

P1-2023-20

В. С. Рихвицкий, А. В. Беляев

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ТРЕКОВОГО ДЕТЕКТОРА

Рихвицкий В. С., Беляев А. В.

P1-2023-20

Полиномиальная аппроксимация магнитного поля для трекового детектора

Магнитное поле 1-м пузырьковой водородной камеры ЛВЭ ОИЯИ было измерено в 1971 г. В программах геометрической реконструкции физических событий эти данные использовались для вычислений поля в произвольных точках пространства с помощью методов линейной интерполяции.

Измеренное магнитное поле удобно аппроксимировать полиномами, что позволяет эксплуатировать связи, налагаемые уравнениями магнитного поля. Метод наименьших квадратов применяется в базе полиномов, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Предложенный метод построения базиса был реализован и использован в ряде программ обработки экспериментальных данных, полученных на трековых детекторах.

Представленный метод может быть применен не только для пузырьковых камер, где поле стационарно и близко к однородному, но и для других трековых детекторов.

Работа выполнена в Лаборатории физики высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2023

Rikhvitsky V. S., Belyaev A. V.

P1-2023-20

Polynomial Approximation of the Magnetic Field for Track Detector

The magnetic field of the 1-meter hydrogen bubble chamber at LHE JINR was measured in 1971. In the programs for the geometric reconstruction of physical events, these data were used to calculate the field at arbitrary points in space using linear interpolation methods.

It is convenient to approximate the measured magnetic field by polynomials, which makes it possible to exploit the connections imposed by the magnetic field equations. The method of least squares is used to construct basic polynomials that satisfy the Laplace equation. The proposed method for constructing the basis was implemented and used in a number of programs for processing experimental data obtained on track detectors.

The presented method can be applied not only to bubble chambers, where the field is stationary and close to uniform, but also to other track detectors.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2023

ВВЕДЕНИЕ

В 1970–1990-х гг. на дубненском и серпуховском ускорителях облучалась 1-м ($95 \times 35 \times 30$ см) водородная пузырьковая камера [1]. В результате на большом количестве фотопленок (при разных облучениях) были зафиксированы события, т. е. взаимодействия частица–частица, частица–ядро, ядро–частица. В указанные годы и позже эти события с помощью различных приборов измерялись, а затем обрабатывались в соответствии с некоторыми физическими моделями.

Поле камеры ЛВЭ ОИЯИ было измерено в 1971 г. [2]. В программах геометрической реконструкции физических событий эти данные использовались для вычислений магнитного поля в произвольных точках пространства с помощью методов линейной интерполяции.

Однако измеренное магнитное поле удобно аппроксимировать полиномами, что позволяет эксплуатировать связи, налагаемые уравнениями магнитного поля. Метод наименьших квадратов (МНК) применяется в базе полиномов, удовлетворяющих уравнению Лапласа. Предложенный метод построения базиса был реализован и использован в ряде программ обработки экспериментальных данных, полученных на трековых детекторах.

1. УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ

Пусть \mathbf{V} — статическое магнитное поле $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V} = \mathbf{0}$ (электрическое поле \mathbf{E} , если оно есть, во всяком случае, предполагается постоянным: $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} = \mathbf{0}$). Безвихревое магнитное поле $\mathbf{V}: R^3 \rightarrow R^3$, не имеющее в некоторой области Ω источников, т. е. удовлетворяющее в этой области условиям

$$\nabla \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0},$$

по теореме Пуанкаре имеет в этой области скалярный потенциал $U: R^3 \rightarrow R$, т. е.

$$\mathbf{V} = \nabla U, \\ B_x = \frac{\partial}{\partial x} U, \quad B_y = \frac{\partial}{\partial y} U, \quad B_z = \frac{\partial}{\partial z} U.$$

Применяя к такому полю первое уравнение Максвелла, имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U + \frac{\partial^2}{\partial y^2} U + \frac{\partial^2}{\partial z^2} U = 0,$$

т. е. потенциалы являются собственными функциями оператора Лапласа (гармоническими функциями):

$$\nabla^2 U = 0.$$

2. АППРОКСИМАЦИЯ

Аппроксимация с помощью МНК измеренного магнитного поля **B** делается таким образом, чтобы она заведомо удовлетворяла уравнениям Максвелла. Потенциал $U(x, y, z)$ отыскивается в виде полиномов от x, y, z конечной степени N :

$$U(x, y, z) = Q_N(x, y, z),$$

соответственно, поле **B** является полиномом степени $N-1$.

Налагаемым условием является достижение минимума по коэффициентам полинома

$$\min \sum_m \left| \nabla Q_N(x_m, y_m, z_m) - \tilde{\mathbf{B}}_m \right|^2.$$

Здесь $m = 1, \dots, M$ суть номера точек пространства, им соответствуют измеренные координаты точек x_m, y_m, z_m и компоненты $\tilde{B}_{x_m}, \tilde{B}_{y_m}, \tilde{B}_{z_m}$ поля в этих точках. Варьируемыми параметрами являются коэффициенты полинома Q_N .

Будем сразу полагать Q_N гармонической функцией (по предложению В. И. Мороза):

$$\nabla^2 Q_N = 0.$$

Полином Q_N представляется в виде суммы однородных полиномов Q_n степени n :

$$Q_N = \sum_{0 \leq n \leq N} Q_n, \quad \nabla Q_N = \sum_{0 \leq n \leq N} \nabla Q_n.$$

Замечено, однако, что действие оператора Лапласа на однородные полиномы разных степеней независимо, т. е. уравнение Лапласа для полинома Q_N может быть переписано в виде системы $N+1$ уравнений Лапласа для однородных полиномов:

$$\nabla^2 Q_n = 0, \quad n = 0, \dots, N, \quad (1)$$

где $Q_n = \sum_{i+j+k=n} (\alpha_{i,j,k} x^i y^j z^k)$, притом относительно значений коэффициентов $\alpha_{i,j,k}$ пока никаких утверждений не делается.

Пространство однородных собственных (удовлетворяющих уравнению Лапласа) полиномов степени n имеет размерность $\nu = 2n+1$ (см. [3, 4]), и тогда может быть выбран базис собственных полиномов $P_{n,\nu}$, в котором

$$Q_n = \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} P_{n,\nu},$$

где $P_{n,\nu} = \sum_{i+j+k=n} \alpha_{i,j,k}^{(\nu)} x^i y^j z^k$. Здесь коэффициенты $\alpha_{i,j,k}^{(\nu)}$ суть «те же самые» $\alpha_{i,j,k}$ (соответствуют тем же монономам $x^i y^j z^k$), но для данного $\nu = 1, \dots, 2n+1$ имеют вполне определенное значение.

