h(s)$ и $\partial_s h(s)$ дает рис. 1. На нем представлены графики этих функций для случая $\alpha = \pm 1$, $b = 2$ и $\beta = 4/3$. Для построения всех графиков использовалось интегральное представление (20) и формулы (21) и (22).

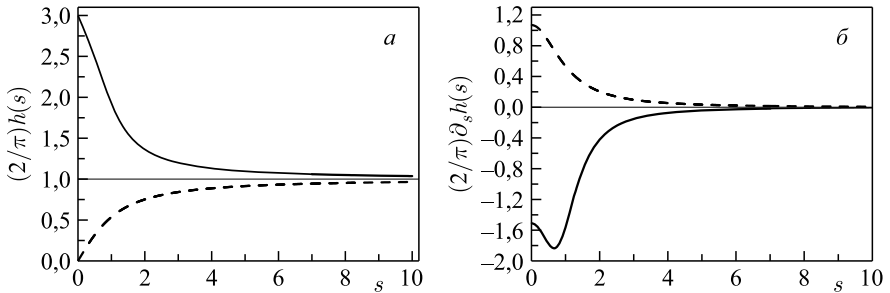


Рис. 1. Случай $b = 2$, $\beta = 4/3$. Графики функций $(2/\pi)h(s)$ (а) и $(2/\pi)\partial_s h(s)$ (б) при $\alpha = -1$ — сплошные кривые, при $\alpha = 1$ — пунктирные кривые. Графики функций $z_a(s) \equiv 1$ и $z_b(s) \equiv 0$ — тонкие прямые

Перейдем к выводу неявных и явных асимптотик функций $h(s)$ и $\partial_s h(s)$.

Случай $\alpha = 1$, $s \rightarrow 0$. Сначала запишем равенство (20), $\alpha = 1$, в виде

$$h(s) = \sqrt{v}S(v), \quad S(v) \equiv \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)v + (1-z^\beta)}}, \quad v \equiv \tau_0^{2-\beta}(s), \quad s \geq 0. \quad (30)$$

Затем представим интеграл $S(v)$ рядом Маклорена

$$S(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} a_n (-v)^n, \quad a_n \equiv \int_0^1 \frac{u^n(z)}{\sqrt{1-z^\beta}} dz, \quad u(z) \equiv \frac{1-z^2}{1-z^\beta}. \quad (31)$$

Исследуем этот ряд. Сначала оценим интегралы a_n . В этих интегралах $u(z) \in [1, 2/\beta]$ при $\forall z \in [0, 1]$. Поэтому $a_n < (2/\beta)^n a_0$ при любом $n \geq 1$. Следовательно,

$$|S(v)| < T(v) \equiv a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} \left(\frac{v}{\beta}\right)^n.$$

По признаку Даламбера [7, 8] ряд $T(v)$, а значит, и ряд $S(v)$ сходится равномерно при условии $v \equiv \tau_0^{2-\beta}(s) < \beta/2$. Это условие выполняется при достаточно малых значениях аргумента s , потому что согласно формуле (25) функция $\tau_0(s)$ сходится к нулю при $s \rightarrow 0$.

Итак, если $v < \beta/2$, то ряд $S(v)$ сходится равномерно. Поэтому при $\tau_0(s) \rightarrow 0$ в формулах (30) этот ряд можно заменить суммой его слагаемых с номерами $n = 0, 1, 2$ и таким образом вывести следующую неявную асимптотику функции $h(s)$:

$$h(s) = \tau_0^{\frac{2-\beta}{2}}(s) \left[a_0 - \frac{1}{2} a_1 \tau_0^{2-\beta}(s) + \frac{3}{8} a_2 \tau_0^{4-2\beta}(s) + O\left(\tau_0^{6-3\beta}(s)\right) \right], \quad (32)$$

$$\tau_0(s) \rightarrow 0.$$

Согласно формулам (31) коэффициенты a_n , $n = 0, 1, 2$, этой асимптотики являются интегралами. Такие интегралы удалось сначала свести к табличным [9], а затем выразить через линейные комбинации бета-функций $B(i/\beta, 1/2)$, $i = 1, 3, 5$, следующими формулами:

$$c_n \equiv \frac{1}{\beta^{n+1}} B\left(\frac{2n+1}{\beta}, \frac{1}{2}\right), \quad a_0 = c_0, \quad a_1 = \frac{\beta-2}{\beta} c_0 + (6-\beta)c_1, \quad (33)$$

$$a_2 = \frac{(3\beta-2)(\beta-2)}{3\beta^2} c_0 + 2 \frac{(\beta-2)(6-\beta)}{\beta} c_1 + (10-3\beta)(10-\beta)c_2.$$

Теперь найдем явную асимптотику функции $h(s)$. Для этого в разложении (32) заменим функцию $\tau_0(s)$ ее асимптотикой (25), а коэффициенты a_n — правыми частями равенств (33). Затем правую часть полученного представления разложим в ряд Маклорена по аргументу $t = s/b$ и приведем подобные слагаемые. В результате получим искомую явную асимптотику

$$h(s) = c_0 t + (\beta-6)c_1 \frac{t^3}{2} + 3(10-3\beta)(10-\beta)c_2 \frac{t^5}{8} + O(t^7), \quad t \equiv \frac{s}{b} \rightarrow 0. \quad (34)$$

Дифференцируя ее по переменной s , найдем явную асимптотику производной $\partial_s h(s)$:

$$\partial_s h(s) = \frac{1}{b\beta} B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{2}\right) + O(t^2), \quad t = \frac{s}{b} \rightarrow 0. \quad (35)$$

Случай $\alpha = -1, s \rightarrow 0$. Теперь, в отличие от предыдущего случая ($\alpha = 1, s \rightarrow 0$), функция $\tau_0(s)$ равна единице в точке $s = 0$. Покажем, что именно это обстоятельство не позволяет вывести явную асимптотику функции $h(s)$ в виде конечной подсуммы ее ряда Маклорена. Проинтегрируем равенство (20) по переменной s , вычисляя при этом производную под знаком интеграла. Полученное представление

$$\begin{aligned} \partial_s h(s) &= \frac{1}{2}(\beta - 2)\tau_0^{\beta-3}(s)\partial_s \tau_0(s)I(s), \\ I(s) &\equiv \int_0^1 \frac{(1-z^\beta)dz}{\left[1-z^2-\tau_0^{\beta-2}(s)(1-z^\beta)\right]^{3/2}} \end{aligned}$$

содержит интеграл $I(s)$. Если в этом интеграле заменить подынтегральную функцию ее пределом при $s \rightarrow 0$, то в силу равенства $\tau_0^{\beta-2}(0) = 1$ получится расходящийся интеграл.

Следовательно, производную $\partial_s h(s)$, а значит, и производные $\partial_s^n h(s)$, $n > 1$, в точке $s = 0$ нельзя вычислять, дифференцируя правую часть равенства (20) под знаком интеграла. Другой способ вычисления таких производных найти не удалось. Поэтому в обсужденном случае ($\alpha = -1$) придется ограничиться знанием старшего слагаемого $h(0) = \pi/(2 - \beta)$ асимптотики функции $h(s)$ при $s \rightarrow 0$.

Случай $\alpha = \pm 1, s \rightarrow \infty$. В этом случае функция $\tau_0(s)$ при $s \rightarrow \infty$ имеет асимптотику (27). Поэтому функция $\tau_0^{\beta-2}(s)$ сходится к нулю как $O((s/b)^\beta)$. Это позволяет исследовать функцию $h(s)$ по аналогии с уже рассмотренным выше случаем $\alpha = 1, s \rightarrow 0$.

Исходное интегральное представление (20) функции $h(s)$ запишем в виде

$$h(s) = S(v), \quad S(v) \equiv \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2) + (1-z^\beta)v}}, \quad v \equiv \alpha\tau_0^{\beta-2}(s), \quad s \geq 0. \quad (36)$$

Разложим интеграл $S(v)$ в ряд Маклорена

$$S(v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^n n!} b_n (-v)^n, \quad b_n \equiv \int_0^1 \frac{u^n(z)}{\sqrt{1-z^2}} dz, \quad u(z) \equiv \frac{1-z^\beta}{1-z^2}.$$

Найдем мажоранту $T(v)$ такого ряда. Сначала оценим сверху интегралы b_n . В этих интегралах $u(z) \in [\beta/2, 1]$ при $\forall z \in [0, 1]$. Поэтому $b_n < b_0$ при любом $n \geq 1$. Следовательно,

$$|S(v)| < T(v) \equiv b_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} |v^n|^n.$$

По признаку Даламбера ряд $T(v)$, а значит, и ряд $S(v)$ сходится равномерно при условии $|v| = \tau_0^{\beta-2}(s) < 1$, которое выполняется при достаточно больших значениях функции $\tau_0(s)$.

Поэтому при $\tau_0(s) \rightarrow \infty$ в формулах (36) ряд $S(v)$ можно заменить суммой его слагаемых с номерами $n = 0, 1, 2$ и таким образом вывести неявную асимптотику функции $h(s) = S(v)$:

$$h(s) = \frac{\pi}{2} - \alpha \frac{1}{2} b_1 \tau_0^{\beta-2}(s) + \frac{3}{8} b_2 \tau_0^{2\beta-4}(s) + O\left(\tau_0^{3\beta-6}(s)\right), \quad \tau_0(s) \rightarrow \infty, \quad (37)$$

с коэффициентами b_1 и b_2 , которые выражаются через бета-функции d_1 и d_2 формулами

$$b_1 = \frac{\beta}{2} d_1, \quad b_2 = \frac{\beta}{3} [(2-\beta)d_1 + 2(\beta-1)d_2];$$

$$d_n \equiv B\left(\frac{n\beta+1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad n = 1, 2. \quad (38)$$

Теперь в равенстве (37) заменим функцию $\tau_0(s)$ ее асимптотикой (27), а коэффициенты b_n выразим по формулам (38). Затем правую часть полученного представления разложим в ряд Маклорена по аргументу $t = b/s$ и приведем подобные слагаемые. В результате получим искомую явную асимптотику функции $h(s)$. Запишем ее в виде равенства

$$h(s) = \frac{\pi}{2} - \alpha \beta \frac{d_1}{2} t + \beta(\beta-1) d_2 t^2 + O(t^3), \quad \alpha = \pm 1, \quad t \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{b}{s}\right)^\beta \rightarrow 0. \quad (39)$$

