P5-2023-54

Р. М. Ямалеев

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ КИНЕМАТИКИ

Ямалеев Р. М. Р5-2023-54

Эволюционные уравнения обобщенной кинематики

Путь, пройденный ускоренно движущимся телом с постоянным ускорением, как функция времени описывается полиномом второй степени. Развивается обобщенная кинематика, где эволюция пути, скорости, ускорения и т. д. определяются полиномами от времени высших степеней. Полученная система эволюционных уравнений имеет треугольную форму, образует последовательность полиномов Аппеля и допускает матричное представление с помощью матриц Паскаля. На основе математического формализма, развитого по отношению к обобщенной теории ускорений, предложен алгоритм построения системы эволюционных уравнений для кинетических энергий расширенной классической механики. Показано, что релятивистская механика и расширения классической механики естественным образом входят в рамки предлагаемого математического аппарата.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий им. М. Г. Мещерякова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2023

Yamaleev R. M. P5-2023-54

Evolution Equations of Higher Order Kinematics

The path length traveled by an accelerated body with constant acceleration is described by the polynomial of second degree in time. In this work, we develop a generalized kinematics, where the distance, velocity, acceleration and higher order accelerations are determined by the higher degree polynomials. The evolution equations derived in this scheme are cast into the triangular-like systems and form the Appell sequences of polynomials admitting the Pascal-matrix representation. By making use of the mathematical tool developed with respect to the higher order kinematics, the evolution equations for the extended classical mechanics are derived. It is shown that the relativistic mechanics and extensions of the classical mechanics are naturally cast into the frames of the elaborated mathematical tool.

The investigation has been performed at the Meshcheryakov Laboratory of Information Technology, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2023

1. УРОВНИ УСКОРЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Главный постулат ускоренного прямолинейного движения, который позволяет развивать математический формализм, состоит в том, что пройденный путь ускоренного движения описывается функцией от времени, заданной в виде полинома конечной степени [1, 2].

При равноускоренном движении длина пройденного пути определяется квадратичным полиномом

$$S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v(t_0)t + S(t_0). \tag{1}$$

Путь, определяемый квадратичным полиномом (1), можно представить как произведение смещений двух величин:

$$S(t) = \frac{a}{2}(t + t_1)(t + t_2), \tag{2}$$

где t_1, t_2 определяются начальными данными согласно формулам

$$S(t_0) = \frac{a}{2}t_1t_2, \quad v(t_0) = \frac{a}{2}(t_1 + t_2). \tag{3}$$

Таким образом, при равноускоренном движении происходит смещение по времени от начальных данных, как и в случае инерциального движения, однако в случае равноускоренного движения одновременной трансляции подвергаются сразу два начальных значения времени. Соответственно, получаем два уравнения эволюции — для пути и для скорости. С целью выявить некую закономерность рассмотрим пример, когда пройденный путь определяется полиномом третьей степени:

$$S(t) = \frac{j}{6}t^3 + \frac{1}{2}a(t_0)t^2 + v(t_0)t + S(t_0). \tag{4}$$

Коэффициент при старшей степени, или «рывок», — заданная постоянная величина. Это уравнение зависит от трех начальных данных, которые меняются в процессе движения. Уравнение (4) также можно рассматривать как смещение по времени от начальных данных, только в данном случае трансляции подвергаются сразу три значения времени, определяемые тремя начальными данными:

$$S(t) = \frac{j}{6}(t_1 + t)(t_2 + t)(t_3 + t).$$

К уравнению (4) необходимо добавить еще два уравнения, описывающие изменения коэффициентов. Они имеют вид

$$v(t) = \frac{j}{2}t^2 + a(t_0)t + v(t_0), \tag{5}$$

$$a(t) = jt + a(t_0). \tag{6}$$

Система из трех уравнений (4)–(6) описывает эволюцию трех начальных данных: длины пути, скорости и ускорения.