Базисные полиномы $P_{n,\nu}$ в силу уравнения Лапласа удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 P_{n,\nu} = \sum_{\substack{\nu=1 \\ i+j+k=n}}^{2n+1} \left[\alpha_{i,j,k}^{(\nu)} (i(i-1)x^{i-2}y^jz^k + j(j-1)x^iy^{j-2}z^k + k(k-1)x^iy^jz^{k-2}) \right] = 0,$$

являющимся уравнениями связи. Приведя подобные члены, обнаруживаем уравнение связи

$$\alpha_{i+2,j,k}^{(\nu)}(i+1)(i+2) + \alpha_{i,j+2,k}^{(\nu)}(j+1)(j+2) + \alpha_{i,j,k+2}^{(\nu)}(k+1)(k+2) = 0, \quad i+j+k=n. \quad (2)$$

Коэффициенты $\alpha_{i,j,k}^{(\nu)}$ определяются из этого уравнения на этапе построения базиса (подробнее см. в след. п.), а коэффициенты $\beta_{n,\nu}$ являются варьируемыми и отыскиваются с помощью МНК, а точнее, определяются из его следствия — решения системы линейных уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_{n,\nu}} = 0,$$

где

$$S = \sum_{m=1}^M \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} U(x_m, y_m, z_m) - \tilde{B}_{x_m} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} U(x_m, y_m, z_m) - \tilde{B}_{y_m} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} U(x_m, y_m, z_m) - \tilde{B}_{z_m} \right)^2 \right].$$

3. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Принимается степень полинома N для потенциала U (в программе из внешнего текстового файла считывается $N = 5$).

Определяются монономы R^{ijk} ($i+j+k=n$) всех степеней n (от 0 до N). Для наглядности представляем их в виде треугольных таблиц:

$$\begin{array}{l} \mathbf{n = 0:} \quad 1 \\ \mathbf{n = 1:} \quad y \quad x \\ \quad \quad \quad z \\ \mathbf{n = 2:} \quad y^2 \quad xy \quad x^2 \\ \quad \quad \quad yz \quad xz \\ \quad \quad \quad z^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} = 3: & \quad y^3 \quad xy^2 \quad x^2y \quad x^3 \\
& \quad y^2z \quad xyz \quad x^2z \\
& \quad yz^2 \quad xz^2 \\
& \quad z^3 \\
\mathbf{n} = 4: & \quad y^4 \quad xy^3 \quad x^2y^2 \quad x^3y \quad x^4 \\
& \quad y^3z \quad xy^2z \quad x^2yz \quad x^3z \\
& \quad y^2z^2 \quad xyz^2 \quad x^2z^2 \\
& \quad yz^3 \quad xz^3 \\
& \quad z^4 \\
\mathbf{n} = 5: & \quad y^5 \quad xy^4 \quad x^2y^3 \quad x^3y^2 \quad x^4y \quad x^5 \\
& \quad y^4z \quad xy^3z \quad x^2y^2z \quad x^3yz \quad x^4z \\
& \quad y^3z^2 \quad xy^2z^2 \quad x^2yz^2 \quad x^3z^2 \\
& \quad y^2z^3 \quad xyz^3 \quad x^2z^3 \\
& \quad yz^4 \quad xz^4 \\
& \quad z^5
\end{aligned}$$

Отсюда следуют однородные полиномы с пока что неопределенными коэффициентами:

$$\mathbf{n} = \mathbf{0} : Q_0 = \alpha_{000}$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{1} : Q_1 = \alpha_{010}y + \alpha_{100}x + \alpha_{001}z$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{2} : Q_2 = \alpha_{020}y^2 + \alpha_{110}xy + \alpha_{200}x^2 + \alpha_{011}yz + \alpha_{101}xz + \alpha_{002}z^2$$

.....

В зависимости от степени n количество n_m монономов в однородных полиномах (или, что то же самое, число монономов или узлов в треугольной таблице) выражается формулой суммы арифметической прогрессии:

$$n_m = \frac{[1 + (n + 1)](n + 1)}{2}.$$

Количество n_c уравнений связи выражается аналогично:

$$n_c = \frac{[1 + ((n - 2) + 1)]((n - 2) + 1)}{2},$$

что равно числу узлов в треугольной таблице $n - 2$ (таковы степени монономов в уравнении Лапласа). Соответственно, количество n_b базисных полиномов для данного n есть

$$n_b = n_m - n_c = 2n + 1$$

(отметим, что обозначение ν , введенное ранее в п. 2, является синонимом для n_b).

Представляют интерес также *суммарные* (в зависимости от степени N потенциала) числа мономов по всем треугольным таблицам для $n = 0, \dots, N$

$$n_M(N) = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6} \quad (3)$$

и базисных полиномов

$$n_B(N) = (N+1)^2. \quad (4)$$

Для справки приведем известный вывод формул (3) и (4):

$$\begin{aligned} n_M(N) &= \sum_{n=0}^N n_m(n) = \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{(1+(n+1))(n+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N n^2 + \frac{3}{2} \sum_{n=0}^N n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N 2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + \frac{3}{2} \frac{(0+N)(N+1)}{2} + (N+1) = \\ &= \frac{(N+1)(N^2+5N+6)}{6} = \frac{(N+1)(N+2)(N+3)}{6}, \end{aligned}$$

$$n_B(N) = \sum_{n=0}^N n_b(n) = \sum_{n=0}^N (2n+1) = \frac{(1+(2N+1))(N+1)}{2} = (N+1)^2.$$

Получаем данные, представленные в табл. 1.

Для $n < 2$ число уравнений связи $n_c = 0$ и заведомо выполняется (1), поэтому коэффициенты для базисных полиномов этих степеней могут устанавливаться произвольно, например, в виде нулей и единиц.

$n = 0$

$$\text{Имеем } Q_0 = \sum_{i+j+k=0} (\alpha_{i,j,k} x^i y^j z^k) = \alpha_{000} x^0 y^0 z^0 = \alpha_{000}.$$

Заведомо $\nabla^2 Q_0 \equiv 0$, поэтому принимаем $\alpha_{000}^{(1)} \leftarrow 1$, откуда получаем базисный полином $P_{n,\nu} = P_{0,1} = 1 \cdot x^0 y^0 z^0 = 1$.

$n = 1$

$$\text{Имеем } Q_1 = \sum_{i+j+k=1} (\alpha_{i,j,k} x^i y^j z^k) = \alpha_{100} x + \alpha_{010} y + \alpha_{001} z.$$

Таблица 1

n	n_m	$n_M = \sum n_m$	n_c	n_b	$n_B = \sum n_b$
0	1	1	0	1	1
1	3	4	0	3	4
2	6	10	1	5	9
3	10	20	3	7	16
4	15	35	6	9	25
5	21	56	10	11	36

Заведомо $\nabla^2 Q_1 \equiv 0$, поэтому, выполняя перебор, получаем базисные полиномы $P_{1,\nu}$:

$$\alpha_{100}^{(1)} \leftarrow 1, \quad \alpha_{101}^{(1)} \leftarrow 0, \quad \alpha_{001}^{(1)} \leftarrow 0, \quad \text{откуда } P_{1,1} = 1 \cdot x^1 y^0 z^0 = x,$$

$$\alpha_{100}^{(2)} \leftarrow 0, \quad \alpha_{010}^{(2)} \leftarrow 1, \quad \alpha_{001}^{(2)} \leftarrow 0, \quad \text{откуда } P_{1,2} = 1 \cdot x^0 y^1 z^0 = y,$$

$$\alpha_{100}^{(3)} \leftarrow 0, \quad \alpha_{010}^{(3)} \leftarrow 0, \quad \alpha_{001}^{(3)} \leftarrow 1, \quad \text{откуда } P_{1,3} = 1 \cdot x^0 y^0 z^1 = z.$$

Для бóльших степеней n решается несколько систем линейных уравнений.