Дифференцируя это равенство по переменной s , найдем явную асимптотику функции $\partial_s h(s)$:

$$\partial_s h(s) = \alpha \frac{\beta^2}{4b} B\left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2}\right) (b/s)^{\beta+1} [1 + O((b/s)^{\beta+1})],$$

$$\alpha = \pm 1, \quad \frac{s}{b} \rightarrow \infty. \quad (40)$$

3.4. Явные асимптотики функций $g(s)$ и $\delta_m(q)$. Асимптотики функции $g(s)$ выведем способом, аналогичным подробно изложенному в предыдущем пункте. В качестве исходного используем представление (19) функции $g(s)$, содержащее интеграл. В пределе $s \rightarrow 0$ или $s \rightarrow \infty$ этот интеграл сначала представим рядом Маклорена $S(v)$ по малому аргументу $v = \tau_0^{2-\beta}(s)$ или $v = \alpha\tau_0^{\beta-2}(s)$. Затем докажем равномерную сходимость ряда $S(v)$ при условии $v \in [0, 1)$ и аппроксимируем этот ряд его частичной суммой. В такой сумме заменим функцию $\tau_0(s)$ ее соответствующим асимптотическим разложением (25), (26) или (27) по малому аргументу t . Полученные соотношения запишем в виде степенного ряда по этому аргументу и в итоге выведем явные асимптотики исследуемой функции $g(s)$. Используя коэффициенты c_n и d_n , определенные формулами (33) и (38), представим такие асимптотики следующими равенствами: в случае $\alpha = 1$, $s \rightarrow 0$, $t \equiv s/b$,

$$g(s) = -\frac{b}{2}B\left(\frac{\beta-1}{\beta}, \frac{1}{2}\right) + \frac{s}{2}\left[\pi - c_0t - (\beta-6)c_1\frac{t^3}{4} - (10-3\beta)(10-\beta)c_2\frac{3t^5}{8} + O(t^7)\right], \quad (41)$$

в случае $\alpha = -1$, $s \rightarrow 0$

$$g(s) = \frac{b}{2}B\left(\frac{\beta-1}{\beta}, \frac{2-\beta}{\beta}\right) + \frac{\pi\beta s}{2(\beta-2)} + O(s^2) \quad (42)$$

и, наконец, в случае $\alpha = \pm 1$, $s \rightarrow \infty$

$$g(s) = \beta s \left[\frac{\alpha}{2(1-\beta)}d_1t + \frac{\beta-1}{2\beta-1}d_2t^2 + O(\alpha^3t^3) \right], \quad t \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{b}{s}\right)^\beta \rightarrow 0. \quad (43)$$

Теперь в представлении (13) заменим функцию $g(s)$ правыми частями равенств (41)–(43) и получим искомые явные, но неравномерные по номеру m низкоэнергетические асимптотики фазы двумерного рассеяния $\delta_m(q)$: в случае $\alpha = 1$, $q \rightarrow 0$ и $q^\nu m \rightarrow 0$

$$\delta_m(q) = -\frac{b}{2q^\nu}B\left(\frac{\beta-1}{\beta}, \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi m}{2} - \frac{q^\nu m^2}{2b\beta}B\left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{2}\right) + O\left(q^\nu + \left(q^{2\nu}\frac{m^3}{b^3}\right)\right); \quad (44)$$

в случае $\alpha = -1$, $q \rightarrow 0$ и $q^\nu m \rightarrow 0$

$$\delta_m(q) = \frac{b}{2q^\nu}B\left(\frac{\beta-1}{\beta}, \frac{2-\beta}{\beta}\right) + \frac{\pi\beta m}{2(\beta-2)} + O(q^\nu(1+m^2)); \quad (45)$$

при условиях $\alpha = \pm 1$, $q \rightarrow 0$ и $q^\nu m \rightarrow \infty$ с точностью порядка $O(q^\nu) + O((b/(q^\nu m))^{2\beta-1})$

$$\delta_m(q) \approx \frac{b\beta}{4} \left(\frac{b}{q^\nu m} \right)^{\beta-1} \left\{ \frac{\alpha}{1-\beta} B \left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2\beta-1} B \left(\frac{2\beta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \left(\frac{b}{q^\nu m} \right)^\beta \right\}. \quad (46)$$

Согласно полученным формулам (44)–(46) в пределе низких энергий модуль фазы $\delta_m(q)$ с небольшим номером $m \ll q^{-\nu}$ неограниченно возрастает как $O(b/q^{-\nu})$, а при большом номере $m \gg q^{-\nu}$ медленно убывает как $O((b/(q^\nu m))^{\beta-1})$.

4. АМПЛИТУДА РАССЕЙНИЯ

Настоящий раздел посвятим исследованию амплитуды f двумерного рассеяния частицы p_1 силовым центром O , воздействующим на эту частицу посредством потенциала (1). Сначала докажем сходимость двух бесконечных разложений амплитуды f , а именно косинус-ряда Фурье и ряда, содержащего однократные интегралы. Затем из этих разложений выведем два низкоэнергетических приближения амплитуды f : приближение в виде бесконечного ряда и приближение в виде конечной суммы.

4.1. Исходное представление амплитуды рассеяния. Исходным для наших исследований будет известное разложение [4, 5] амплитуды f двумерного рассеяния частицы p_1 силовым центром O по парциальным фазам:

$$f(\varphi, q) \equiv A(q, d) \{S_\delta(\varphi, q) - 1 + \exp[2i\delta_0(q)]\},$$

$$A(q, d) \equiv \exp\left(-i\frac{3}{4}\pi\right) \sqrt{\frac{d}{2\pi q}}, \quad S_\delta(\varphi, q) \equiv 2 \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \{1 - \exp[2i\delta_m(q)]\}. \quad (47)$$

Условия, достаточные для равномерной сходимости этого разложения, не удалось найти ни в монографиях [4, 5], ни в статьях, процитированных в этих монографиях, ни в более современных статьях, посвященных теории двумерного рассеяния. Поэтому для дальнейшего развития этой теории стоит доказать теорему о равномерной сходимости ряда $S_\delta(\varphi, q)$.

Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. Если $t \in (-\infty, \infty)$ и $\varphi \in (0, \pi)$, то имеет место формула суммирования

$$2 \sum_{m=0}^{n < \infty} \cos(m+t)\varphi = \operatorname{cosec}(\varphi/2) \{ \sin[(n+t+1/2)\varphi] + \sin[(1/2-t)\varphi] \}. \quad (48)$$

Доказательство. Запишем цепочку равенств

$$2 \sum_{m=0}^{n < \infty} \cos(m+t)\varphi = \exp(it\varphi)L_n^+(\varphi) + \exp(-it\varphi)L_n^-(\varphi), \quad (49)$$

$$L_n^\pm(\varphi) \equiv \sum_{m=0}^n [\exp(\pm i\varphi)]^m.$$

Заметим, что функции $L_n^+(\varphi)$ и $L_n^-(\varphi)$ являются суммами членов геометрических прогрессий с показателями $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$. Вычислив эти суммы по известным формулам [6], получим представления

$$L_n^\pm(\varphi) = [1 - [\exp(\pm i\varphi)]^{n+1}] / [1 - \exp(\pm i\varphi)].$$

Используя эти представления, алгебраическими преобразованиями сведем первое из двух равенств (49) к равенству (48) и таким образом закончим доказательство.

Напомним признак сходимости Абеля [8]: ряд со слагаемыми $u_m v_m$, $m = 0, 1, \dots$, сходится равномерно, если любая конечная подсумма элементов u_m последовательности $\{u_m\}_{m=0}^\infty$ ограничена по модулю, а последовательность $\{v_m\}_{m=0}^\infty$, монотонно убывая, сходится к нулю.

Теорема 1. Пусть при некотором целом n выполняется неравенство $|\delta_n(q)| \ll 1$, а последовательность $\{\delta_m(q)\}_{m=n}^\infty$ фаз рассеяния $\delta_m(q)$ сходится к нулю, монотонно убывая или монотонно возрастая. Тогда в области $0 < \varphi \leq \pi$ ряд $S_g(\varphi, q)$ сходится равномерно.

Доказательство. Представим ряд $S_g(\varphi, q)$ в следующем виде:

$$S_\delta(\varphi, q) = S_1(\varphi, q) + iS_2(\varphi, q),$$

$$S_1(\varphi, q) \equiv 2 \sum_{m=0}^\infty \cos m\varphi [1 - \cos 2\delta_m(q)], \quad (50)$$

$$S_2(\varphi, q) \equiv 2 \sum_{m=0}^\infty \cos m\varphi [\sin 2\delta_m(q)].$$

Сначала исследуем бесконечную подсумму $S_{1,n}(\varphi, q)$ ряда $S_1(\varphi, q)$. Запишем ее в виде

$$S_{1,n}(\varphi, q) \equiv \sum_{m=n}^\infty u_m(\varphi)v_m(q), \quad u_m(\varphi) \equiv 2 \cos m\varphi, \quad v_m(q) \equiv 1 - \cos 2\delta_m(q). \quad (51)$$

Используя формулу (48) в частном случае $t = 0$ и при условии $\varphi \in (0, \pi]$, получим

$$\left| \sum_{m=n}^{j < \infty} u_m(\varphi) \right| = \operatorname{cosec}(\varphi/2) |\sin[(j + 1/2)\varphi] - \sin[(n - 1/2)\varphi]| \leq 2 \operatorname{cosec}(\varphi/2). \quad (52)$$

Функция $2\operatorname{cosec}(\varphi/2)$ ограничена, если $\varphi \in (0, \pi]$. Следовательно, при том же условии и любом конечном j подсуммы элементов $u_m(\varphi)$, $m = n, n + 1, \dots, j$, последовательности $\{u_m(\varphi)\}_{n=m}^{\infty}$ ограничены. Значит, для ряда (51) на полуинтервале $0 < \varphi \leq \pi$ выполняется первое условие признака сходимости Абеля. Убедимся в том, что реализуется и второе условие этого признака. Рассмотрим случай монотонного убывания последовательности $\{\delta_m(q)\}_{n=m}^{\infty}$. В этом случае все ее элементы $\delta_m(q)$ удовлетворяют неравенствам $0 \leq \delta_m(q) \ll 1$. Поэтому последовательность $\{v_m(q)\}_{m=n}^{\infty}$, монотонно убывая, сходится к нулю. Следовательно, для ряда (51) имеет место и второе условие признака сходимости Абеля. Значит, этот ряд сходится при любом $\varphi \in (0, \pi]$. По аналогии исследуем случай монотонного возрастания последовательности $\{\delta_m(q)\}_{n=m}^{\infty}$. В этом случае $0 \leq -\delta_m(q) \ll 1$, $m \geq n$, но в силу четности функции $\cos 2\delta_m(q)$ последовательность $\{v_m(q)\}_{m=n}^{\infty}$, монотонно убывая, сходится к нулю. Значит, ряд (51) удовлетворяет второму условию признака сходимости Абеля и сходится при любом $\varphi \in (0, \pi]$.