Дальнейшее обобщение данной схемы очевидно. Например, для четвертого порядка имеем следующую систему уравнений:

$$S(t) = \frac{1}{24}yt^4 + \frac{1}{6}j(t_0)t^3 + \frac{1}{2}a(t_0)t^2 + v(t_0)t + S(t_0), \tag{7}$$

$$v(t) = \frac{1}{6}yt^3 + \frac{1}{2}j(t_0)t^2 + a(t_0)t + v(t_0), \tag{8}$$

$$a(t) = \frac{1}{2}yt^2 + j(t_0)t + a(t_0), \tag{9}$$

$$j(t) = yt + j(t_0). \tag{10}$$

Приведенные системы уравнений допускают весьма удобное матричное представление.

Матричное представление этой системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} j \\ a(t_0+\tau) \\ v(t_0+\tau) \\ S(t_0+\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \tau & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\tau^2 & \tau & 1 & 0 \\ \frac{1}{6}\tau^3 & \frac{1}{2}\tau^2 & \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ a(t_0) \\ v(t_0) \\ S(t_0) \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Другая форма этого преобразования может быть задана с помощью дифференциального оператора трансляции Эйлера, действующего на столбец из коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} j \\ a(t_0+\tau) \\ v(t_0+\tau) \\ S(t_0+\tau) \end{pmatrix} = \exp\left(\tau\frac{d}{dt_0}\right) \begin{pmatrix} j \\ a(t_0) \\ v(t_0) \\ S(t_0) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

При сравнении уравнений (11) и (12) видно, что дифференциальный оператор может быть заменен на конечномерную матрицу. С целью более компактного представления определим следующую нильпотентную матрицу:

$$T^{\mathrm{sub}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

и определим вектор-столбец

$$[S(a_k(t))] = \begin{pmatrix} j \\ a(t) \\ v(t) \\ S(t) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В этих обозначениях матричные уравнения сведутся в одно уравнение:

$$[S(a_k(t+\tau))] = \exp\left(\tau T^{\mathrm{sub}}\right)[S(a_k(t))]. \tag{15}$$

2. ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА ПОЛИНОМОВ УСКОРЕНИЯ

Чтобы от начальных значений для пути и его производных по времени (скорости, ускорения, рывка и т. д.) перейти к инвариантным переменным, необходимо перевести полиномы к так называемому *нормальному* виду.

Как известно [3], таким способом в полиномах степени n избавляются от монома степени $(n-1)$. В нашем случае в результате такого преобразования получим более простую систему уравнений с инвариантными коэффициентами. Ради наглядности рассмотрим наиболее простой пример полинома второй степени:

$$\begin{aligned} &p_2(t) = t^2 + 2p_1(t_0)t + p_2(t_0), \\ &p_1(t) = t + p_1(t_0), \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$p_2(t_0) = \frac{2}{a}S(t_0), \quad p_1(t_0) = \frac{v(t_0)}{a}.$$

Переопределим полином (16), используя уравнение $p_1(t) - p_1(t_0) = t$.

В результате получим более простую систему уравнений

$$\begin{aligned} &p_1 = p, \\ &p_2 = p^2 + r_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Инвариант r_2 определяется по формуле

$$r_2 = p_2(t_0) - p_1^2(t_0) = p_2(t) - p_1^2(t).$$

Восстанавливая прежние обозначения, получим связь расстояния со скоростью

$$\frac{2}{a}\,S(t) = \frac{v^2}{a^2} + r_2, \tag{18}$$

где инвариант r_2 определяется разностью между корнями квадратичного полинома
$$r_2 = -\frac{1}{4}(t_1 - t_2)^2 = -T^2. \tag{19}$$
Следует отметить, что если корни квадратичного уравнения различны и вещественны, то инвариант r_2 строго отрицателен. Конечная формула для пути выглядит так:
$$S(t) = \frac{v^2(t)}{2a} - \frac{a}{2}T^2. \tag{20}$$