$n = 2$

$$\text{Имеем } Q_2 = \alpha_{020} y^2 + \alpha_{110} xy + \alpha_{200} x^2 + \alpha_{011} yz + \alpha_{101} xz + \alpha_{002} z^2.$$

В однородном полиноме Q_2 имеем $n_m = 6$ членов, при этом получается одно ($n_c = 1$) уравнение связи вида (2), а именно

$$\nabla^2 Q_2 = 2\alpha_{200} + 2\alpha_{020} + 2\alpha_{002} = 0. \quad (5)$$

Среди коэффициентов Q_2 независимыми оказываются $n_m - n_c = 5$, поэтому и число базисных полиномов равно $n_b = \nu = 2n + 1 = 5$.

Примем (в качестве неопределенного коэффициента) последний из шести в Q_2 , т. е. α_{002} . Среди первых $\nu = 5$ независимых коэффициентов будем поочередно присваивать каждому из них единицу, остальным — нуль, и для нахождения неопределенного α_{002} будем во всех этих ν случаях решать по одному уравнению (5) с одним неизвестным. Получим базисные полиномы $P_{2,\nu}$:

$$\alpha_{020}^{(1)} \leftarrow 1 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 2\alpha_{002}^{(1)} = 0 \Rightarrow \alpha_{002}^{(1)} = -1 \Rightarrow P_{2,1} = y^2 - z^2,$$

$$\alpha_{110}^{(2)} \leftarrow 1 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2\alpha_{002}^{(2)} = 0 \Rightarrow \alpha_{002}^{(2)} = 0 \Rightarrow P_{2,2} = xy,$$

$$\alpha_{200}^{(3)} \leftarrow 1 \Rightarrow 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 2\alpha_{002}^{(3)} = 0 \Rightarrow \alpha_{002}^{(3)} = -1 \Rightarrow P_{2,3} = x^2 - z^2,$$

$$\alpha_{011}^{(4)} \leftarrow 1 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2\alpha_{002}^{(4)} = 0 \Rightarrow \alpha_{002}^{(4)} = 0 \Rightarrow P_{2,4} = yz,$$

$$\alpha_{101}^{(5)} \leftarrow 1 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2\alpha_{002}^{(5)} = 0 \Rightarrow \alpha_{002}^{(5)} = 0 \Rightarrow P_{2,5} = xz.$$

$n = 3$

$$Q_3 = \alpha_{030} y^3 + \alpha_{120} xy^2 + \alpha_{210} x^2 y + \alpha_{300} x^3 + \alpha_{021} y^2 z + \\ + \alpha_{111} xyz + \alpha_{201} x^2 z + \alpha_{012} yz^2 + \alpha_{102} xz^2 + \alpha_{003} z^3,$$

$$\nabla^2 Q_3 = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 2\alpha_{210} y + 3 \cdot 2\alpha_{300} x + 2\alpha_{201} z + \\ + 3 \cdot 2\alpha_{030} y + 2\alpha_{120} x + 2\alpha_{021} z + 2\alpha_{012} y + 2\alpha_{102} x + 3 \cdot 2\alpha_{003} z = 0. \quad (6)$$

Из условия (6) получаем три ($n_c = 3$) уравнения связи вида (2):

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_{210} + 3 \cdot 2\alpha_{030} + 2\alpha_{012} \\ 3 \cdot 2\alpha_{300} + 2\alpha_{120} + 2\alpha_{102} \\ 2\alpha_{201} + 2\alpha_{021} + 3 \cdot 2\alpha_{003} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2\alpha_{210} + 3 \cdot 2\alpha_{030} + 2\alpha_{012} \\ 3 \cdot 2\alpha_{300} + 2\alpha_{120} + 2\alpha_{102} \\ 2\alpha_{201} + 2\alpha_{021} + 3 \cdot 2\alpha_{003} \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

В однородном полиноме Q_3 имеем $n_m = 10$ мономов, среди коэффициентов Q_3 независимыми оказываются $n_m - n_c = n_b = \nu = 2n + 1 = 7$, что и равно числу базисных полиномов $P_{3,\nu}$.

Среди первых $\nu = 7$ независимых коэффициентов будем поочередно присваивать каждому из них единицу, остальным — нуль, и для нахождения оставшихся трех неопределенных α_{012} , α_{102} и α_{003} будем во всех этих ν случаях решать по три уравнения (7) с тремя неизвестными. Например, для $\nu = 1$:

$$\alpha_{030}^{(1)} \leftarrow 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2\alpha_{012}^{(1)} = 0 \\ 3 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2\alpha_{102}^{(1)} = 0 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2\alpha_{003}^{(1)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{012}^{(1)} \\ \alpha_{102}^{(1)} \\ \alpha_{003}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1) \\ -(3 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) \\ -(2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_{012}^{(1)} = -3 \\ \alpha_{102}^{(1)} = 0 \\ \alpha_{003}^{(1)} = 0. \end{array}$$

Получаем соответствующий собственный полином $P_{3,1} = y^3 - 3yz^2$. Отметим, что как для $\nu = 1$, так и для последующих $\nu > 1$ матрица левой части каждого линейного уравнения оказывается одной и той же, в данном случае диагональной.

