Р2-2001-100

С.А.Гаджиев*, Р.К.Джафаров*

УРАВНЕНИЕ БЕТЕ–СОЛПИТЕРА ДЛЯ МНИМОЙ ЧАСТИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В ЛЕСТНИЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

*Бакинский государственный университет, Азербайджан;
e-mail: jafarovrauf@yahoo.com

1. ВВЕДЕНИЕ

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования поведения амплитуды рассеяния в глубоконеупругой области приводят к существенному интересу к лестничным моделям. Лестничное приближение для амплитуды рассеяния в моделях теории поля первоначально использовалось для обоснования реджевского поведения при высоких энергиях [1,2] и послужило отправной точкой при построении мультипериферической модели [3]. Как известно, суммирование лестничных диаграмм всегда приводит к интегральным уравнениям Бете - Солпитера (БС) для амплитуды рассеяния. Различными методами были получены точные решения лестничных уравнений типа БС для амплитуды рассеяния вперед для некоторых скалярных моделей и исследовано поведение амплитуд как в реджевской, так и бьеркеновской областях [4-6]. В [7] предложен метод решения уравнения БС для мнимой части амплитуды рассеяния на малые передаваемые импульсы в теории $\lambda\varphi^3$. В работе [8] исследовано уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния вперед фермионов и скалярных бозонов. В скалярной КЭД в лестничном приближении была исследована мнимая часть амплитуд рассеяний вперед и на малые передаваемые импульсы [9]. Показано, что амплитуда при высоких энергиях имеет реджевскую асимптотику. Однако в научной литературе отсутствуют работы, где бы исследовалась амплитуда рассеяния фермионов при ненулевых значениях передаваемого импульса в лестничном приближении.

В настоящей работе нами сформулирована система интегральных уравнений типа БС для мнимой части амплитуды рассеяния фермионов и бозонов в лестничном приближении. Предложен метод решения таких уравнений в реджевской области изменения энергии, где показано, что масса обменной частицы существенно влияет на обеспечение реджевского поведения амплитуды при высоких энергиях.

2. УРАВНЕНИЕ БС ДЛЯ МНИМОЙ ЧАСТИ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

Напишем уравнение БС для мнимой части амплитуды рассеяния $F_{\alpha\beta}\left(p,p';k,k'\right)$ фермионов (ψ) и скалярных бозонов (ϕ) с обменом скалярной частицей (φ) с взаимодействием $L_{int} = g\left[\overline{\psi}\,\psi\right]\varphi + \lambda\varphi\phi^2$:

$$\overline{\psi}(p')F_{\alpha\beta}(s,t;p^2,p'^2;k^2,k'^2)\psi(p') = \pi\lambda g\overline{\psi}(p')\delta_+[(p+p')^2-\mu^2]\theta(p_0+p_0')\delta_{\alpha\beta}\psi(p')+$$

$$+\frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int\frac{\overline{\psi}(p')F_{\alpha\alpha'}(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)\psi(p')(\hat{p}-\hat{q}+m)_{\alpha'\beta}\delta_{\alpha\beta}}{\left[(p-q)^2-m^2\right]\left[(k-q)^2-m^2\right]}\delta_+\left(q^2-\mu^2\right)\theta\left(q_0\right)d^4q, \quad (1)$$

где p, p' и k, k' - 4-импульсы начальных и конечных частиц соответственно (рис. 1).

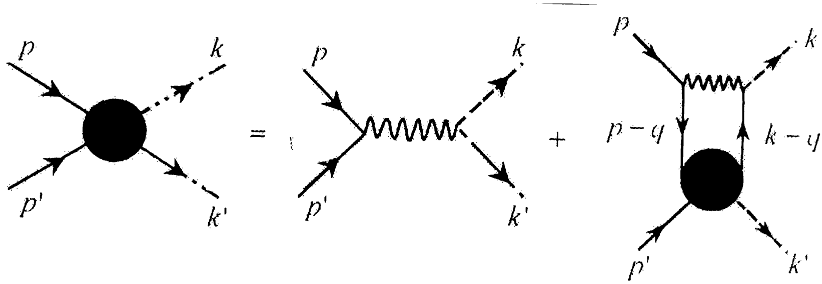

Рис.1. Графический вид уравнения (1)