Аналогичные преобразования проделаем с полиномом третьей степени. Сначала переопределим коэффициенты полинома (4):
$$p_3(t) = \frac{6}{j}S(t),\ p_2 = \frac{2}{j}v(t), \quad p_1 = \frac{1}{j}(t).$$
В этих обозначениях система (4)–(6) примет вид
$$\begin{aligned} &p_3(t) = t^3 + 3p_1(t_0)t^2 + 3p_2(t_0)t + p_3(t_0),\\ &p_2(t) = t^2 + 2p_1(t_0)t + p_2(t_0),\\ &p_1(t) = t + p_1(t_0). \end{aligned} \tag{21}$$
Перепишем эти уравнения через матрицу Паскаля:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ t^2 & 2t & 1 & 0 \\ t^3 & 3t^2 & 3t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_1(t_0) \\ p_2(t_0) \\ p_3(t_0) \end{pmatrix}. \tag{22}$$
Вводя нильпотентную матрицу [4, 5]
$$A^{\mathrm{sub}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$
представим матричное уравнение (22) в компактной форме:
$$[p^{(k)}(t + t_0)] = \exp{(tA^{\mathrm{sub}})}[p^{(k)}(t_0)]. \tag{23}$$
Переходим к нормальному представлению полинома с помощью уравнения
$$t = p_1(t) - p_1(t_0). \tag{24}$$
В результате получим уравнение
$$[p^{(k)}(p_1(t) - p_1(t_9))] = \exp{(p_1(t)A^{\mathrm{sub}})}\exp{(-p_1(t_0)A^{\mathrm{sub}})}[p^{(k)}(t_0)], \tag{25}$$
или
$$\exp{(-p_1(t)A^{\mathrm{sub}})}[p^{(k)}(t)] = \exp{(-p_1(t_0)A^{\mathrm{sub}})}[p^{(k)}(t_0)]. \tag{26}$$

Отсюда следует, что вектор

$$\exp\left(-p_1(t)A^{\mathrm{sub}}\right)[p^{(k)}(t)] = [R(r^{(k)})] \tag{27}$$

инвариантен по отношению к смещению времени.

В первоначальных обозначениях формула (27) выглядит так:

$$[R(r^{(k)})] = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a}{j} & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{a^2}{j^2} & -2\dfrac{a}{j} & 1 & 0 \\ -\dfrac{a^3}{j^3} & 3\dfrac{a^2}{j^2} & -3\dfrac{a}{j} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{a}{j} \\ \dfrac{2v}{j} \\ \dfrac{6S}{j} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

что сводится к трем уравнениям, определяющим инвариантные коэффициенты

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{a^2}{j^2} + \frac{2v}{j}, \quad r_3 = \frac{2a^3}{j^3} - 6\frac{a}{j^2}v + \frac{6S}{j}. \tag{29}$$

Отметим, что инвариант r_2 в данном случае также зависит от разностей корней и имеет следующий явный вид:

$$r_2 = -\frac{1}{36}((t_1 - t_2)^2 + (t_2 - t_3)^2 + (t_3 - t_1)^2). \tag{30}$$

Общая формула инварианта для полинома степени n и выводится по индукции:

$$r_2 = -\frac{1}{(n!)^2} \sum_{i \neq j}^{n} (t_i - t_j)^2. \tag{31}$$

Из (29) находим связь расстояния с ускорением:

$$S = \frac{1}{6j^2}\,a^3 + \frac{1}{2}\,r_2\,a + \frac{j}{6}\,r_3. \tag{32}$$

Таким образом, мы приходим к системе формул, где коэффициенты исходного полинома выражаются через первый коэффициент исходного полинома и инварианты:

$$\begin{aligned} p_1 &= p, \\ p_2 &= p^2 + r_2, \\ p_3 &= p^3 + 3pr_2 + r_3. \end{aligned} \tag{33}$$

Эта система уравнений принадлежит последовательности полиномов Аппеля, где полиномы низшего порядка получаются как производные от более высоких степеней, а именно

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dp}p_3 = 3p_2,\\
&\frac{d}{dp}p_2 = 2p_1,\\
&\frac{d}{dp}p_1 = 1.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

3. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ. СРАВНЕНИЕ С ПОЛИНОМАМИ ЭРМИТА

В наиболее общем случае зависимость расстояния от времени определяется в виде усеченного ряда Тейлора аналитической функции:

$$
f(t) = \frac{f^{(n)}}{n!}\,t^n + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}\,t^{n-1} + \frac{f^{(n-2)}}{(n-2)!}\,t^{n-2} + \ldots + f(t_0). \tag{35}
$$