Выполняя аналогичные действия для остальных независимых коэффициентов, получим собственные полиномы $P_{3,\nu}$:

$$\begin{aligned} P_{3,2} &= xy^2 - xz^2, \\ P_{3,3} &= x^2y - yz^2, \\ P_{3,4} &= x^3 - 3xz^2, \\ P_{3,5} &= y^2z - 1/3z^3, \\ P_{3,6} &= xyz, \\ P_{3,7} &= x^2z - 1/3z^3. \end{aligned}$$

$n = 4$

Для полиномов Q_n степени $n > 3$ процедура нахождения собственных полиномов $P_{n,\nu}$ выполняется аналогично, при этом матрица левой части всех линейных уравнений снова оказывается одной и той же, однако недиагональной:

$$\begin{aligned} Q_4 &= \alpha_{040}y^4 + \alpha_{130}xy^3 + \alpha_{220}x^2y^2 + \alpha_{310}x^3y + \alpha_{400}x^4 + \\ &+ \alpha_{031}y^3z + \alpha_{121}xy^2z + \alpha_{211}x^2yz + \alpha_{301}x^3z + \alpha_{022}y^2z^2 + \\ &+ \alpha_{112}xyz^2 + \alpha_{202}x^2z^2 + \alpha_{013}yz^3 + \alpha_{103}xz^3 + \alpha_{004}z^4. \end{aligned}$$

Неопределенными для Q_4 являются коэффициенты последних шести членов:

$$\begin{aligned} \nabla^2 Q_4 = & \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = 2\alpha_{220}y^2 + 3 \cdot 2\alpha_{310}xy + 4 \cdot 3\alpha_{400}x^2 + \\ & + 2\alpha_{211}yz + 3 \cdot 2\alpha_{301}xz + 2\alpha_{202}z^2 + 4 \cdot 3\alpha_{040}y^2 + 3 \cdot 2\alpha_{130}xy + \\ & + 2\alpha_{220}x^2 + 3 \cdot 2\alpha_{031}yz + 2\alpha_{121}xz + 2\alpha_{022}z^2 + 2\alpha_{022}y^2 + 2\alpha_{112}xy + \\ & + 2\alpha_{202}x^2 + 3 \cdot 2\alpha_{013}yz + 3 \cdot 2\alpha_{103}xz + 4 \cdot 3\alpha_{004}z^2 = 0. \quad (8) \end{aligned}$$

Удовлетворяя (8) и действуя, как выше, получаем шесть уравнений связи:

$$\begin{aligned} (2\alpha_{220} + 4 \cdot 3\alpha_{040} + 2\alpha_{022})y^2 = 0 & \quad 2\alpha_{220} + 4 \cdot 3\alpha_{040} + 2\alpha_{022} = 0 \\ (3 \cdot 2\alpha_{310} + 3 \cdot 2\alpha_{130} + 2\alpha_{112})xy = 0 & \quad 3 \cdot 2\alpha_{310} + 3 \cdot 2\alpha_{130} + 2\alpha_{112} = 0 \\ (4 \cdot 3\alpha_{400} + 2\alpha_{220} + 2\alpha_{202})x^2 = 0 & \Rightarrow 4 \cdot 3\alpha_{400} + 2\alpha_{220} + 2\alpha_{202} = 0 \\ (2\alpha_{211} + 3 \cdot 2\alpha_{031} + 3 \cdot 2\alpha_{013})yz = 0 & \quad 2\alpha_{211} + 3 \cdot 2\alpha_{031} + 3 \cdot 2\alpha_{013} = 0 \\ (3 \cdot 2\alpha_{301} + 2\alpha_{121} + 3 \cdot 2\alpha_{103})xz = 0 & \quad 3 \cdot 2\alpha_{301} + 2\alpha_{121} + 3 \cdot 2\alpha_{103} = 0 \\ (2\alpha_{202} + 2\alpha_{022} + 4 \cdot 3\alpha_{004})z^2 = 0 & \quad 2\alpha_{202} + 2\alpha_{022} + 4 \cdot 3\alpha_{004} = 0. \end{aligned}$$

Поступаем, как и прежде, например, для $\nu = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_{040}^{(1)} \leftarrow 1 \Rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 1 + 2\alpha_{022}^{(1)} = 0 \\ 3 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 2\alpha_{112}^{(1)} = 0 \\ 4 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2\alpha_{202}^{(1)} = 0 \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2\alpha_{013}^{(1)} = 0 \\ 3 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2\alpha_{103}^{(1)} = 0 \\ 2 \cdot \alpha_{202}^{(1)} + 2\alpha_{022}^{(1)} + 4 \cdot 3\alpha_{004}^{(1)} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left(\begin{array}{cccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \cdot 3 \end{array} \right) \begin{pmatrix} \alpha_{022}^{(1)} \\ \alpha_{112}^{(1)} \\ \alpha_{202}^{(1)} \\ \alpha_{013}^{(1)} \\ \alpha_{103}^{(1)} \\ \alpha_{004}^{(1)} \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} -(2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 \cdot 1) \\ -(3 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0) \\ -(4 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0) \\ -(2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 0) \\ -(3 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_{022}^{(1)} &= -6 \\ \alpha_{112}^{(1)} &= 0 \\ \alpha_{202}^{(1)} &= 0 \\ \alpha_{013}^{(1)} &= 0 \\ \alpha_{103}^{(1)} &= 0 \\ \alpha_{004}^{(1)} &= 1. \end{aligned} \end{aligned}$$

Для этого случая получаем

$$P_{4,1} = y^4 - 6y^2z^2 + z^4$$

и далее аналогично — остальные восемь собственных полиномов:

$$\begin{aligned} P_{4,2} &= xy^3 - 3xyz^2, \\ P_{4,3} &= x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2 + 1/3z^4, \\ P_{4,4} &= x^3y - 3xyz^2, \\ P_{4,5} &= x^4 - 6x^2z^2 + z^4, \\ P_{4,6} &= y^3z - yz^3, \\ P_{4,7} &= xy^2z - 1/3xz^3, \\ P_{4,8} &= x^2yz - 1/3yz^3, \\ P_{4,9} &= x^3z - xz^3. \end{aligned}$$

$n = 5$

Собственные полиномы получаются аналогично предыдущему случаю. Выкладки ввиду их громоздкости опускаем. Приводим полиномы:

$$\begin{aligned} P_{5,1} &= y^5 - 10y^3z^2 + 5yz^4, \\ P_{5,2} &= xy^4 - 6xy^2z^2 + xz^4, \\ P_{5,3} &= x^2y^3 - y^3z^2 - 3x^2yz^2 + yz^4, \\ P_{5,4} &= x^3y^2 - 3xy^2z^2 - x^3z^2 + xz^4, \\ P_{5,5} &= x^4y - 6x^2yz^2 + yz^4, \\ P_{5,6} &= x^5 - 10x^3z^2 + 5xz^4, \\ P_{5,7} &= y^4z - 2y^2z^3 + 1/5z^5, \\ P_{5,8} &= xy^3z - xyz^3, \\ P_{5,9} &= x^2y^2z - 1/3y^2z^3 - 1/3x^2z^3 + 1/15z^5, \\ P_{5,10} &= x^3yz - xyz^3, \\ P_{5,11} &= x^4z - 2x^2z^3 + 1/5z^5. \end{aligned}$$

Приведем в табл. 2 состав необходимых далее производных от базисных полиномов.