Теперь исследуем бесконечную подсумму $S_{2,n}(\varphi, q)$ ряда $S_2(\varphi, q)$, содержащегося в формулах (50). Представим эту подсумму в виде

$$S_{2,n}(\varphi, q) \equiv \mp \sum_{m=n}^{\infty} u_m(\varphi)v_m(q), \quad u_m(\varphi) \equiv 2 \cos m\varphi, \quad \tilde{v}_m(q) \equiv \sin 2|\delta_m(q)|.$$

В этом представлении берем знак плюс или минус в случае монотонного убывания или возрастания последовательности $\{\delta_m(q)\}_{n=m}^{\infty}$. В любом из этих случаев последовательность $\{\tilde{v}_m(q)\}_{m=n}^{\infty}$, монотонно убывая, сходится к нулю. Последовательность $\{u_m(\varphi)\}_{m=n}^{\infty}$ обладает свойством (52). Значит, ряд $S_{2,n}(\varphi, q)$ сходится по признаку Абеля при любом $\varphi \in (0, \pi]$.

Итак, бесконечные подсуммы $S_{1,n}(\varphi, q)$ и $S_{2,n}(\varphi, q)$ рядов $S_1(\varphi, q)$ и $S_2(\varphi, q)$ сходятся при любом $\varphi \in (0, \pi]$. Ясно, что таким же свойством обладают ряды $S_1(\varphi, q)$ и $iS_2(\varphi, q)$ и их сумма $S_\delta(\varphi, q)$, что и требовалось доказать.

4.2. Представление амплитуды рассеяния через однократные интегралы. Исходное представление (47) амплитуды рассеяния $f(\varphi, q)$ содержит фазы $\delta_m(q)$, $m \geq 0$, и является косинус-рядом Фурье. Сведем такой ряд к бесконечному ряду, не содержащему фаз, но содержащему однократные ин-

тегралы Фурье. Ряд такого типа потребуется в следующих двух пунктах для вывода низкоэнергетической асимптотики амплитуды рассеяния.

Теорема 2. Пусть при некотором целом n верно неравенство $|\delta_n(q)| \ll 1$, а все фазы $\delta_m(q)$, $m \geq n$, монотонно убывая, сходятся к нулю в пределе $m \rightarrow \infty$ как $O(m^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. Предположим, что на полуоси $t \geq 0$ существует непрерывная функция $\phi(t, q)$, удовлетворяющая условиям $\phi(t, q)|_{t=m} = \delta_m(q)$, $m = 0, 1, \dots$, и монотонно убывающая в области $t \geq n$. Тогда разложение амплитуды рассеяния

$$f(\varphi, q) = A(q, d) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n(\varphi, q), \quad \eta_n(\varphi, q) \equiv \int_0^{\infty} \exp(2i\pi n t) \xi(t, \varphi, q) dt, \\ \xi(t, \varphi, q) \equiv 2 \cos(t\varphi) \{1 - \cos[2\phi(t, q)] - i \sin[2\phi(t, q)]\}, \quad (53)$$

по однократным интегралам $\eta_n(\varphi, q)$ сходится равномерно на полуинтервале $0 < \varphi \leq \pi$.

Доказательство. Укажем следствия ограничений, наложенных на все фазы $\delta_m(q)$, $m \geq 0$, и функцию $\phi(t, q)$. Условия теоремы 1 выполнены, и поэтому ряд $S_g(\varphi, q)$, содержащийся в представлении (47) амплитуды рассеяния, сходится при любом $\varphi \in (0, \pi]$. Функция $\phi(t, q)$ сходится к нулю как $O(t^{-\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, если $t \rightarrow \infty$. Функция $\xi(t, \varphi, q)$ непрерывна при $t \geq 0$ и $\varphi \in [0, \pi]$, а в случае $t = m$ при любом m равна слагаемому ряда $S_g(\varphi, q)$:

$$\xi(t, \varphi, q)|_{t=m} = 2 \cos m\varphi \{1 - \exp[2i\delta_m(q)]\}, \quad m = 0, 1, \dots, \quad \varphi \in [0, \pi],$$

следовательно, имеют место равенства

$$S_g(\varphi, q) = \sum_{m=0}^{\infty} \xi(m, \varphi, q), \quad (54) \\ \sum_{m=0}^{\infty} \xi(1 + m, \varphi, q) = S_\delta(\varphi, q) - 2 \{1 - \exp[2i\delta_0(q)]\}.$$

Теперь убедимся в существовании интеграла $\eta_n(\varphi, q)$ при условии $\varphi \in (0, \pi]$. Для этого достаточно показать, что вклад $P_n(s)$ в этот интеграл от области $t \geq s > 0$ сходится к нулю в пределе $s \rightarrow \infty$. В этой области

$$\phi(t, q) = O(t^{-\varepsilon}), \quad 1 - \cos[2\phi(t)] = O(t^{-2\varepsilon}), \quad \sin[2\phi(t)] = O(t^{-\varepsilon}).$$

Следовательно, по порядку величины вклад $P_n(s)$ равен сумме функций $T_n^+(s)$ и $T_n^-(s)$, заданных формулами

$$T_n^\pm(s) \equiv \int_s^{\infty} \exp[i(2\pi n \pm \varphi)t] t^{-\varepsilon} dt, \quad s \rightarrow \infty, \quad \varphi \in (0, \pi].$$

Интегрированием по частям представим функции $T_n^+(s)$ и $T_n^-(s)$ в виде сумм:

$$T_n^\pm(s) = \frac{1}{i[(2\pi n \pm \varphi)t]} \times \\ \times \left\{ \exp[i(2\pi n \pm \varphi)s] s^{-\varepsilon} + \varepsilon \int_s^\infty \exp[i(2\pi n \pm \varphi)t] t^{-\varepsilon-1} dt \right\}.$$

В интегралах, содержащихся в таких суммах, модули подынтегральных функций не превышают функции $t^{-\varepsilon-1}$. Поэтому обсуждаемые интегралы, а значит, обе функции $T_n^+(s)$, $T_n^-(s)$ и вклад $P_n(s)$ сходятся к нулю как $O(s^{-\varepsilon})$ в пределе $s \rightarrow \infty$. Следовательно, все интегралы $\eta_n(\varphi, q)$, $n \geq 0$, существуют, что и требовалось показать.

Продолжим исследование интегралов $\eta_n(\varphi, q)$, $n \geq 0$. Отметим, что вследствие тождеств

$$\int_0^1 \xi(m+z, \varphi) \exp(i2\pi n z) dz = \int_m^{m+1} \xi(z, \varphi) \exp(i2\pi n z) dz, \quad m = 0, 1, \dots,$$

каждый интеграл $\eta_n(\varphi, q)$ равен сумме бесконечного ряда интегралов по отрезку $[0, 1]$:

$$\eta_n(\varphi, q) = \sum_{m=0}^{\infty} \int_m^{m+1} \xi(z, \varphi, q) \exp(i2\pi n z) dz = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 \xi(z+m, \varphi, q) \exp(i2\pi n z) dz. \quad (55)$$

Перейдем к исследованию вспомогательного ряда

$$S_\xi(z, \varphi, q) \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \xi(z+m, \varphi, q), \quad z \in [0, 1], \quad \varphi \in (0, \pi]. \quad (56)$$

Сначала способом, изложенным при доказательстве теоремы 1, покажем, что такой ряд является непрерывной функцией. В силу последней из формул (53) имеем

$$\xi(z+m, \varphi, q) = 2 \cos[(z+m)\varphi] \{1 - \cos[2\phi(z+m, q)] + i \sin[2\phi(z+m, q)]\}.$$

Поэтому для бесконечной подсуммы $S_{\xi, n}(z, \varphi, q)$ ряда $S_\xi(z, \varphi, q)$ имеет место представление

$$S_{\xi, n}(z, \varphi, q) = S_{1, n}(z, \varphi, q) + i S_{2, n}(z, \varphi, q),$$

в котором

$$S_{1,n}(z, \varphi, q) \equiv \sum_{m=n}^{\infty} u_m(z, \varphi) v_m(q), \quad S_{2,n}(z, \varphi, q) \equiv \sum_{m=n}^{\infty} u_m(z, \varphi) \tilde{v}_m(z, q),$$

$$u_m(z, \varphi) \equiv 2 \cos [(z + m)\varphi], \quad v_m(z, q) = 1 - \cos [2\phi(z + m, q)],$$

$$\tilde{v}_m(z, q) = \sin [2\phi(z + m, q)].$$

Используя формулу (48) для случая $t = z$, $\varphi \in (0, \pi]$, получим

$$\left| \sum_{m=n}^{j < \infty} u_m(z, \varphi) \right| =$$

$$= \operatorname{cosec}(\varphi/2) |\sin [(j + 1/2)(z + \varphi)] - \sin [(n - 1/2)(z + \varphi)]| \leq 2 \operatorname{cosec}(\varphi/2).$$

Функция $2 \operatorname{cosec}(\varphi/2)$ ограничена, если $\varphi \in (0, \pi]$. Следовательно, при том же условии и любом конечном j подсуммы элементов $u_m(z, \varphi)$, $m = n, n + 1, \dots, j$, последовательности $\{u_m(z, \varphi)\}_{m=n}^{\infty}$ ограничены. Значит, для рядов $S_{1,n}(z, \varphi, q)$ и $S_{2,n}(z, \varphi, q)$ в области $\varphi \in (0, \pi]$, $z \in [0, 1]$ выполняется первое условие признака сходимости Абеля. Способом, подробно изложенным при доказательстве теоремы 1, убедимся в том, обе последовательности $\{v_m(z, q)\}_{m=n}^{\infty}$ и $\{\tilde{v}_m(z, q)\}_{m=n}^{\infty}$, при любом $z \in [0, 1]$ монотонно убывают и сходятся к нулю. Следовательно, ряды $S_{1,n}(z, \varphi, q)$ и $S_{2,n}(z, \varphi, q)$ удовлетворяют и второму условию признака сходимости Абеля. Поэтому в области $G_{z\varphi} \equiv \{\varphi \in (0, \pi], z \in [0, 1]\}$ ряд $S_{\xi}(z, \varphi, q)$ сходится равномерно. Все слагаемые ряда $S_{\xi}(z, \varphi, q)$ — непрерывные функции. Значит, в той же области ряд $S_{\xi}(z, \varphi, q)$ является непрерывной функцией, что и требовалось показать.