Зависимость коэффициентов от времени задается системой уравнений

$$
f^{(1)}(t) = \frac{f^{(n)}(t_0)}{(n-1)!}t^{n-1} + \frac{f^{(n-1)}(t_0)}{(n-2)!}t^{n-2} + \frac{f^{(n-2)}(t_0)}{(n-3)!}t^{n-3} + \ldots + f^{(1)}(t_0),
$$

$$
\begin{aligned}
f^{(k)}(t) = \frac{f^{(n)}(t_0)}{(n-k)!}t^{n-k} + \frac{f^{(n-1)}(t_0)}{(n-k-1)!}t^{n-k-1} + {}&\\
+ \frac{f^{(n-2)}(t_0)}{(n-k-2)!}t^{n-k-2} + \ldots + f^{(k)}(t_0),&
\end{aligned}
\tag{36}
$$

$$
f^{(n-2)}(t) = \frac{f^{(n)}(t_0)}{2}t^2 + \frac{f^{(n-1)}(t_0)}{1}t + f^{(n-2)}(t_0),
$$

$$
f^{(n-1)}(t) = f^{(n)}(t_0)t + f^{(n-1)}(t_0). \tag{37}
$$

После переопределения коэффициентов по правилам

$$
p_k(t) = k!\,\frac{f^{(k)}(t)}{f^{(n)}},\ \ k = 1, 2, 3, \ldots, n, \tag{38}
$$

приходим к системе полиномов, удовлетворяющих правилу Аппеля:

$$\begin{aligned}
p_n(t) &= t^n + C_n^1 p_1(t_0) t^{n-1} + C_n^2 p_2(t_0) t^{n-2} + \ldots + p_n(t_0),\\
p_{n-1}(t) &= t^{n-1} + C_{n-1}^1 p_1(t_0) t^{n-2} + C_{n-2}^2 p_2(t_0) t^{n-3} + \ldots + p_{n-1}(t_0),\\
p_{n-2}(t) &= t^{n-2} + C_{n-2}^1 p_1(t_0) t^{n-3} + C_{n-3}^2 p_2(t_0) t^{n-4} + \ldots + p_{n-2}(t_0),\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\\
p_{n-k}(t) &= t^{n-k} + C_{n-k}^1 p_1(t_0) t^{n-k-1} +\\
&\qquad + C_{n-k-1}^2 p_2(t_0) t^{n-k-2} + \ldots + p_{n-k}(t_0),\\
&\ldots\ \ldots\ \ldots\\
p_1(t) &= t + p_1(t_0).
\end{aligned} \tag{39}$$

Определим конечномерную нильпотентную матрицу с ненулевыми элементами под диагональю

$$A^{\text{sub}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & . & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & . & 0 & 0 & 0\\ . & . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & 0 & . & n-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & n & 0 \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Матрица Паскаля определяется как экспонента от матрицы A^{sub}: $\exp\left(tA^{\text{sub}}\right)$. В матричном представлении система уравнений (39) примет вид

$$[\Pi(t+t_0)] = \exp\left(tA^{\text{sub}}\right)[\Pi(t_0)],$$

где

$$[\Pi(t)] = \begin{pmatrix} 1\\ p_1(t)\\ \ldots\\ p_n(t) \end{pmatrix}. \tag{41}$$

В этом представлении после замены переменной $t = p - p_1(t_0)$ получим

$$[\Pi(p-p_1)] = \exp\left(pA^{\text{sub}}\right)\exp\left(-p_1A^{\text{sub}}\right)[\Pi(t_0)], \tag{42}$$

или

$$\exp\left(-pA^{\text{sub}}\right)[\Pi(p)] = \exp\left(-p_1A^{\text{sub}}\right)[\Pi(t_0)] = [R],$$

где

$$[R] = \begin{pmatrix} 1\\ r_1\\ \ldots\\ r_3 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Коэффициенты r_k, $k = 2, 3, \ldots$, инвариантны по отношению сдвига корней полинома $t_K \Rightarrow t_K + \tau$. Отметим, что $r_1 = 0$.