Нетрудно аналитически показать, что если потенциал U поля представить просто суммой указанных базисных полиномов, то окажется, что $\nabla^2 U = 0$. Приспосабливая потенциал, составленный из базисных полиномов, к конкретному измеренному полю, представим его далее в виде

$$U = \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} P_{n,\nu}.$$

Таблица 2. Состав необходимых производных от базисных полиномов

n	ν	\mathbb{N}	$\frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial x}$	$\frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial y}$	$\frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial z}$
0	1	1	0	0	0
1	1	2	0	1	0
	2	3	1	0	0
	3	4	0	0	1
2	1	5	0	$2y$	$-2z$
	2	6	y	x	0
	3	7	$2x$	0	$-2z$
	4	8	0	z	y
	5	9	z	0	x
3	1	10	0	$3y^2 - 3z^2$	$-6yz$
	2	11	$y^2 - z^2$	$2xy$	$-2xz$
	3	12	$2xy$	$x^2 - z^2$	$-2yz$
	4	13	$3x^2 - 3z^2$	0	$-6xz$
	5	14	0	$2yz$	$y^2 - z^2$
	6	15	yz	xz	xy
	7	16	$2xz$	0	$x^2 - z^2$
4	1	17	0	$4y^3 - 12yz^2$	$-12y^2z + 4z^3$
	2	18	$y^3 - 3yz^2$	$3xy^2 - 3xz^2$	$-6xyz$
	3	19	$2xy^2 - 2xz^2$	$2x^2y - 2yz^2$	$-2y^2z - 2x^2z + 4/3z^3$
	4	20	$3x^2y - 3yz^2$	$x^3 - 3xz^2$	$-6xyz$
	5	21	$4x^3 - 12xz^2$	0	$-12x^2z + 4z^3$
	6	22	0	$3y^2z - z^3$	$y^3 - 3yz^2$
	7	23	$y^2z - 1/3z^3$	$2xyz$	$xy^2 - xz^2$
	8	24	$2xyz$	$x^2z - 1/3z^3$	$x^2y - yz^2$
	9	25	$3x^2z - z^3$	0	$x^3 - 3xz^2$
5	1	26	0	$5y^4 - 30y^2z^2 + 5z^4$	$-20y^3z + 20yz^3$
	2	27	$y^4 - 6y^2z^2 + z^4$	$4xy^3 - 12xyz^2$	$-12xy^2z + 4xz^3$
	3	28	$2xy^3 - 6xyz^2$	$3x^2y^2 - 3y^2z^2 - 3x^2z^2 + z^4$	$-2y^3z - 6x^2yz + 4yz^3$
	4	29	$3x^2y^2 - 3y^2z^2 - 3x^2z^2 + z^4$	$3x^3y - 6xyz^2$	$-6xy^2z - 2x^3z + 4xz^3$
	5	30	$4x^3y - 12xyz^2$	$x^4 - 6x^2z^2 + z^4$	$-12x^2yz + 4yz^3$
	6	31	$5x^4 - 30x^2z^2 + 5z^4$	0	$-20x^3z + 20xz^3$
	7	32	0	$4y^3z - 4yz^3$	$y^4 - 6y^2z^2 + z^4$
	8	33	$y^3z - yz^3$	$3xy^2z - xz^3$	$xy^3 - 3xyz^2$
	9	34	$2xy^2z - 2/3xz^3$	$2x^2yz - 2/3yz^3$	$x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2 + 1/3z^4$
	10	35	$3x^2yz - yz^3$	$x^3z - xz^3$	$x^3y - 3xyz^2$
	11	36	$4x^3z - 4xz^3$	0	$x^4 - 6x^2z^2 + z^4$

Точно так же нетрудно аналитически показать, что и в этом случае $\nabla^2 U = 0$.

Теперь поле \mathbf{B} будем отыскивать в виде

$$\mathbf{B} = \nabla U = \sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} (\beta_{n,\nu} \nabla P_{n,\nu}). \quad (9)$$

Перепишем минимизируемую сумму S к виду с явной зависимостью от базисных полиномов (точнее, от их производных):

$$S = \sum_{m=1}^M \left[\left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial x_m} - \tilde{B}_{x_m} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial y_m} - \tilde{B}_{y_m} \right)^2 + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial z_m} - \tilde{B}_{z_m} \right)^2 \right].$$

Тогда линейная система, минимизирующая S , представляется в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \beta_{0,1}} &= \sum_{m=1}^M \left[\left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial x_m} - \tilde{B}_{x_m} \right) \frac{\partial P_{0,1}}{\partial x_m} + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial y_m} - \tilde{B}_{y_m} \right) \frac{\partial P_{0,1}}{\partial y_m} + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial z_m} - \tilde{B}_{z_m} \right) \frac{\partial P_{0,1}}{\partial z_m} \right] = 0, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \beta_{1,1}} &= \sum_{m=1}^M \left[\left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial x_m} - \tilde{B}_{x_m} \right) \frac{\partial P_{1,1}}{\partial x_m} + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial y_m} - \tilde{B}_{y_m} \right) \frac{\partial P_{1,1}}{\partial y_m} + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial z_m} - \tilde{B}_{z_m} \right) \frac{\partial P_{1,1}}{\partial z_m} \right] = 0, \\ \dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial \beta_{5,11}} &= \sum_{m=1}^M \left[\left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial x_m} - \tilde{B}_{x_m} \right) \frac{\partial P_{N,2N+1}}{\partial x_m} + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial y_m} - \tilde{B}_{y_m} \right) \frac{\partial P_{N,2N+1}}{\partial y_m} + \left(\sum_{n=0}^N \sum_{\nu=1}^{2n+1} \beta_{n,\nu} \frac{\partial P_{n,\nu}}{\partial z_m} - \tilde{B}_{z_m} \right) \frac{\partial P_{N,2N+1}}{\partial z_m} \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Число уравнений системы определяется суммой (4) соответствующих базисных полиномов

$$n_B(N) = (N+1)^2$$

(для $N=5$ получается $n_s = 36$).

Избавляясь (для упрощения выкладок) от двойных сумм, введем переобозначения (табл. 3).

Таблица 3. Переобозначения

$\beta_{0,1} \rightarrow a_0$	$P_{0,1} \rightarrow P_0$
$\beta_{1,1} \rightarrow a_1$	$P_{1,1} \rightarrow P_1$
$\beta_{1,2} \rightarrow a_2$	$P_{1,2} \rightarrow P_2$
$\beta_{1,3} \rightarrow a_3$	$P_{1,3} \rightarrow P_3$
.....
$\beta_{5,11} \rightarrow a_{n_B-1}$	$P_{5,11} \rightarrow P_{n_B-1}$

Перепишем после этого систему в виде с явной правой частью:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{m=1}^M \left[\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial z_m} \right] &= \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \tilde{B}_{x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \tilde{B}_{y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \tilde{B}_{z_m} \right), \\ \sum_{m=1}^M \left[\frac{\partial P_1}{\partial x_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial x_m} + \frac{\partial P_1}{\partial y_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial y_m} + \frac{\partial P_1}{\partial z_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial z_m} \right] &= \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_m} \tilde{B}_{x_m} + \frac{\partial P_1}{\partial y_m} \tilde{B}_{y_m} + \frac{\partial P_1}{\partial z_m} \tilde{B}_{z_m} \right), \\ \dots \\ \sum_{m=1}^M \left[\frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial x_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial y_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \sum_{i=0}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial z_m} \right] &= \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} \tilde{B}_{x_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} \tilde{B}_{y_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \tilde{B}_{z_m} \right). \end{aligned} \right.$$