Продолжим исследование функции $S_{\xi}(z, \varphi, q)$. Так как эта функция непрерывная, то ее можно разложить в ряд Фурье по переменной $z \in [0, 1]$:

$$S_{\xi}(z, \varphi, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n z} \int_0^1 e^{i2\pi n t} S_{\xi}(t, \varphi, q) dt, \quad z \in [0, 1], \quad \varphi \in (0, \pi].$$
(57)

По теореме Дирихле [8] такой ряд сходится равномерно к функции $S_{\xi}(z, \varphi, q)$ на интервале $0 < z < 1$, а в точке $z = 0$ равен полусумме значений этой функции в точках $z = 0$ и $z = 1$:

$$\frac{1}{2} [S_{\xi}(0, \varphi, q) + S_{\xi}(1, \varphi, q)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{i2\pi n t} S_{\xi}(t, \varphi, q) dt. \quad (58)$$

Выразим эту же полусумму через ряд $S_{\delta}(\varphi, q)$. Благодаря формулам (47), (54),

(56) и равномерной сходимости рядов $S_\delta(\varphi, q)$ и $S_\xi(z, \varphi, q)$ верны равенства

$$\begin{aligned} S_\xi(0, \varphi, q) &= S_\delta(\varphi, q), \quad S_\xi(1, \varphi, q) = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \xi(1+m, \varphi) = S_\delta(\varphi, q) - 2 \{1 - \exp[2i\delta_0(q)]\}. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует искомое представление

$$\frac{1}{2} [S_\xi(0, \varphi, q) + S_\xi(1, \varphi, q)] = S_\delta(\varphi, q) + 1 - \exp[2i\delta_0(q)], \quad \varphi \in (0, \pi].$$

Используя его и равенства (47), представим амплитуду рассеяния $f(\varphi, q)$ в виде

$$f(\varphi, q) = A(q, d) [S_\xi(0, \varphi, q) + S_\xi(1, \varphi, q)]. \quad (59)$$

Теперь ту же полусумму функций $S_\xi(0, \varphi, q)$ и $S_\xi(1, \varphi, q)$ выразим через бесконечный ряд, содержащий сходящиеся интегралы $\eta_n(\varphi, q)$. Для этого в правой части равенства (58) заменим функцию $S_\xi(z, \varphi, q)$ ее рядом (56) и положим $z = 0$. Получившийся ряд сходится при любом $\varphi \in (0, \pi]$. Поэтому его можно проинтегрировать почленно, используя для этого формулы (55). В результате получится искомое представление

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [S_\xi(0, \varphi, q) + S_\xi(1, \varphi, q)] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \eta_n(\varphi, q) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(i2\pi nt) \xi(t, \varphi, q) dt. \end{aligned}$$

Используя его, сведем равенство (59) к представлению (53), которое и требовалось доказать.

Сформулируем важные замечания. Для доказательства теоремы 2 в случае монотонного убывания фаз $\delta_m(q)$, $m \geq n$, и функции $\phi(t, q)$ достаточно выполнить замены $S_{2n} \rightarrow -S_{2n}$ и $\tilde{v}_m \rightarrow -\tilde{v}_m$. При заданных значениях фаз кусочно-линейная функция

$$\phi(t, q) = \delta_m(q) + (t-m) [\delta_{m+1}(q) - \delta_{m+1}(q)], \quad m = 0, 1, \dots, \quad t \in [m, m+1],$$

удовлетворяет всем достаточным условиям теоремы 2. Представление (53) амплитуды $f(\varphi, q)$ через интегралы $\eta_n(\varphi, q)$ окажется более удобным по сравнению с ее исходным представлением (47) через фазы $\delta_m(q)$, если ряд, содержащий такие интегралы, сходится быстрее, чем ряд $S_\delta(\varphi, q)$. В теореме 2 сходимость ряда (56) доказывалась, а в работе [3] сходимость ряда того же

типа предполагалась. Если вместо непрерывности функции $\phi(t, q)$ потребовать существования и непрерывности ее первой производной $\partial_t \phi(t, q)$, $t \geq 0$, и, кроме того, предположить существование производной ряда (56) по переменной z , то для вывода представления (53) можно будет воспользоваться стандартной формулой суммирования Пуассона [10]. Стоит подчеркнуть, что доказанные теоремы 1 и 2 справедливы при любом не обязательно малом, но положительном значении волнового числа q .

4.3. Низкоэнергетические представления амплитуды рассеяния. Считаем, что $q \rightarrow 0+$, и для сокращения записи используем большой параметр $\mu \equiv q^{-\nu}$. Заменив в исходном представлении (47) амплитуды рассеяния $f(\varphi, q)$ все фазы $\delta_m(q)$ правыми частями равенств (13), получим следующее формальное представление:

$$f(\varphi, q) \equiv A(q, d) \{S_g(\varphi, q) - 1 + \exp[2i\mu g(0)] + O(\mu^{-1})\}, \quad q \rightarrow 0+, \quad (60)$$

$$S_g(\varphi, q) \equiv 2 \sum_{m=0}^{\infty} \cos m\varphi \{1 - \exp[2i\mu g(m/\mu)]\}.$$

Это представление будет низкоэнергетической асимптотикой амплитуды $f(\varphi, q)$, если содержащийся в нем ряд $S_g(\varphi, q)$ сходится. Докажем теорему о сходимости этого ряда.

Теорема 3. Пусть волновое число q настолько мало, что выполняются асимптотические соотношения (46). Тогда в области $0 < \varphi \leq \pi$ ряд $S_g(\varphi, q)$ сходится равномерно.

Доказательство. Вследствие асимптотических соотношений (46) при некотором достаточно большом и целом n выполняется неравенство $|\mu g(m/\mu)| \ll 1$, а последовательность $\{\mu g(m/\mu)\}_{m=n}^{\infty}$ сходится к нулю, монотонно убывая в случае $\alpha = -1$ и монотонно возрастаая в случае $\alpha = 1$. Следовательно, все элементы $\mu g(m/\mu)$, $m \geq n$, этой последовательности удовлетворяют всем условиям, наложенным в теореме 1 на соответствующие фазы $\delta_m(q)$, $m \geq n$. Поэтому в доказательстве теоремы 1 можно заменить каждую из фаз $\delta_m(q)$ ее низкоэнергетическим приближением $\mu g(m/\mu)$ и таким образом убедиться в равномерной сходимости ряда $S_g(\varphi, q)$ на полуинтервале $0 < \varphi \leq \pi$. Теорема доказана.

Согласно формулам (46) фазы $\delta_m(q)$ в пределе $m \rightarrow \infty$ убывают слишком медленно. Поэтому, используя представление (60) амплитуды рассеяния $f(\varphi, q)$, невозможно найти старшее слагаемое ее низкоэнергетической асимптотики. Для построения такого слагаемого методом стационарной фазы [10] придется доказать аналог теоремы 2.

Теорема 4. Из представления (60) амплитуды рассеяния $f(\varphi, q)$ следует ее представление в виде сходящегося при любом $\varphi \in (0, \pi]$ разложения

по однократным интегралам:

$$f(\varphi, q) = A(q, d) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{\eta}_n(\varphi, q) + O(\mu^{-1}) \right\},$$

$$\tilde{\eta}_n(\varphi, q) \equiv \int_0^{\infty} \exp(2i\pi nt) \tilde{\xi}(t, \varphi, q) dt, \quad (61)$$

$$\tilde{\xi}(t, \varphi, q) \equiv 2 \cos(t\varphi) \left\{ 1 - \exp \left[2i\tilde{\phi}(t, q) \right] \right\}, \quad \tilde{\phi}(t, q) \equiv \mu g(t/\mu), \quad q \rightarrow 0+.$$

Доказательство. Как пояснялось при доказательстве теоремы 3, произведения $\mu g(t)$, $t = m/\mu$, $m \geq n$, удовлетворяют всем условиям, наложенным в теореме 1 на соответствующие фазы $\delta_m(q)$, $m \geq n$. Согласно формуле (46) эти же произведения в пределе $m \rightarrow \infty$ убывают как $O(t^{-\varepsilon})$, $\varepsilon = \beta - 1 > 0$. Благодаря определению функции $g(s)$ и ее асимптотике (43) при больших значениях аргумента s функция $\tilde{\phi}(t, q) = \mu g(t/\mu)$ обладает следующими свойствами. Эта функция непрерывна на полуоси $s \geq 0$, в точке $t = m/\mu$, $m = 0, 1, \dots$, совпадает с приближением $\mu g(t/\mu)$ фазы рассеяния $\delta_m(q)$, в области $t \geq n$ монотонно убывает или же возрастает в случае $\alpha = -1$ или $\alpha = 1$. Следовательно, функция $\tilde{\phi}(t, q)$ подчиняется всем ограничениям, наложенным в теореме 2 на функцию $\phi(t, q)$. Поэтому в формулировке теоремы 2 можно выполнить замены

$$\delta_m(q) \rightarrow \mu g(m/\mu), \quad \phi(t, q) \rightarrow \tilde{\phi}(t, q), \quad \xi(t, q) \rightarrow \tilde{\xi}(t, q).$$

После таких замен представление (53) амплитуды рассеяния $f(\varphi, q)$ станет представлением (61), которое и требовалось доказать.

Теперь используем формулы (61) для вывода старшего слагаемого низкоэнергетической асимптотики амплитуды $f(\varphi, q)$.

Сначала в определении функции $\tilde{\xi}(t, \varphi, q)$ представим функцию $\cos(t\varphi)$ полусуммой функций $\exp(it\varphi)$ и $\exp(-it\varphi)$, затем в интегралах $\tilde{\eta}_n(t, \varphi, q)$ сделаем замену переменных $t \rightarrow s/\mu$. Таким образом, получим асимптотическое представление амплитуды $f(\varphi, q)$

$$f(\varphi, q) = \mu A(q, d) \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [F_n^+(\varphi, \mu) + F_n^-(\varphi, \mu)] + O(\mu^{-2}) \right\}, \quad q \rightarrow 0+, \quad (62)$$

через сходящиеся интегралы с большим параметром μ :

$$F_n^{\pm}(\varphi, \mu) \equiv \int_0^{\infty} \left\{ \exp [i\mu Q_n^{\pm}(s, \varphi)] - \exp [i\mu s (2\pi n \pm \varphi)] \right\} ds, \quad \varphi \in (0, \pi).$$

Исследуем эти интегралы. Их подынтегральные функции содержат фазы $s(2\pi n \pm \varphi)$ и

$$Q_n^\pm(s, \varphi) \equiv s(2\pi n \pm \varphi) + 2g(s).$$

Производная первой из этих фаз по аргументу s не имеет нулей, потому что $\varphi \neq 0$. Благодаря определению $\partial_s g(s) = \pi/2 - h(s)$ функции $h(s)$ нули производной $\partial_s Q_n^\pm(s, \varphi)$ являются корнями $s_n^\pm(\varphi)$ соответствующего уравнения

$$\frac{2}{\pi}h(s) = 2n + \left(1 \pm \frac{\varphi}{\pi}\right), \quad s \geq 0, \quad \varphi \in (0, \pi]. \quad (63)$$

По той же причине верно равенство $\partial_s^2 Q_n^\pm(s, \varphi) = -\partial_s h(s)$. Его правая, а следовательно, и левая часть никогда не обращается в нуль.