Полиномы Эрмита относятся к ряду полиномов, которые подчиняются уравнениям Аппеля.

Важно, что эти полиномы образуют бесконечный ряд, обладают замечательными свойствами: образуют ортогональный базис, удовлетворяют дифференциальному уравнению второго порядка. Однако все эти замечательные свойства достигаются благодаря специфике выбранных коэффициентов, что соответствует выбору инвариантов. Рассмотрим полиномы Эрмита, которые представляют особый интерес с точки зрения широкой применимости в квантовой механике и других областях. Сравним полученные выше системы полиномов с инвариантными коэффициентами с полиномами Эрмита. В качестве примера рассмотрим систему полиномов кинематики ускорений до шестого порядка:

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0,\\
p^{(2)} &= p_0^2 + r_2,\\
p^{(3)} &= p_0^3 + 3r_2p_0 + r_3,\\
p^{(4)} &= p_0^4 + 6r_2p_0^2 + 4r_3p_0 + r_4,\\
p^{(5)} &= p_0^5 + 10r_2p_0^3 + 10r_3p_0^2 + 5r_4p_0 + r_5,\\
p^{(6)} &= p_0^6 + 15r_2p_0^4 + 45r_3p_0^3 + 15r_4p_0^2 + 6r_5p_0 + r_6.
\end{aligned} \tag{44}$$

Эти полиномы сводятся к полиномам Эрмита при соответствующем выборе инвариантов. Если определить инварианты по формулам

$$r_{2m+2} = (-1)^m \prod_{k=0}^{m} (1+2k), \quad r_{2m+1} = 0,\ m = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{45}$$

то получим полиномы Эрмита:

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_0,\\
p^{(2)} &= p_0^2 - 1,\\
p^{(3)} &= p_0^3 - 3p_0,\\
p^{(4)} &= p_0^4 - 6p_0^2 + 3,\\
p^{(5)} &= p_0^5 - 10p_0^3 + 15p_0,\\
p^{(6)} &= p_0^6 - 15p_0^4 + 45p_0^2 - 15.
\end{aligned} \tag{46}$$

Полиномы Эрмита также допускают экспоненциальную форму представления:

$$[p^{(k)}(p_0)] = \exp(p_0 A^{\mathrm{sub}})[p^{(k)}(0)]. \tag{47}$$

Уравнения Аппеля в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dp} p_k = k p_{k-1}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n,\\
&p_0 = 1.
\end{aligned} \tag{48}$$

4. РАСШИРЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ЕГО ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Изложение классической механики обычно начинают с уравнений движения. В случае механики «рывка» уравнение для пути под действием «силы» имеет вид

$$\frac{d^3}{dx^3}\, S(t) = F_{\text{jerk}}. \tag{49}$$

Согласно нашей концепции сила на каждом уровне постоянная. В данном случае

$$F_{\text{jerk}} = jm(\text{jerk}) = \text{const}.$$

Ради упрощения задачи принимаем $m(\text{jerk}) = 1$.

Работа ускорения. Кинетическая энергия. Выведем формулу кинетической энергии в случае равноускоренного движения. Для единичной массы сила идентифицируется с ускорением. Работу ускорения, равносильную работе силы с единичной массой, определим по обычной формуле:

$$\int\limits_2^1 adS = \int\limits_2^1 \frac{dv}{dt} dS = \int\limits_2^1 vdv = \frac{1}{2}(v^2(1) - v^2(2)) = a(S(1) - S(2)). \tag{50}$$

Из предположения, что ускорение постоянно, находим связь расстояния со скоростью

$$\frac{2}{a} S(t) = \frac{v(t)^2}{a^2} + r_2, \tag{51}$$

где постоянная интегрирования r_2 определяется начальными условиями

$$\frac{2}{a} S(t_0) - \frac{v^2(t_0)}{a^2} = r_2 \tag{52}$$

и пропорциональна квадрату разности корней основного полинома $(t_1 - t_2)^2 = 4T^2$. В явной форме эта зависимость записывается так:

$$\frac{2}{a} S(t) - \frac{v^2(t)}{a^2} = -T^2. \tag{53}$$

Из формулы (52) также следует известное соотношение разностей расстояний и скоростей:

$$S(t_1) - S(t_2) = \frac{v^2(t_1) - v^2(t_2)}{2a}. \tag{54}$$

Формула (54) ассоциируется с формулой для кинетической энергии для тела с единичной массой. Из уравнения (53) следует, что формула для кинетической энергии имеет вид

$$E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{ma^2}{2}\, T^2. \tag{55}$$