Раскрывая первую, например, строку в первом уравнении, получим

$$\begin{aligned} \sum_m \left[\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \left(a_0 \frac{\partial P_0}{\partial x_m} + a_1 \frac{\partial P_1}{\partial x_m} + \dots + a_{n_B-1} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \left(a_0 \frac{\partial P_0}{\partial y_m} + a_1 \frac{\partial P_1}{\partial y_m} + \dots + a_{n_B-1} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \left(a_0 \frac{\partial P_0}{\partial z_m} + a_1 \frac{\partial P_1}{\partial z_m} + \dots + a_{n_B-1} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \right) \right]. \end{aligned}$$

Строка перегруппировывается:

$$\begin{aligned} a_0 \sum_m \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \frac{\partial P_0}{\partial x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \frac{\partial P_0}{\partial y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \right) + \\ + a_1 \sum_m \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \frac{\partial P_1}{\partial x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \frac{\partial P_1}{\partial y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \frac{\partial P_1}{\partial z_m} \right) + \dots + \\ + a_{n_B-1} \sum_m \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \right), \end{aligned}$$

и в таком виде из нее легко просматривается вся линейная система относительно неизвестных a_i :

$$\begin{pmatrix} \sum_m \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \frac{\partial P_0}{\partial x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \frac{\partial P_0}{\partial y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \right) & \left| \sum_m \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \right) \right. \\ \sum_m \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_m} \frac{\partial P_0}{\partial x_m} + \frac{\partial P_1}{\partial y_m} \frac{\partial P_0}{\partial y_m} + \frac{\partial P_1}{\partial z_m} \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \right) & \left| \sum_m \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} + \frac{\partial P_1}{\partial y_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial P_1}{\partial z_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \right) \right. \\ \hline \sum_m \left(\frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} \frac{\partial P_0}{\partial x_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} \frac{\partial P_0}{\partial y_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \right) & \left| \sum_m \left(\frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \right) \right. \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n_B-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_m \left(\frac{\partial P_0}{\partial x_m} \tilde{B}_{x_m} + \frac{\partial P_0}{\partial y_m} \tilde{B}_{y_m} + \frac{\partial P_0}{\partial z_m} \tilde{B}_{z_m} \right) \\ \sum_m \left(\frac{\partial P_1}{\partial x_m} \tilde{B}_{x_m} + \frac{\partial P_1}{\partial y_m} \tilde{B}_{y_m} + \frac{\partial P_1}{\partial z_m} \tilde{B}_{z_m} \right) \\ \hline \sum_m \left(\frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial x_m} \tilde{B}_{x_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial y_m} \tilde{B}_{y_m} + \frac{\partial P_{n_B-1}}{\partial z_m} \tilde{B}_{z_m} \right) \end{pmatrix}.$$

Введя дополнительно символический вектор $\nabla_m \mathbf{P}_i = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_m}, \frac{\partial P_i}{\partial y_m}, \frac{\partial P_i}{\partial z_m} \right)$, $i = \overline{1, n_B - 1}$, и векторы $\mathbf{B}_m = (\tilde{B}_{x_m}, \tilde{B}_{y_m}, \tilde{B}_{z_m})$, $m = \overline{1, M}$, и $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{n_B-1})$, где i — номер строки, j — номер столбца, представим систему компактно:

$$\left\{ \sum_m (\nabla_m \mathbf{P}_i \times \nabla_m \mathbf{P}_j) \right\} \mathbf{a} = \sum_m (\nabla_m \mathbf{P}_i \times \tilde{\mathbf{B}}_m), \quad (10)$$

$$i = \overline{0, n_B - 1}, \quad j = \overline{0, n_B - 1}.$$

Учтем еще (хотя это необязательно), что $P_0 = P_{0,1} = 1$, откуда сразу следует (см. табл. 2), что $a_0 = \beta_{0,1} = 0$, и тогда уменьшим на единицу порядок линейной системы, удалив из нее первую строку и первый столбец, относящиеся к нахождению a_0 .

Тогда, учитывая (9) и введенные в табл. 3 переобозначения, после решения линейной системы (10) и нахождения коэффициентов a_i по формулам

$$B_x(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial x} \Big|_{(x,y,z)},$$

$$B_y(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial y} \Big|_{(x,y,z)},$$

$$B_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_B-1} a_i \frac{\partial P_i}{\partial z} \Big|_{(x,y,z)}$$

можно вычислять компоненты поля (B_x, B_y, B_z) для произвольной точки (x, y, z) .

Для ускорения вычислений разумно в каждой из указанных сумм предварительно аналитически выполнить приведение подобных членов (мономов) и в каждом из трех случаев расставить приведенные члены

в одном и том же порядке. Порядок может быть, например, такой же, как расположен весь комплект монономов R^{ijk} в п. 3 (для $n = 0, \dots, N$). Тогда при соответствующих мономомах (располагающихся в том же порядке) будут получены коэффициенты C_{XL}^{ijk} , C_{YL}^{ijl} , C_{ZL}^{ijk} (являющиеся линейными комбинациями из различных a_i). В этих обозначениях $i + j + k = n$, $n = 0, \dots, N$, а полное количество n_C каждого из коэффициентов C_{XL}^{ijk} , C_{YL}^{ijl} , C_{ZL}^{ijk} равно сумме (3) числа монономов степеней от 0 до $N - 1$ включительно (см. п. 3):

$$n_C = n_M(N) = \frac{(N + 1)(N + 2)(N + 3)}{6},$$

причем для выбранного $N = 5$ оказывается, что $n_C = 35$ (во избежание недоразумений отметим, что имеет место совпадение $n_C = n_B - 1 = 35$).

Измеренные компоненты поля $(\tilde{B}_{x_m}, \tilde{B}_{y_m}, \tilde{B}_{z_m})$, $m = 1, \dots, M$, могут быть получены, например, из внешнего файла [2]. После выполнения всех вышеописанных вычислений полученный набор коэффициентов C_{XL}^{ijk} , C_{YL}^{ijl} , C_{ZL}^{ijk} , $L = 0, \dots, n_C$, становится фактически описанием магнитного поля для данного прибора. Коэффициенты могут быть сохранены в другом внешнем файле. В данной работе описание поля в виде коэффициентов C_{XL}^{ijk} , C_{YL}^{ijl} , C_{ZL}^{ijk} , $L = 0, \dots, n_C$, считывается из подобного файла. После этого при «рабочем вычислении» компонентов поля в точке (x, y, z) сначала рассчитываются значения всех монономов R_L^{ijk} в этой точке, а затем проводится суммирование:

$$\begin{aligned} B_x(x, y, z) &= \sum_{L=1}^{n_C} \left[C_{XL}^{ijk} R_L^{ijk}(x, y, z) \right], \\ B_y(x, y, z) &= \sum_{L=1}^{n_C} \left[C_{YL}^{ijl} R_L^{ijk}(x, y, z) \right], \\ B_z(x, y, z) &= \sum_{L=1}^{n_C} \left[C_{ZL}^{ijk} R_L^{ijk}(x, y, z) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Все вышеописанное применимо в случаях, когда магнитное поле стационарное и безвихревое. Перейдем к применению аппроксимации для конкретного случая.