Обсудим уравнение (63). Благодаря неравенству $\partial_s h(s) \neq 0$, $s \geq 0$, его правая часть не имеет локальных экстремумов. Поэтому при данном n может существовать только один, причем простой корень $s_n^\pm(\varphi)$. Такой корень существует тогда и только тогда, когда области допустимых значений обеих частей обсуждаемого уравнения пересекаются. Эти области определяются неравенствами (29).

Теперь предположим, что при данном n уравнение (63) имеет корень $s_n^\pm(\varphi)$. Такой корень простой, и, кроме того, $\partial_s^2 Q_n^\pm(s, \varphi) \neq 0$. Поэтому интеграл $F_n^\pm(\varphi, \mu)$ с большим параметром μ можно найти методом стационарной фазы [10]. Согласно этому методу

$$F_n^\pm(\varphi, \mu) = \sqrt{\frac{\pi}{\mu \vartheta_n^\pm(\varphi)}} \exp \left\{ i \left[\omega_n^\pm(\varphi, \mu) - \frac{\pi}{4} \alpha \right] \right\} + O \left(\frac{1}{\mu^{3/2}} \right), \quad \mu \rightarrow \infty, \quad (64)$$

где для краткости использовались следующие обозначения:

$$\vartheta_n^\pm(\varphi) \equiv |\partial_s^2 Q_n^\pm(s, \varphi)| = \alpha \partial_s h(s), \quad \omega_n^\pm(\varphi, \mu) \equiv \mu [2g(s) + s(2\pi n \pm \varphi)], \\ s = s_n^\pm(\varphi). \quad (65)$$

Итак, если при данном n уравнение (63) имеет корень $s_n^\pm(\varphi)$, то в силу равенства (64) в пределе $\mu \rightarrow \infty$ интеграл $F_n^\pm(\varphi, \mu)$ убывает как $O(\mu^{-1/2})$. В противном случае $\partial_s Q_n^\pm \neq 0$, и, согласно монографии [10], интеграл $F_n^\pm(\varphi, \mu)$ в пределе $\mu \rightarrow \infty$ убывает быстрее, а именно как $O(\mu^{-1})$. Поэтому старшее слагаемое асимптотики ряда (62) равно сумме всех интегралов (64) с номером n , при котором уравнение (63) имеет решение.

Приступим к выводу такого слагаемого для случая $\alpha = 1$, а затем для случая $\alpha = -1$.

Случай $\alpha = 1$. Согласно первому из двух неравенств (29) левая часть уравнения (63) удовлетворяет условию $(2/\pi)h(s) \in [0, 1]$, $s \geq 0$. Следовательно, уравнение (63) имеет решение, если его правая часть удовлетворяет

такому же условию. Это возможно в единственном случае: в уравнении (63) выбран знак минус и положено $n = 0$. Поэтому имеется единственный корень $s_0^-(\varphi)$. Следовательно, главное слагаемое низкоэнергетической асимптотики ряда (62) определяется интегралом $F_0^-(\varphi, \mu)$. Используя представление (64) такого интеграла, запишем асимптотику обсуждаемого ряда в виде

$$f(\varphi, q) = \frac{\iota}{q^{1/\beta}} \left\{ \sqrt{\frac{d}{2\vartheta_0^-(\varphi)}} \exp[\iota\omega_0^-(\varphi, \mu)] + O(q^\nu) \right\}, \quad (66)$$

$$q \rightarrow 0+, \quad \varphi \in (0, \pi].$$

Случай $\alpha = -1$. Согласно второму из двух неравенств (29) левая часть уравнения (63) может принимать все значения больше единицы и меньше или равные $2/(2 - \beta)$. Следовательно, это уравнение разрешимо при условиях

$$1 < 2n + \left(1 \pm \frac{\varphi}{\pi}\right) \leq \frac{2}{2 - \beta}, \quad \varphi \in (0, \pi].$$

Перечислим следствия этих условий. При выборе знака плюс или минус уравнение (63) имеет корни $s_n^+(\varphi)$ с номерами $n = 0, 1, \dots, n^+$ или корни $s_n^-(\varphi)$ с номерами $n = 1, \dots, n^-$. Число n^+ определяется через целую $[\gamma]$ и дробную $\{\gamma\}$ части числа $\gamma \equiv 1/(2 - \beta)$ формулами

$$n^+ \equiv \begin{cases} [\gamma], & \varphi \leq \varphi^+, \\ [\gamma] - 1, & \varphi > \varphi^+, \end{cases} \quad \varphi^+ \equiv \pi(2\{\gamma\} - 1), \quad \gamma \equiv \frac{1}{2 - \beta}. \quad (67)$$

Число n^- зависит от целой $[\gamma - 1/2]$ и дробной $\{\gamma - 1/2\}$ частей числа $\gamma - 1/2$:

$$n^- \equiv \begin{cases} [\gamma - 1/2], & \varphi < \varphi^-, \\ [\gamma - 1/2] + 1, & \varphi \geq \varphi^-, \end{cases} \quad \varphi^- \equiv 2\pi(1 - \{\gamma - 1/2\}), \quad \gamma \equiv \frac{1}{2 - \beta}. \quad (68)$$

Итак, в рассматриваемом случае ($\alpha = -1$) уравнение (63) имеет конечное число корней $s_n^\pm(\varphi)$. Следовательно, вклад в главное слагаемое низкоэнергетической асимптотики ряда (62) дают интегралы $F_n^+(\varphi, \mu)$, $n = 0, 1, \dots, n^+$, и интегралы $F_n^-(\varphi, \mu)$, $n = 1, 2, \dots, n^-$. Используя асимптотики (64) таких интегралов, представим обсуждаемый ряд при $q \rightarrow 0+$ в виде

$$f(\varphi, q) = \frac{\iota\sqrt{d}}{q^{1/\beta}} \left[\sum_{n=0}^{n^+} \frac{\exp[\iota\omega_n^+(\varphi, \mu)]}{\sqrt{2\vartheta_n^+(\varphi)}} + \sum_{n=1}^{n^-} \frac{\exp[\iota\omega_n^-(\varphi, \mu)]}{\sqrt{2\vartheta_n^-(\varphi)}} + O(q^\nu) \right], \quad (69)$$

$$\varphi \in (0, \pi].$$

Завершим настоящий раздел важным выводом. В пределе $q \rightarrow 0+$ любая конечная ($m = 0, 1, \dots, n < \infty$) подсумма исходного разложения (47) амплитуды рассеяния $f(\varphi, q)$ возрастает не быстрее, чем $O(q^{-1/2})$. Согласно

равенству (69) в том же пределе весь бесконечный ряд (47) растет быстрее, а именно как $O(q^{-1/\beta})$, $\beta \in (1, 2)$. Следовательно, при $q \rightarrow 0+$ основной вклад в амплитуду рассеяния $f(\varphi, q)$ дают состояния квантовой частицы p_1 с большими номерами m .

5. АСИМПТОТИКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

Используем обозначения (65) и известное определение [4] дифференциального сечения рассеяния $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q) \equiv |f(\varphi, q)|^2$ через амплитуду $f(\varphi, q)$. Сначала обсудим низкоэнергетическое представление сечения $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$ через функции $n^\pm(\varphi, \beta)$, $s_n^\pm(\varphi)$ и $\vartheta_n^\pm(\varphi)$, затем выявим основные свойства этих функций и, наконец, исследуем поведение сечения $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$ в направлении рассеяния назад ($\varphi \rightarrow \pi-$) и вперед ($\varphi \rightarrow 0+$).

5.1. Низкоэнергетические приближения сечения $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$.

Случай $\alpha = 1$. Амплитуда (66) порождает дифференциальное сечение

$$\partial_\varphi \sigma(\varphi, q) = \frac{1}{q^{2/\beta}} \left\{ \frac{d}{2\vartheta_0^-(\varphi)} + O(q^\nu) \right\}, \quad q \rightarrow 0+, \quad \varphi \in (0, \pi]. \quad (70)$$

Случай $\alpha = -1$. Амплитуде (69) соответствует сечение

$$\partial_\varphi \sigma(\varphi, q) = \sum_{n=0}^{n^+} \partial_\varphi \sigma_n^+(\varphi, q) + \sum_{n=1}^{n^-} \partial_\varphi \sigma_n^-(\varphi, q) + \partial_\varphi \sigma_{\text{int}}(\varphi, q) + O(q^{-1}), \quad (71)$$

$$\varphi \in (0, \pi].$$

В таком сечении каждое слагаемое

$$\partial_\varphi \sigma_n^\pm(\varphi, q) \equiv \frac{1}{q^{2/\beta}} \frac{d}{2\vartheta_n^\pm(\varphi)} \quad (72)$$

порождается соответствующей стационарной точкой $s_n^\pm(\varphi)$, а слагаемое

$$\partial_\varphi \sigma_{\text{int}}(\varphi, q) \equiv \frac{d}{q^{2/\beta}} \left\{ \sum_{i < j}^{n^+} \frac{\cos [\omega_i^+(\varphi, \mu) - \omega_j^+(\varphi, \mu)]}{\sqrt{\vartheta_i^+(\varphi) \vartheta_j^+(\varphi)}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i < j}^{n^-} \frac{\cos [\omega_i^-(\varphi, \mu) - \omega_j^-(\varphi, \mu)]}{\sqrt{\vartheta_i^-(\varphi) \vartheta_j^-(\varphi)}} + \sum_{i=0}^{n^-} \sum_{j=1}^{n^-} \frac{\cos [\omega_i^+(\varphi, \mu) - \omega_j^-(\varphi, \mu)]}{\sqrt{\vartheta_i^+(\varphi) \vartheta_j^-(\varphi)}} \right\} \quad (73)$$

является интерференционным вкладом от всех стационарных точек.

Из определения (65) следует, что все функции $\omega_n^\pm(\varphi, \mu)$ неограниченно возрастают, если $q \rightarrow 0+$. Поэтому функции $\partial_\varphi \sigma_{\text{int}}(\varphi, q)$ и $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$ осциллируют на полуинтервале $0 < \varphi \leq \pi$, а число локальных экстремумов этих функций растет, если аргумент q уменьшается.

5.2. Свойства функций $n^\pm(\varphi, \beta)$, $s_n^\pm(\varphi)$ и $\vartheta_n^\pm(\varphi)$.