В формуле (55) в явном виде воспроизведена формула для так называемой *произвольной добавки к кинетической энергии*.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ОБОБЩЕННОЙ КИНЕМАТИКЕ

Основным уравнением, характеризующим кинематику третьего порядка, является уравнение для пути (4), заданное в виде полинома третьей степени. Работу рывка определим как интеграл от рывка по пути:

$$\int_2^1 jdS = \int_2^1 \frac{da}{dt} dS = \int_2^1 vda. \tag{56}$$

Чтобы вычислить этот интеграл, необходимо сначала получить связь между скоростью и ускорением. С этой целью рассчитаем следующий интеграл, который определим как работу рывка по скорости:

$$\int_2^1 jdv = \int_2^1 \frac{da}{dt} dv = \int_2^1 ada = \frac{1}{2}(a^2(1) - a^2(2)) = j(v(1) - v(2)). \tag{57}$$

Из этого уравнения находим

$$v = \frac{1}{2j} a^2 + r_2, \tag{58}$$

где r_2 — постоянная интегрирования.

Используя формулу (58), вычислим предыдущий интеграл — работу рывка по пути:

$$\int jdS = \int \frac{da}{dt}\, dS = \int vda = \int \left(\frac{a^2}{2j} + r_2 \right)\, da = \frac{1}{6j} a^3 + r_2 a + r_3. \tag{59}$$

Отсюда, имея в виду постоянство рывка, находим

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{6j^2}\, a^3 + \frac{1}{j} r_2 a + r_3. \tag{60}$$

Это есть кинетическая энергия, аккумулированная в ускорении.

Точно таким же способом выведем формулу для кинетической энергии в кинематике четвертого порядка. Определим работу коэффициента при четвертой степени (назовем эту величину «скрип») по аналогии с предыдущим способом — как интеграл по пути:

$$\int ydS = \int \frac{dj}{dt}\, dS = \int vdj. \tag{61}$$

Чтобы вычислить этот интеграл, необходимо найти зависимость скорости от рывка. С этой целью определим работу «скрипа» по скорости:

$$\int y dv = \int \frac{dj}{dt}\, dv = \int a dj. \tag{62}$$

Для вычисления данного интеграла требуется знание зависимости ускорения от рывка. Далее определим работу «скрипа» по ускорению:

$$\int y da = \int \frac{dj}{dt}\, da = \int j dj = \frac{1}{2} j^2 + r_2. \tag{63}$$

Отсюда получим ускорение как функцию рывка:

$$ya = \frac{1}{2} j^2 + r_2. \tag{64}$$

Используем формулу (64) для вычисления интеграла (62). Находим

$$\int y dv = \int \frac{dj}{dt}\, dv = \int a dj = \int \left(\frac{1}{2} j^2 + r\right)\, dj = \frac{1}{6} j^3 + r_2 j + r_3 = yv.$$

Последнее равенство выражает явную зависимость скорости от рывка. Эта функция используется при вычислении интеграла (61). Вычислив интеграл, находим зависимость пути от рывка:

$$E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{24y^2}\, j^4 + \frac{1}{6y}\, j^2 r_2 + r_3 j + r_4. \tag{65}$$

Это и есть аналог кинетической энергии в кинематике четвертого порядка. Таким образом, формулы для пути переходят в формулы для кинетической энергии.