4. ПРИВЯЗКА АППРОКСИМАЦИИ К СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЫ

Измерение поля было выполнено в фиксированных точках камеры, которые составляли трехмерную решетку с равномерными шагами Δx , Δy , Δz по каждой координате с числом узлов $20 \times 9 \times 9$ соответственно по x, y, z . Полное число точек M , в которых проводились измерения, очевидно равно 1620. Номера узлов решетки $i_x = 1, \dots, 20$, $i_y = 1, \dots, 9$, $i_z = 1, \dots, 9$, понимаемые как вещественные числа, как раз и определяют координатную систему (x, y, z) , с которой велась аппроксимация поля в предшествующих

пунктах. Причем с целью уменьшения арифметических погрешностей при вычислениях за начало координат этой системы в величинах $i-j-k$ установлена некоторая «внутренняя» точка $(n_{x_R}, n_{y_R}, n_{z_R})$, имеющая вещественные (нецелые) координаты. Поэтому при решении линейной системы (10) для нахождения координат x, y, z в векторах $\nabla_m \mathbf{P}_i = \left(\frac{\partial P_i}{\partial x_m}, \frac{\partial P_i}{\partial y_m}, \frac{\partial P_i}{\partial z_m} \right)$, $i = \overline{1, n_B - 1}$, используются преобразования $x = i_x - n_{x_R}$, $y = i_y - n_{y_R}$ и $z = i_z - n_{z_R}$.

Дополнительно известны вещественные (нецелые) координаты $(n_{x_E}, n_{y_E}, n_{z_E})$ точки, совпадающей с положением заданной трехмерной точки (X_E, Y_E, Z_E) в декартовой системе пузырьковой камеры. Оси координат систем (x, y, z) и (X, Y, Z) параллельны. Отсюда имеем соответствующие формулы перехода от произвольной точки (X, Y, Z) к координатам (x, y, z) :

$$\begin{aligned} x &= ((X - X_E)/\Delta x + n_{x_E}) - n_{x_R}, \\ y &= ((Y - Y_E)/\Delta y + n_{y_E}) - n_{y_R}, \\ z &= ((Z - Z_E)/\Delta z + n_{z_E}) - n_{z_R}, \end{aligned}$$

для которых приведены значения (в сантиметрах) используемых констант (индекс k пробегает символические значения X, Y, Z) в табл. 4.

Таблица 4. Константы привязки

	n_{k_E}	n_{k_R}	k_E	Δ_k
x	7,2	8,5	$\frac{X_1+X_3}{2} + \frac{\delta X}{2}$	5,0
y	5,2	5,5	$\frac{Y_1+Y_2}{2}$	5,0
z	2,0	5,0	0	5,0

Полученные величины x, y, z подставляются в формулы (11).

Величины X_1, X_3, Y_1 и Y_2 есть координаты осей соответствующих объективов в камере, их значения оперативно считываются из соответствующей базы данных. Смещение $\delta X = 18$ см есть следствие переустановки камеры после измерения поля с поворотом на 180° по отношению к первоначальной.

5. ОСОБЕННОСТИ ПОЛЯ 1-М КАМЕРЫ

В некоторых точках камеры из-за ее конструктивных особенностей поле не могло быть измерено и было вычислено линейной интерполяцией. Такие точки известны, и при вводе из внешнего файла они игнорировались.

Также было обнаружено, что компонента \tilde{B}_y поля измерена с некоторой закономерной ошибкой (предположительно, имелся чрезмерный прогиб балки измерительного устройства), поэтому компонента \tilde{B}_y в сумму квадратов линейных МНК-уравнений (10) не была включена. При этом, чтобы система осталась разрешимой, элементу матрицы $\sum_m (\nabla_m \mathbf{P}_1 \times \nabla_m \mathbf{P}_1)$ было присвоено значение 1.

Общий результат аппроксимации поля был проконтролирован следующим образом. Для каждой компоненты поля (индекс k пробегает значения символов x, y, z) вычислялись суммы

$$S_k^{(1)} = \sum_m (B_k(x_m, y_m, z_m) - \tilde{B}_k(x_m, y_m, z_m)),$$

$$S_k^{(2)} = \sum_m (B_k(x_m, y_m, z_m) - \tilde{B}_k(x_m, y_m, z_m))^2.$$

Качество аппроксимации d_k определялось средним отклонением (в гаусах) вычисленного поля от измеренного и соответствующей дисперсией

$$d_k = \frac{S_k^{(1)}}{M} \pm \sqrt{\frac{S_k^{(2)}}{M} - \left(\frac{S_k^{(1)}}{M}\right)^2},$$

а именно

$$\begin{aligned} d_x &= 0,00000000 \pm 14,4555, \\ d_y &= -139,20670733 \pm 58,7722, \\ d_z &= 0,00000000 \pm 14,6224. \end{aligned}$$

После этого, поскольку y -компонента поля была выведена из уравнения (10), выполнено присвоение $C_{Y1}^{ijk} \leftarrow d_y$.

Приводим результирующие значения коэффициентов C_{XL}^{ijk} , C_{YL}^{ijl} , C_{ZL}^{ijk} , $L = 0, \dots, n_C$, как описание поля для 1-м камеры (для компактности их значения округлены):

C_X^{ijk}

-111.875	-0.250	-57.420	5.911	0.934	0.260	-0.561
-0.058	3.896	-0.374	0.002	0.595	0.052	-0.016
-0.238	0.040	-0.080	-0.058	-0.545	0.106	0.004
0.009	-0.008	-0.005	0.013	-0.007	-0.077	-0.005
-0.022	-0.014	-0.010	-0.068	0.008	0.047	0.014

C_Y^{ijk}

-139.207	-176.438	-0.250	6.785	-0.028	1.869	0.130
5.906	-0.058	-0.102	1.151	0.007	0.595	0.017
-0.107	-0.476	0.020	-4.047	-0.058	0.029	-0.001
0.015	0.013	-0.006	-0.001	-0.457	-0.020	-0.077
-0.002	-0.005	-0.028	-0.005	0.483	0.008	0.002

C_Z^{ijk}

18938.885	6.785	5.911	233.858	2.953	-0.058	1.948
-0.205	-0.747	-4.901	-0.036	-0.238	0.020	-0.027
-4.047	-0.116	-0.545	0.087	0.318	1.531	-0.114
-0.007	-0.038	-0.002	-0.005	-0.003	-0.028	-0.010
-0.045	0.724	0.024	0.071	0.007	0.055	-0.132

И, наконец, частично приведем графическое изображение срезов поля пузырьковой камеры как исходного (измеренного) в виде точек, так и его аппроксимации в виде линий.