Случай $\alpha = 1$. В этом случае $n = 0$ уравнение (63) становится уравнением

$$\frac{2}{\pi}h(s) = 1 - \frac{\varphi}{\pi}, \quad s \geq 0, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (74)$$

которое при любом $\varphi \in [0, \pi]$ имеет единственный корень $s_0^-(\varphi)$. Левая часть уравнения (74) — монотонно возрастающая функция аргумента s . Поэтому корень $s_0^-(\varphi)$ является монотонно убывающей функцией угла φ , которая сходится к нулю, если $\varphi \rightarrow \pi-$, и беспредельно возрастает, если $\varphi \rightarrow 0+$.

Найдем явную асимптотику корня $s_0^-(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow \pi-$. Для этого в уравнении (74) заменим функцию $h(s)$ ее асимптотикой (34) при $s = s_0^-(\varphi) \rightarrow 0$. Решение $s_0^-(\varphi)$ полученного уравнения представим в виде

$$s_0^-(\varphi) = \frac{b\beta}{2} \left[B \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{2} \right) \right]^{-1} (\pi - \varphi) + O((\pi - \varphi)^3), \quad \varphi \rightarrow \pi-. \quad (75)$$

Согласно этому представлению точка $\varphi = \pi$ является нулем функции $s_0^-(\varphi)$.

Теперь исследуем поведение функции $\vartheta_0^-(\varphi)$ при $\varphi \rightarrow \pi-$. По определению (65) эта функция равна модулю производной $\partial_s h(s)$, взятой в точке $s = s_0^-(\varphi)$. Так как в исследуемом пределе $s_0^-(\varphi) \rightarrow 0$, то следует воспользоваться асимптотикой (35) производной $\partial_s h(s)$ при $s \rightarrow 0$. В этой асимптотике положим $s = s_0^-(\varphi)$, а затем заменим функцию $s_0^-(\varphi)$ правой частью равенства (75). В итоге получим искомое асимптотическое соотношение

$$\vartheta_0^-(\varphi) = \frac{1}{b\beta} B \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{2} \right) + O((\pi - \varphi)^2), \quad \varphi \rightarrow \pi-. \quad (76)$$

В силу этого соотношения в точке $\varphi = \pi$ функция $\vartheta_0^-(\varphi)$ ограничена и отлична от нуля.

Случай $\alpha = -1$. Перечислим свойства функций n^+ и n^- переменных $\varphi \in [0, \pi]$ и $\beta \in (0, 1)$, порожденные определениями (67) и (68). Отметим, что всегда $n^+ + n^- \geq 1$.

Пусть j — некоторое целое число и выполняется одно и двух условий

$$\frac{2j-1}{j} \leq \beta < \frac{4j}{2j+1}, \quad \frac{4j}{2j+1} \leq \beta < \frac{2j+1}{j+1},$$

тогда $[\gamma] = j$. При первом из этих условий $\{\gamma\} < 1/2$, а $\varphi^+ \in [-\pi, 0)$, и поэтому $n^+ = j - 1 < n^- = j$ для любого $\varphi \in [0, \pi]$. При втором из тех же

условий $\{\gamma\} \geq 1/2$, а $\varphi^+ \in [0, \pi)$, и поэтому $n^+ = j < n^- = j + 1$ в случае $\varphi \leq \varphi^+$ и $n^+ = j - 1 > n^- = j$ в случае $\varphi > \varphi^+$.

Теперь предположим, что при некотором целом j верно одно из двух условий

$$\frac{4j}{2j+1} \leq \beta < \frac{2j+1}{j+1}, \quad \frac{2j+1}{j+1} \leq \beta < 4 \frac{j+1}{2j+3},$$

тогда $[\gamma - 1/2] = j$. При первом из этих условий $\{\gamma - 1/2\} < 1/2$, а $\varphi^- \in (\pi, 2\pi]$, и поэтому $n^- = j$ для любого $\varphi \in [0, \pi]$. При втором из тех же условий $\{\gamma - 1/2\} \geq 1/2$, а $\varphi^- \in (0, \pi]$, и поэтому $n^- = j$ в случае $\varphi < \varphi^-$ и $n^- = j + 1$ в случае $\varphi \geq \varphi^-$.

Выведем важные свойства корней $s_n^+(\varphi)$ и $s_n^-(\varphi)$ уравнения (63). Обе части уравнения (63) монотонно растут, если уменьшается аргумент s или номер n . Если номер n фиксирован, а аргумент φ возрастает, то правая часть уравнения (63) при знаке плюс растет а при выборе знака минус — убывает. Вследствие упомянутых свойств уравнения (63) все его корни $s_n^+(\varphi)$ — монотонно убывающие, а все корни $s_n^-(\varphi)$ — монотонно возрастающие функции угла φ , удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} s_n^+(\varphi) &\rightarrow \infty, \quad \varphi \rightarrow 0; \quad 0 < s_n^\pm(\varphi) < \infty, \quad n \geq 1, \quad \varphi \in [0, \pi]; \\ s_n^+(\pi) &= s_n^-(0), \quad s_n^+(\pi) = s_{n+1}^-(\pi), \quad n \geq 1; \\ s_0^+(\varphi) &> s_1^-(\varphi) > s_1^+(\varphi) > s_2^-(\varphi) > \dots > z(\varphi), \quad \varphi \in (0, \pi), \end{aligned}$$

где $z(\varphi) = s_{n^+}^+(\varphi)$ или $z(\varphi) = s_{n^-}^-(\varphi)$, если $n^+ > n^-$ или же $n^+ < n^-$. Следовательно, все отрезки $[s_n^+(\pi), s_n^+(0)]$ и $[s_{n+1}^-(0), s_{n+1}^-(\pi)]$ перемежаются, а объединение всех таких отрезков является полуосью $s \geq 0$. Все корни $s_n^\pm(\varphi)$, $n \geq 1$, ограничены на отрезке $0 \leq \varphi \leq \pi$ и не превышают значения корня $s_0^+(\varphi)$ в точке $\varphi = \pi$, это значение всегда отлично от нуля.

Случай $\alpha = \pm 1$, $\varphi \rightarrow 0$. Найдем асимптотику корней $s_0^-(\varphi)$ и $s_0^+(\varphi)$ в пределе $\varphi \rightarrow 0$. В этом пределе $s_0^\pm(\varphi) \rightarrow \infty$. Поэтому используем асимптотику (39) функции $h(s)$. В правой части уравнения (63), $n = 0$, заменим функцию $h(s)$ этой асимптотикой, положим $s = s_0^\pm(\varphi)$ и разрешим полученное уравнение относительно функции $s_0^\pm(\varphi)$. В результате получим

$$s_0^\pm(\varphi) = b \left[\frac{\beta}{2\varphi} B \left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/\beta} + O(\varphi^{(\beta-1)/\beta}), \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (77)$$

Следовательно, функции $s_0^-(\varphi)$ и $s_0^+(\varphi)$ возрастают как $O(\varphi^{-1/\beta})$, если $\varphi \rightarrow 0+$.

Теперь исследуем поведение функций $\vartheta_0^-(\varphi)$ и $\vartheta_0^+(\varphi)$ в пределе $\varphi \rightarrow 0$. Для этого в асимптотике (40) производной $\partial_s h(s)$ положим $s = s_0^\pm(\varphi)$, а затем

заменяем функцию $s_0^\pm(\varphi)$ правой частью равенства (77). В итоге получим искомое асимптотическое соотношение

$$\vartheta_0^\pm(\varphi) = \frac{1}{b} \left[\left(\frac{\beta}{2\varphi} \right)^{1+\beta} B \left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]^{-1/\beta} + O(\varphi^{2+1/\beta}), \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (78)$$

Оно означает, что при $\varphi \rightarrow 0$ функции $\vartheta_0^-(\varphi)$ и $\vartheta_0^+(\varphi)$ сходятся к нулю как $O(\varphi^{1+1/\beta})$.

5.3. Угловые особенности сечения $\partial_\varphi\sigma$ при низких энергиях. Исследуем зависимость сечения $\partial_\varphi\sigma(\varphi, q)$ низкоэнергетического ($q \rightarrow 0+$) рассеяния от угла φ .

Случай $\alpha = 1$. Покажем, что в точке $\varphi = \pi$ сечение (70) принимает конечное и отличное от нуля значение. Действительно, в силу представления (76) функции $\vartheta_0^-(\varphi)$ имеем

$$\partial_\varphi\sigma(\varphi, q)|_{\varphi=\pi} = \frac{db\beta}{2q^{2/\beta}} \left\{ \left[B \left(\frac{1}{\beta}, \frac{1}{2} \right) \right]^{-1} + O(q^\nu) \right\}, \quad q \rightarrow 0+. \quad (79)$$

Найдем явную асимптотику сечения (70) в пределе $q \rightarrow 0+$ и $\varphi \rightarrow 0$. В таком пределе для функции $\vartheta_0^-(\varphi)$ верно представление (78). Оно порождает искомую асимптотику

$$\partial_\varphi\sigma(\varphi, q) = \frac{db}{2q^{2/\beta}} \left(\frac{\beta}{2\varphi} \right)^{1+1/\beta} \left[B \left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/\beta} [1 + O(\varphi) + O(q^\nu)], \quad \varphi \rightarrow 0. \quad (80)$$

Согласно такой асимптотике сечение $\partial_\varphi\sigma(\varphi, q)$ возрастает как $O(\varphi^{-1-1/\beta})$, если $\varphi \rightarrow 0$.

Случай $\alpha = -1$. Исследуем поведение сечения (71) в пределе $\varphi \rightarrow \pi-$. Напомним свойства функций $\partial_s h(s)$ и $s_n^\pm(\varphi)$. Производная $\partial_s h(s)$ ограничена на всей полуоси $s \geq 0$ и сходится к нулю только в случае $s \rightarrow \infty$. В точке $\varphi = \pi$ все корни $s_n^\pm(\varphi)$, $n \geq 0$, принимают конечные значения. Поэтому в той же точке все функции $\vartheta_n^\pm(\varphi)$ ограничены и не равны нулю. Следовательно, все слагаемые $\partial_\varphi\sigma_n^\pm$ и $\partial_\varphi\sigma_{\text{int}}^+$, а значит, и их сумма $\partial_\varphi\sigma$ являются непрерывными функциями в пределе $\varphi \rightarrow \pi-$. Поэтому значение сечения $\partial_\varphi\sigma$ в этом пределе можно найти по формулам (65) и (71)–(73), положив в этих формулах $\varphi = \pi$.