Амплитуда $F_{\alpha\beta}$ является функцией шести инвариантов: $p^2, p'^2, k^2, k'^2, t=(p-k)^2$ и $s=(p+p')^2$. Амплитуда $F_{\alpha\alpha'}$- функция следующих инвариантов: $s'=(p+p'-q)^2$, $t=(p-q)^2=(k-q)^2$. μ-масса обменной частицы, т.е. масса на перекладинах, а m-масса прочих пропагаторов (массы скалярной (ϕ) и спинорных (ψ) частиц для простоты принимаются одинаковыми).

В случае $p'^2=m^2, k'^2=m^2, k^2=m^2$ амплитуду $\overline{\psi}(p')F_{\alpha\beta}\psi(p')$ разлагаем по лоренц-инвариантным скалярам:

$$\overline{\psi}(p')[f_1\hat{p}+f_2\hat{p}'+f_3\hat{p}\hat{p}'+f_4]\psi(p'). \quad (2)$$

Используя уравнение Дирака $((\hat{p}'-m)\psi(p')=0)$, амплитуду $F_{\alpha\beta}$ представим через два формфактора F_1 и F_2 :

$$[\hat{p}F_1(s,t;p^2)+F_2(s,t;p^2)]\overline{\psi}(p')\psi(p'), \quad (3)$$

где F_1 и F_2-следующие линейные комбинации: $F_1=f_1+f_3m, F_2=f_2m+f_4$. Амплитуда $F_{\alpha\alpha'}$ имеет вид

$$(\hat{p}-\hat{q})F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)+F_2(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2). \qquad (4)$$

Учитывая (3) и (4), уравнение (1) перепишем в следующем виде:

$$[\hat{p}F_1(s,t;p^2)+F_2(s,t;p^2)]\overline{\psi}(p')\psi(p')=\pi\lambda g\delta_+(s-\mu^2)\theta(p_0+p_0')\overline{\psi}(p')\psi(p')+$$
$$+\frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int\frac{(\hat{p}-\hat{q}+m)[(\hat{p}-\hat{q})F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)+F_2(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)]\overline{\psi}(p')\psi(p')}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times$$
$$\times\,\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q. \qquad (5)$$

Здесь спиноры $\psi(p')$ нормированы обычным образом:

$$\sum_{r=1,2}\psi^r_\alpha(p')\overline{\psi}^r_\beta(p')=\frac{(\hat{p}'+m)_{\alpha\beta}}{2m}.$$

Суммируя по r, имеем

$$[\hat{p}F_1(s,t;p^2)+F_2(s,t;p^2)](m+\hat{p}')=\pi\lambda g\delta_+(s-\mu^2)(m+\hat{p}')\theta\left(p_0+p_0'\right)+$$
$$+\frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int\frac{(\hat{p}-\hat{q}+m)[(\hat{p}-\hat{q})F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)+F_2(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)](m+\hat{p}')}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times$$
$$\times\,\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q. \qquad (6)$$

Вычисляя следы в (6), получаем

$$\begin{cases} pp'F_1(s,t;p^2)+mF_2(s,t;p^2)=m\pi\lambda g\delta_+(s-\mu^2)\theta(p_0+p_0')+\\ +\frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int\frac{F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)[m(p-q)^2+mp'(p-q)]+F_2(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)[p'(p-q)+m^2]}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times\\ \times\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q,\\ mp^2F_1(s,t;p^2)+pp'F_2(s,t;p^2)=\pi\lambda g\delta_+(s-\mu^2)\theta(p_0+p_0')pp'+\\ +\frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int\frac{F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)[pp'(p-q)^2+m^2p(p-q)]+F_2(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)[mp'(p-q)+mpp']}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times\\ \times\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q. \end{cases} \qquad (7)$$