Графики срезов компонент поля B_x , B_y , B_z (рис. 1) строятся относительно координаты z по одной компоненте на каждом рисунке как функ-

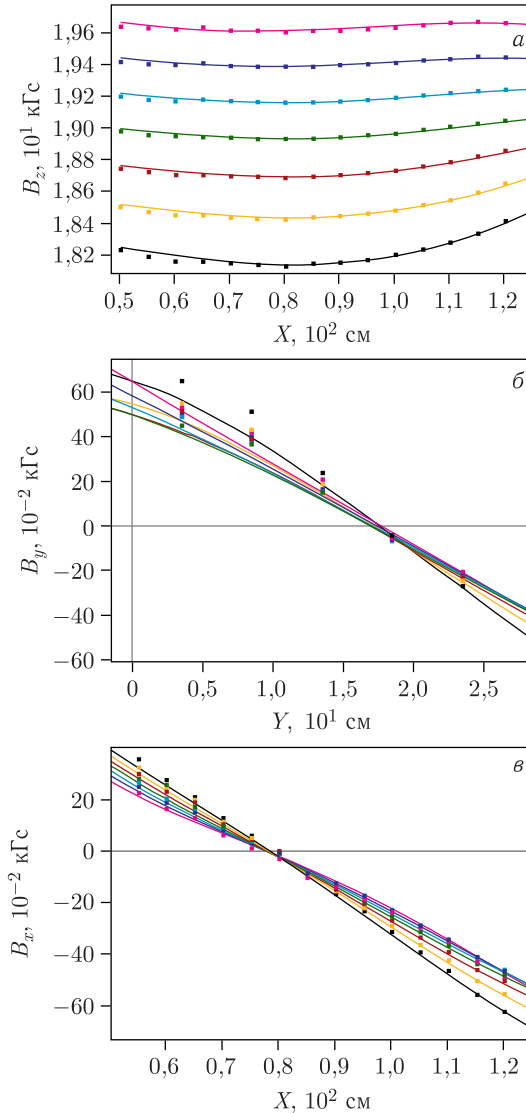


Рис. 1. Срезы компонент B_z (а), B_y (б) и B_x (в)

ции x (и тогда берется узел измерительной решетки $i_y = 5$) или y ($i_x = 10$). Координата z рассматривается как параметр и во всех случаях i_z пробегает диапазон $2, \dots, 8$.

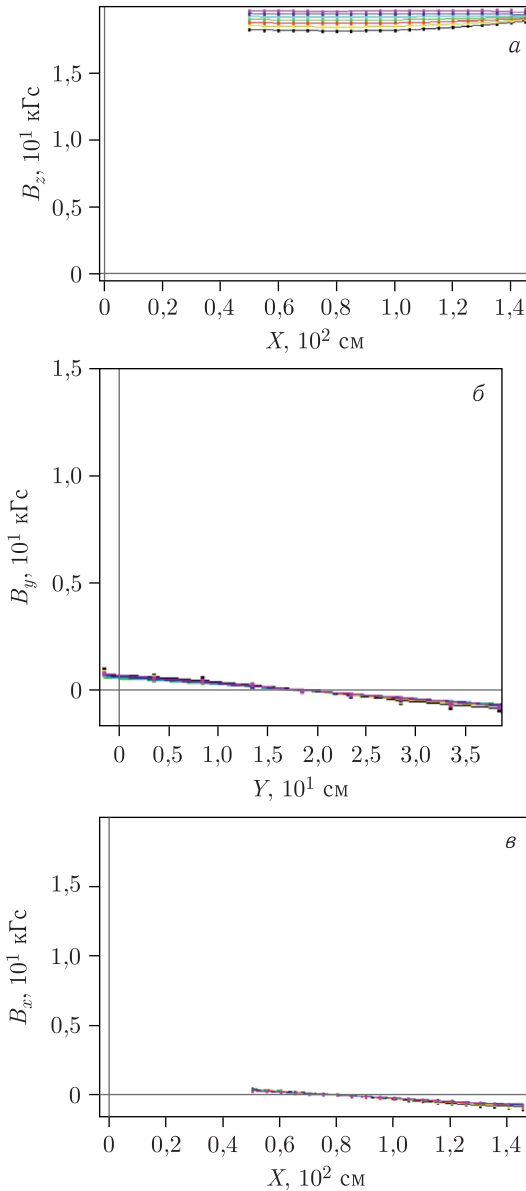


Рис. 2. Срезы компонент B_z (а), B_y (б) и B_x (в) в сопоставимом масштабе

Приведем (рис. 2) те же графики срезов компонент поля B_x , B_y , B_z примерно в одном масштабе.

Магнитное поле в камере близко к однородному, что и видно из рис. 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе описана процедура полиномиальной аппроксимации магнитного поля 1-м пузырьковой камеры ОИЯИ [1], использованной ранее в программе «1–6» [5], ныне включенная в программу VisualMetro в качестве компоненты восстановленной обработки фильмовой информации [6].

Методика построения полиномиальной аппроксимации магнитного поля может быть применена и в других трековых детекторах со стационарным безвихревым полем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belonogov A. V. et al.* A Liquid Hydrogen Bubble Chamber of Volume $950 \times 350 \times 300 \text{ mm}^3$ // Nucl. Instr. Meth. 1963. V. 20. P. 114–115.
2. *Глаголев В. В., Емельяненко В. Н., Лебедев Р. М., Саитов И. С.* Магнитное поле 100-сантиметровой водородной пузырьковой камеры. Сообщ. ОИЯИ 13-5930. Дубна, 1971.
3. *Садовничий Ю. В., Федорчук В. В.* Аналитическая геометрия. М., 2009.
4. *Логонов В. Н., Широкова З. В.* Линейная алгебра. Комсомольск-на-Амуре: КНАГТУ, 2015.
5. *Маркова Н. Ф., Мороз В. И., Никитина В. И., Стельмах А. П., Тентюкова Г. Н.* Программа геометрической реконструкции для больших пузырьковых камер (вариант «1–6»). Препринт ОИЯИ Р10-3768. Дубна, 1968.
6. *Балдин А. А., Беляев А. В., Белобородов А. В., Рихвицкий В. С., Троян А. Ю.* Восстановление программно-аппаратного комплекса обработки фильмовой информации (ОФИ) для пузырьковых камер. Сообщ. ОИЯИ Р10-2023-18. Дубна, 2023.

Получено 11 мая 2023 г.

Редактор *Е. В. Григорьева*

Подписано в печать 25.07.2023.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,19. Тираж 105 экз. Заказ № 60705.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/