Теперь исследуем поведение сечения (71) при малых значениях угла рассеяния φ . Заметим, что в исследуемом пределе $\varphi \rightarrow 0$ все корни $s_n^\pm(\varphi)$, $n \geq 1$, ограничены, поэтому все функции $\vartheta_n^\pm(\varphi)$, $n \geq 1$, сходятся к их ненулевым предельным значениям, но функция $\vartheta_0^+(\varphi)$ согласно формуле (78) сходится к нулю. Следовательно, все слагаемые сечения (71), не содержащие функцию $\vartheta_0^+(\varphi)$, в пределе $\varphi \rightarrow 0$ ограничены. Только одно слагаемое $\partial_s\sigma_0^+(\varphi, q)$

обратно пропорционально функции $\vartheta_0^+(\varphi)$ и поэтому является старшим членом асимптотики сечения (71) в пределе $\varphi \rightarrow 0$. Сумма всех слагаемых сечения (71), обратно пропорциональных функции $\sqrt{\vartheta_0^+(\varphi)}$, является следующим членом той же асимптотики. Используя перечисленные выше свойства слагаемых сечения (71) и заменив в формулах (71)–(73) функцию $\vartheta_0^+(\varphi)$ правой частью равенства (78), получим искомую асимптотику в пределе $\varphi \rightarrow 0$. Представим ее формулами

$$\partial_\varphi \sigma(\varphi, q) = \frac{db}{2q^{2/\beta}} t \left[B \left(\frac{\beta+1}{2}, \frac{1}{2} \right) \right]^{1/\beta} \left[1 + O(\sqrt{t}) + O(q^\nu) \right], \quad (81)$$

$$t \equiv \left(\frac{\beta}{2\varphi} \right)^{1+1/\beta}.$$

Следовательно, сечение $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$ возрастает как $O(\varphi^{-1-1/\beta})$, если $\varphi \rightarrow 0$, а старшее слагаемое асимптотики этого сечения равно старшему слагаемому асимптотики (80).

Пример. Рассмотрим случай $\alpha = \pm 1$, $\beta = 4/3$. В этом случае функции $\tau_0(s)$, $h(s)$ и $\partial_s h(s)$ нетрудно вычислить с высокой точностью по формулам (20)–(22), а согласно равенствам (67) и (68) числа n^+ и n^- принимают их наименьшие значения: $n^+ = 0$ и $n^- = 1$ при любом $\varphi \in (0, \pi]$. Поэтому представление (71)–(73) сечения $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$ содержит минимально возможное число слагаемых, равное трем. Ими являются вклады $\partial_\varphi \sigma_0^+(\varphi, q)$ и $\partial_\varphi \sigma_1^-(\varphi, q)$ от стационарных точек $s_0^+(\varphi)$, $s_1^-(\varphi)$ и интерференционный вклад $\partial_\varphi \sigma_{\text{int}}(\varphi, q)$ от этих точек. По определению (73) при $n^+ = 0$ и $n^- = 1$ этот вклад состоит из одного слагаемого.

Графики сечения $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$, вычисленного по формулам (20)–(22) и (70)–(73) при значениях $\alpha = \pm 1$, $d = 1$, $b = 2$, $\beta = 4/3$ и $q = 0, 1$, изображены на рис. 2. Эти графики наглядно иллюстрируют зависимость

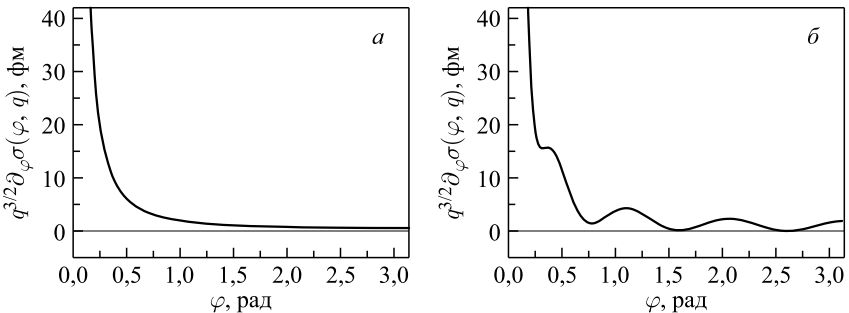


Рис. 2. Случай $d = 1$ фм, $b = 2$, $\beta = 4/3$, $q = 0, 1$. График функции $z_c(\varphi) \equiv 0$ — тонкая прямая. График функции $q^{3/2} \partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$ — сплошная кривая: а) $\alpha = 1$, б) $\alpha = -1$

сечения $\partial_\varphi\sigma(\varphi, q)$ от угла рассеяния φ при низких энергиях. Как видно, сечение $\partial_\varphi\sigma(\varphi, q)$ в случае отталкивающего потенциала (1), $\alpha = 1$, монотонно убывает с ростом угла, а в случае притягивающего потенциала (1), $\alpha = -1$, убывает осциллируя. В обоих случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = -1$ сечение $\partial_\varphi\sigma(\varphi, q)$ неограниченно возрастает при $\varphi \rightarrow 0$ и является конечным в точке $\varphi = \pi$.

6. ЭНЕРГИИ СЛАБОСВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ

В настоящем разделе предполагается, что квантовая частица p_1 движется в поле притягивающего ($\alpha = -1$) потенциала (1). В таком потенциале частица p_1 имеет связанные состояния. Согласно квантовой механике полная энергия E_a связанного состояния отрицательная, такой энергии соответствует мнимое волновое число $\imath k_a$, $k_a > 0$, а в случае малой в определенном смысле энергии связи $|E_a|$ связанное состояние называется слабосвязанным. Наша задача — найти простую аппроксимацию энергии E_a слабосвязанного состояния.

6.1. Радиальные задачи на связанные состояния в двумерной плоскости. Пусть d — некоторое фиксированное ненулевое расстояние. Формулами

$$q_a \equiv k_a d, \quad x \equiv \frac{r}{d}, \quad \rho_a \equiv k_a r = q_a x, \quad b \equiv \left(\frac{2m_1}{\hbar^2} d^{2-\beta} V_0 \right)^{1/\beta} \quad (82)$$

определим безразмерный модуль q_a волнового числа $\imath q_a$ и безразмерные аргументы x , ρ и параметр b . Приведем формулы для вычисления полной энергии

$$E_a = -\frac{(\hbar k_a)^2}{2m_1}, \quad E_a = -\frac{1}{2m_1} \left(\frac{\hbar q_a}{d} \right)^2. \quad (83)$$

Согласно этим формулам $q_a \rightarrow 0+$ тогда и только тогда, когда $E_a \rightarrow 0-$ и наоборот.

Пусть $u_\lambda(x, q_a)$ — радиальная волновая функция связанного состояния $|q, \lambda\rangle$ частицы p_1 с квантовыми числами $q = \imath q_a$ и $\lambda = m - 1/2$, $m = 0, 1, \dots$ В обозначениях (82) краевая задача Шредингера для такой функции записывается как уравнение

$$\left[\partial_x^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} - q_a^2 + \left(\frac{b}{x} \right)^\beta \right] \tilde{u}_\lambda(x, q_a) = 0, \quad x > 0, \quad q_a \geq 0, \quad (84)$$

с условием

$$\tilde{u}_\lambda(x, q_a) = O(x^{\lambda+1}), \quad x \rightarrow 0, \quad (85)$$

и условием

$$\tilde{u}_\lambda(x, q_a) = o(\rho_a^{-1/2}), \quad \rho_a \rightarrow \infty. \quad (86)$$

Теперь представим краевую задачу (84)–(86) в наиболее удобном для наших исследований виде. Для этого сначала положим по определению

$$p_a^2(y, s) \equiv \left(\frac{b}{y}\right)^\beta - \left(\frac{s}{y}\right)^2 - 1, \quad y \geq 0, \quad s \geq 0, \quad \beta \in (1, 2). \quad (87)$$

Затем подстановкой

$$\begin{aligned} x &= q_a^{-2/\beta} y, & \tilde{u}_\lambda(x, q) &= u_\lambda(y, q), & \nu &= (2/\beta) - 1 > 0, \\ s &= q_a^\nu \sqrt{\lambda(\lambda + 1)}, & \rho_a &= y q_a^{-\nu} \end{aligned}$$

сведем уравнение (84) к уравнению

$$T_a \equiv [q_a^{2\nu} \partial_y^2 + p_a^2(y, s)], \quad T_a u_\lambda(y, q_a) = 0, \quad (88)$$

а из граничных условий (85) и (86) выведем условие

$$u_\lambda(y, q_a) = O(y^{\lambda+1}), \quad q_a^{2/\beta} y \rightarrow 0, \quad (89)$$

и условие

$$u_\lambda(y, q_a) = o(\rho_a^{-1/2}), \quad \rho_a \rightarrow \infty, \quad \rho = q_a^{-\nu} y. \quad (90)$$

Пределом малой энергии связи назовем предел $q_a \rightarrow 0+$ при фиксированных значениях квантового числа λ , параметра d и параметров V_0 и β притягивающего ($\alpha = -1$) потенциала (1). Состояния $|q, \lambda\rangle$ частицы p_1 с квантовыми числами $q = \nu q_a$, $0 < q_a \ll 1$, и $\lambda = m - 1/2$, $m = 0, 1, \dots$, считаем слабосвязанными.

6.2. Приближенные энергии слабосвязанных состояний. Сначала необходимо определить функции $y_1(s)$, $y_2(s)$ и $p_a(y, s)$. Для этого перепишем уравнение $p_a^2(y, s) = 0$ в виде уравнения

$$b^\beta y^{2-\beta} - y^2 = s^2, \quad y \geq 0, \quad s \geq 0, \quad \beta \in (1, 2). \quad (91)$$

Его левую и правые части считаем функциями $f_a(y)$ и $s^2 \geq 0$ аргумента y в области $y \geq 0$. Функция $f_a(y)$ равна нулю в точках $y = 0$, $y = b$ и является положительной на интервале $0 < y < b$. На этом интервале производная $\partial_y f_a(y)$ имеет один простой нуль y_c . Следовательно, на том же интервале функция $f_a(y)$ имеет единственный локальный максимум и достигает своего максимального значения $f_a(y_c)$ в точке y_c . Построив графики функций $f_a(y)$ и $s^2 \geq 0$, можно убедиться в том, что кривая $f_a(y)$ пересекает прямую $s^2 > 0$ только в двух точках при условии $0 \leq s^2 < f_a(y_c)$. Абсциссы $y_1(s)$ и $y_2(s)$ этих точек являются простыми и неотрицательными корнями уравнения (91). Для определенности положим $y_1(s) < y_2(s)$. Тогда $y_1(s) \rightarrow 0+$, а $y_2(s) \rightarrow b-$, если $s \rightarrow 0$. Равенство $y_1(s) = y_2(s)$ достигается в точке $s = s_c$, где s_c —

корень уравнения $s^2 = f_a(y_c)$. Нетрудно последовательно найти y_c , $f_a(y_c)$ и s_c , а затем свести условие $0 \leq s^2 < f_a(y_c)$ существования двух простых корней $y_1(s)$ и $y_2(s)$ обсуждаемого уравнения (91) к условию

$$0 \leq s < s_c, \quad s_c \equiv b \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/\beta} \nu^{\nu/2}. \quad (92)$$

Согласно определению (87) функция $p_a^2(y, s)$ неотрицательная, если $y \in [y_1(s), y_2(s)]$ и $0 \leq s \leq s_c$. Только при таких условиях функция $p_a(y, s) \equiv \sqrt{p_a^2(y, s)}$ является вещественной и неотрицательной.