6. ЭВОЛЮЦИЯ ЭНЕРГИИ В РАСШИРЕННОЙ МЕХАНИКЕ

В случае стационарного внешнего потенциала выводится формула для полной энергии как суммы кинетической и потенциальной энергий:

$$E_{\text{полн}} = p_{\mathrm{kin}}(t) + V(r). \tag{66}$$

Отсюда, учитывая независимость полной энергии от времени, выводится эволюционное уравнение для кинетической энергии:

$$0 = \frac{d}{dt}\, p_{\mathrm{kin}}(t) + \frac{d}{dx}\, V(r) \frac{dx}{dt}. \tag{67}$$

В расширенной классической механике расширение происходит в смысле увеличения числа кинетических энергий, которые представляются в виде коэффициентов характеристического полинома [6–8]. В данной работе будем представлять кинетические энергии в виде компонент вектора. Тогда уравнение для полной энергии представляется в виде следующей системы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ V & 1 & 0 \\ V^2 & 2V & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Вторая строка содержит классическую формулу (66).

Из третьей строки получаем квадратичное соотношение:

$$E_2 = V^2 + 2V(r)p_1 + p_2. \tag{69}$$

Прежде чем перейти к большему числу энергий, перепишем эти соотношения в следующих обозначениях. Определим следующие векторы-столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = [E], \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ p^2 \end{pmatrix} = [p].$$

В этих обозначениях матричные уравнения (68) принимают более компактную форму:

$$[E] = \exp(VA)[p], \tag{70}$$

где матрица $A = A^{\text{sub}}$ определена по формуле (40).

Эволюционные уравнения для кинетической энергии выводятся аналогичным способом, например:

$$\begin{aligned} 0 &= A \exp(VA)\,[p]\,\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} + \exp(VA)\frac{d}{dt}\,[p], \\ \frac{d}{dt}[p] &= A\,[p]\,\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}. \end{aligned} \tag{71}$$

Переходим к определению инвариантов. С этой целью потенциал в уравнении (53) заменяем, исходя из уравнения $E_1 - p_0 = V(r)$. В результате получим

$$[E] = \exp(E_1 A)\exp(-p_1 A)[p]. \tag{72}$$

Представив формулу (72) в виде

$$\exp(-E_1 A)[E] = \exp(-p_1 A)[p],$$

находим инвариант по отношению к сдвигу энергии. Столбец инвариантов определяется по формуле

$$[R] = [\exp(-p_1 A)[p]]. \tag{73}$$

Например, в случае двух компонент кинетических энергий столбец инвариантов определяется по формуле

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p_0 & 1 & 0 \\ p_0^2 & -2p_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ p^2 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Таким образом, имеем

$$[R] = \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad r_1 = 0.$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ E_1 & 1 & 0 \\ E_1^2 & 2E_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r_2 \end{pmatrix}, \tag{75}$$

$$E_2 = E_1^2 + r_2.$$

Если провести аналогичные операции для трех энергий, то придем к системе из двух уравнений:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1^2 + r_2, \\ E_3 &= E_1^3 + 3E_1 r_2 + r_3. \end{aligned} \tag{76}$$

7. ЭВОЛЮЦИЯ ЭНЕРГИИ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКЕ

Покажем, что эволюция кинетической энергии в релятивистской механике формируется по тем же правилам. С этой целью представим основное соотношение между энергией-импульсом-массой (mass-shell equation) в виде произведения двух корней квадратичного полинома:

$$p^2 = (p_0 + m)(p_0 - m), \ c = 1. \tag{77}$$

Квадратичный полином образуется путем сдвига корней полинома. Коэффициенты полинома при этом меняются согласно следующим формулам:

$$\begin{aligned} p^2(u) &= p^2(0) + 2up_0(0) + u^2, \\ p_0(u) &= p_0(0) + u. \end{aligned} \tag{78}$$

Эта система формул имеет тот же вид, что и система (68):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_0(u) \\ p^2(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ u^2 & u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ p^2 \end{pmatrix}. \tag{79}$$

С помощью матрицы $A = A^{\text{sub}}$ компактно запишем так:

$$[p(u)] = \exp(uA)[p(0)].$$

По тем же правилам определим инварианты:

$$\exp\left(-p_0(u)A\right)[p(u)] = \exp\left(-p_0(0)A\right)[p(0)],$$

или в явной форме

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p_0 & 1 & 0 \\ p_0^2 & -2p_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_0 \\ p^2 \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Отсюда следует, что

$$p^2 = p_0^2 + r_2, \tag{81}$$

где очевидно, что $r_2 = -m^2$.

8. ОБОБЩЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

Общая формула (53) дает подсказку к обобщению:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_1(u) \\ p_2(u) \\ p_3(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 & 0 \\ u^2 & 2u & 1 & 0 \\ u^3 & 3u^2 & 3u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, \tag{82}$$

что соответствует следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &p_1(u) = p_1(0) + u, \\ &p_2(u) = p_2(0) + 2up_1(0) + u^2, \\ &p_3(u) = p_3(0) + 3up_2(0) + 3u^2p_1 + u^3. \end{aligned} \tag{83}$$

Используя вышеприведенный алгоритм, находим систему уравнений в инвариантах:

$$\begin{aligned} &p_1 = p, \\ &p_2 = p^2 + r_2, \\ &p_3 = p^3 + 3r_2p + r_3. \end{aligned} \tag{84}$$

Определим следующие векторы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = [E_{\text{kin}}], \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ p_1(u) \\ p_2(u) \\ p_3(u) \end{pmatrix} = [E_{\text{total}}].$$

В этих обозначениях матричное уравнение запишем так:

$$[E_{\text{total}}(u)] = \exp(uA)[E_{\text{kin}}(0)], \tag{85}$$

где $A = A^{\text{sub}}$ — нильпотентная матрица четвертого порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обобщенной формулировке кинематики ускоренное движение имеет ступенчатую структуру, на каждой ступени иерархической лестницы функция пути от времени представляется полиномом определенной степени. Система полиномов образует последовательность треугольной формы, что допускает матричное представление через экспоненту от нильпотентной матрицы. Переход к полиномам с инвариантными коэффициентами приводит к последовательности полиномов Эрмита при специальном выборе начальных условий ускоренного движения. Таким образом, прослеживается связь между ступенчатостью ускоренных движений и квантовыми состояниями в модели квантового осциллятора [9].

Фактически мы имеем дело с общим математическим законом, вытекающим из разложения аналитической функции в ряд Тейлора. Важно, что этот ряд должен быть усеченным на определенной конечной степени переменной разложения. Таким образом, исходная функция сводится к полиному, производные которой тоже полиномы, выражающие закон эволюции коэффициентов ведущего полинома.

Обобщенная формулировка кинематики ведет к расширению механики. В расширенной механике:

— порядок и структура механики определяются характеристическим полиномом;

— коэффициенты характеристического полинома образуют компоненты вектора кинетической энергии;

— добавка потенциала реализуется как преобразование вектора кинетической энергии под действием матрицы Паскаля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ямалеев Р. М.* Обобщенная кинематика // Тр. конф. «Наука–общество–технологии-2022» / Ред. А. Л. Карташев. М., 2022. С. 99–106.
2. *Ямалеев Р. М.* Эволюционные уравнения обобщенной кинематики // Academy. 2023. № 3(77).
3. *Yamaleev R. M.* Pascal Matrix Representation of Evolution of Polynomials // Intern. J. Appl. Comput. Math. 2015. V. I(4). P. 513–525.
4. *Aceto L., Trigiante D.* The Matrices of Pascal and Classical Polynomials // Rendicoti del Circol Matematico in Palermo. 2002. Ser. II, Suppl. 68. P. 219–228.
5. *Aceto L., Trigiante D.* The Matrices of Pascal and Other Greats // Amer. Math. Monthly. 2001. V. 108. P. 232–245.
6. *Yamaleev R. M.* Generalized Newtonian Equations of Motion // Ann. Phys. 1999. V. 277. P. 1–18.
7. *Yamaleev R. M.* Relativistic Equations of Motion within Nambu's Formalism of Dynamics // Ann. Phys. 2000. V. 285. P. 141–160.
8. *Yamaleev R. M.* Generalized Lorentz-Force Equations // Ann. Phys. 2001. V. 292. P. 157–178.
9. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.

Получено 12 октября 2023 г.

Редактор *Е. В. Григорьева*

Подписано в печать 26.10.2023.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,18. Тираж 105 экз. Заказ № 60751.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/