Как известно [1], при каждом значении λ задача (88)–(90) имеет нетривиальные решения при вполне определенных дискретных значениях $q_a = q_{a,n}$, таких что $q_{a,n} < q_{a,n+1}$, $n = 0, 1, \dots$, и $q_{a,n} \rightarrow 0+$, $n \rightarrow \infty$.

Положим $q_a \rightarrow 0+$. Тогда наша задача (88)–(90) станет задачей построения малых собственных значений $q_{a,n}$ и отвечающих им собственных функций $u_\lambda(y, q_{a,n})$ оператора T_a в пространстве функций $u_\lambda(y, q_a)$, удовлетворяющих граничным условиям (89) и (90). Согласно монографии [1] искомое малое собственное значение $q_{a,n}$ такого оператора является корнем уравнения

$$q_a^{-\nu} g_a(s) = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{1}{n} \right), \quad n \rightarrow \infty, \quad s = q_a^\nu m, \quad m = \lambda + 1/2, \quad (93)$$

в котором число n принимает большие целые значения и по определению

$$g_a(s) \equiv \int_{y_1(s)}^{y_2(s)} p_a(y, s) dy. \quad (94)$$

Приступим к анализу уравнения (93). В этом уравнении $s = q_a^\nu m$, но пределы $y_1(s)$ и $y_2(s)$ интеграла (94), равные по определению корням уравнения $p_a^2(y, s) = 0$, существуют при условии (92). Положив в этом условии $s = q_{a,n}^\nu m$, выведем неравенства

$$0 \leq q_{a,n}^\nu m < b \left(\frac{\beta}{2} \right)^{1/\beta} \nu^{\nu/2}. \quad (95)$$

Эти неравенства определяют допустимые целые значения квантового числа m , при которых исследуемое уравнение (93) имеет смысл.

Теперь предположим, что функция $g_a(s)$ и ее производные $\partial_s g_a(s)$ и $\partial_s^2 g_a(s)$ непрерывны в некоторой малой правой полукрестности точки $s = 0$ и в этой точке зависят только от параметров b и β . Тогда при достаточно

малых значениях аргумента s в левой части уравнения (93) можно представить функцию $g_a(s)$ ее рядом Маклорена

$$g_a(s) = g_a(0) + s\partial_s g_a(s)|_{s=0} + O(s^2),$$

затем положить $s = q_{a,n}' m \ll 1$ и найти приближенное решение $q_{a,n}' \approx q_a'$ получившегося уравнения. Представим такое решение и условия его применимости следующими формулами:

$$q_{a,n}' \approx \frac{g_a(0)}{\pi(n+1/2) - m\partial_s g_a(s)|_{s=0}}, \quad n \gg 1, \quad q_{a,n}' m \ll 1. \quad (96)$$

В силу этих формул условие $q_{a,n}' m \ll 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $m \ll n$ и $n \gg 1$. При таких же ограничениях на значения n и m выполняется и условие (95).

Перейдем к исследованию функции $g_a(s)$ и ее производных. Сначала найдем производную $\partial_s g_a(s)$. По определению функции $y_1(s)$ и $y_2(s)$ — корни уравнения $p_a^2(y, s) = 0$. Поэтому из представления (94) следует, что

$$\partial_s g_a(s) = -s \int_{y_1(s)}^{y_2(s)} \frac{dy}{y^2} \frac{1}{p_a(y, s)}. \quad (97)$$

Заметим, что в интегралах (93) и (97) подынтегральные функции и пределы интегрирования зависят от переменной s . Поэтому в этих интегралах не представляется возможным перейти к пределу $s \rightarrow 0$. Выведем интегральные представления, адаптированные для вычисления функций $g_a(s)$ и $\partial_s g_a(s)$ в точке $s = 0$. Для этого подстановкой

$$y = \frac{1}{\tau_a(s)} \left(\frac{s^2}{b^\beta} \right)^{\frac{1}{2-\beta}} \quad (98)$$

сведем уравнение (91) к уравнению

$$\tau_a^\beta(s) - \tau_a^2(s) = \left(\frac{s}{b} \right)^{2/\nu}, \quad s \geq 0. \quad (99)$$

Графическим способом убедимся в том, что при условии (92) это уравнение имеет два простых корня $\tau_1(s)$ и $\tau_2(s)$. Положим для определенности $\tau_1(s) < \tau_2(s)$. Тогда в пределе $s \rightarrow 0$ корень $\tau_1(s)$ сходится к нулю как функция $(s/b)^{2/(2-\beta)}$, а корень $\tau_2(s)$ стремится к единице. Существование и непрерывность производных обоих корней при малых значениях аргумента s нетрудно доказать способами, подробно изложенными в п. 3.1.

Так как уравнение (91) заменой (98) свелось к уравнению (99), то существует однозначная связь между корнями $y_j(s)$ и $\tau_j(s)$, $j = 1, 2$, этих уравнений. Действительно, если в правой части равенства (98) заменить функцию $\tau_a(s)$ корнем $\tau_1(s)$ или корнем $\tau_2(s)$ уравнения (99), то левая часть этого же равенства будет корнем $y_2(s)$ или корнем $y_1(s)$ уравнения (91). Используя указанную связь и подстановки

$$y = \frac{1}{z\tau_1(s)} \left(\frac{s}{b}\right)^{2/\nu}, \quad y = \frac{1}{z\tau_2(s)} \left(\frac{s}{b}\right)^{2/\nu},$$

преобразуем соответствующие интегралы (94) и (97). В результате получим представление

$$g_a(s) = \frac{s}{2} \int_1^{t_1(s)} \frac{\beta z^{\beta-2} \tau_1^{\beta-2}(s) - 2}{\sqrt{1 - z^2 - \tau_1^{\beta-2}(s)(1 - z^\beta)}} dz, \quad t_1(s) \equiv \frac{\tau_2(s)}{\tau_1(s)}, \quad s \geq 0,$$

и представление

$$\partial_s g_a(s) = - \int_{t_2(s)}^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 - \tau_2^{\beta-2}(s)(1 - z^\beta)}}, \quad t_2(s) \equiv \frac{\tau_1(s)}{\tau_2(s)}, \quad s \geq 0.$$

В этих представлениях положим $s \rightarrow 0$. Используя полученные предельные соотношения

$$g_a(0) = \frac{b}{\beta} B\left(\frac{2-\beta}{2\beta}, \frac{3}{2}\right), \quad \partial_s g_a(s)|_{s=0} = \frac{\pi}{\beta-2}$$

и формулы (83) и (96), найдем приближение энергии $E_{a,n}$ слабосвязанного состояния $|nq_{a,n}, \lambda\rangle$ квантовой частицы p_1 в поле притягивающего ($\alpha = -1$) потенциала (1). Представим это приближение в виде

$$E_{a,n} \approx -\frac{1}{2m_1} \left(\frac{\hbar}{d}\right)^2 \left[\frac{b}{\pi\beta} B\left(\frac{2-\beta}{2\beta}, \frac{3}{2}\right) \frac{1}{n + 1/2 + m/(2-\beta)} \right]^{2/\nu}. \quad (100)$$

Как пояснялось выше, полученное приближение (100) имеет место при следующих условиях: целое число n достаточно большое, а значения квантового числа m ограничены сверху условием $m \ll n$. Стоит отметить, что при таких же ограничениях на номера n и m приближение (100) верно в случае потенциала (1) с параметрами $\alpha = -1$ и $\beta \in (0, 1)$. Интересным является и следующий факт: в случае $\beta = 1$ правая часть формулы (100) при любых целых $n = 0, 1, \dots$ и $m = 0, 1, \dots$ воспроизводит точные энергии всех квантовых состояний двумерного атома водорода [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим главные результаты выполненных исследований двумерного движения медленной квантовой частицы в поле дальнедействующего потенциала (1).

Получены и исследованы равномерные и неравномерные по квантовому числу m низкоэнергетические ($q \rightarrow 0+$) асимптотики (13), (14) и (44)–(46) парциальных фаз $\delta_m(q)$ двумерного рассеяния квантовой частицы потенциалом (1). Доказательством теорем 1–4 установлена равномерная на полуинтервале $0 < \varphi \leq \pi$ сходимость разложений (47), (53), (60) и (61) амплитуды рассеяния $f(\varphi, q)$ по фазам $\delta_m(q)$, интегралам $\eta_m(\varphi, q)$, $\tilde{\eta}_m(\varphi, q)$ и низкоэнергетическим приближениям $q^{-\nu}g(q^\nu m)$ фаз $\delta_m(q)$.

Найдены главные слагаемые (66), (69) и (70)–(73) низкоэнергетических асимптотик амплитуды $f(\varphi, q)$ и дифференциального сечения $\partial_\varphi \sigma(\varphi, q)$ двумерного рассеяния. Показано, что такое сечение при низких энергиях расходится в направлении рассеяния вперед ($\varphi \rightarrow 0+$) как $O(\varphi^{-1-1/\beta})$ и ограничено в направлении рассеяния назад ($\varphi \rightarrow \pi-$).

Выведено явное, но неравномерное ($m \ll n$) по номеру m представленное (100) энергий слабосвязанных ($n \gg 1$) состояний квантовой частицы в поле притягивающего ($\alpha = -1$) потенциала (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
2. Yafaev D. R. // Commun. Math. Phys. 1982. V. 85. P. 177.
3. Квицинский А. А. // ТМФ. 1984. Т. 59. С. 472.
4. Бабиков В. В. Метод фазовых функций в квантовой механике. М.: Наука, 1976.
5. Friedrich H. Scattering Theory // Lecture Notes in Physics. Berlin: Springer, 2013. V. 872.
6. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука, 1979.
7. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 2 и Т. 3, Ч. 2. М.: Наука, 1974.
8. Будаг Б. М., Фомин С. В. Кратные интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2002.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Т. 1: Элементарные функции. Т. 3: Специальные функции. М.: Наука, 1981.
10. Федорюк М. В. Асимптотика: интегралы и ряды. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.

Получено 15 ноября 2018 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 27.11.2018.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 3,04. Тираж 245 экз. Заказ № 59550

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/