Второе уравнение в (7) получено путем умножения (6) на $\hat{p}$, а далее-вычислением следов.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ

Уравнения (7) имеют довольно сложное ядро, и их точные решения вряд ли возможны. Поэтому, анализируя систему (7) при высоких энергиях в кинематической области $s >> \mu^2, m^2$; $k^2 = m^2$, вид уравнений удается относительно упростить. Итак, систему (7) можно переписать как

$$\begin{cases} pp'F_1(s,t;p^2) = \frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int \frac{mp'(p-q)F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)+p'(p-q)F_2(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times \\ \times\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q, \\ pp'F_2(s,t;p^2) = \frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int \frac{pp'(p-q)^2F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)d^4q}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}. \end{cases} \tag{8}$$

Обе стороны уравнений (8) разделим на релятивистский инвариант pp' . Тогда.

$$\begin{cases} F_1(s,t;p^2) = \frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int \frac{mF_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)+F_2(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times \\ \times(1-\frac{p'q}{pp'})\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)\delta_+[(p+p'-q)^2-s']\theta(p_0+p_0'-q_0)d^4qds', \\ F_2(s,t;p^2) = \frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int \frac{(p-q)^2F_1(s',t;(p-q)^2,(k-q)^2)}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times \\ \times\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)\delta_+[(p+p'-q)^2-s']\theta(p_0+p_0'-q_0)d^4qds', \end{cases} \tag{9}$$

где подынтегральное выражение умножено на

$$1 = \int \delta_+[(p+p'-q)^2-s']\theta(p_0+p_0'-q_0)ds'.$$

Отметим, что, когда частица с импульсом p находится на массовой поверхности ($p^2 = m^2$), при $s \to \infty$ реджевская асимптотика $s^{\alpha(t)}$ не является решением системы (9).

4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Решение уравнений (9) в реджевской области изменения энергий будем искать в следующем виде:

$$F_1(s,t;p^2) \cong c_1(\frac{s}{m^2})^{\alpha(t)}\frac{1}{p^2}, \qquad F_2(s,t;p^2) \cong c_2m(\frac{s}{m^2})^{\alpha(t)}, \tag{10}$$

где c_1 и c_2 - константы. Соответственно,

$$F_1(s',t;(p-q)^2) \cong c_1(\frac{s'}{m^2})^{\alpha(t)}\frac{1}{(p-q)^2}, \qquad F_2(s',t;p^2) \cong c_2m(\frac{s'}{m^2})^{\alpha(t)}. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (9), получаем

$$\begin{cases} \frac{c_1}{p^2} = \frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int \frac{\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0t)\delta_+[(p+p'-q)^2-s']\theta(p_0+p_0'-q_0)}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times \\ \times(1-\frac{p'q}{pp'})[c_1m(\frac{s'}{s})^{\alpha(t)}\frac{1}{(p-q)^2}+c_2m(\frac{s'}{s})^{\alpha(t)}]ds'd^4q, \\ c_2m = \frac{\pi\lambda g}{(2\pi)^4}\int \frac{\delta_+(q^2-\mu^2)\theta(q_0)\delta_+[(p+p'-q)^2-s']\theta(p_0+p_0'-q_0)}{[(p-q)^2-m^2][(k-q)^2-m^2]}\times \\ \times c_1(\frac{s'}{s})^{\alpha(t)}ds'd^4q. \end{cases} \tag{12}$$

Далее частицу с импульсом k берем на массовой поверхности $k^2 = m^2$, а частицу с импульсом p - вблизи массовой поверхности $p \to m^2$, предполагая, что поправки к амплитуде за счет выхода за массовую поверхность порядка $\frac{p^2-m^2}{s}, \frac{k^2-m^2}{s}$.

В системе центра масс $p = (p_0, \mathbf{p})$, $p' = \left(p_0', -\mathbf{p}\right)$ $p + p' = \left(p_0 + p_0', 0\right)$ определим s как полную энергию. Полагая $q = (q_0, q)$, легко убедиться, что аргумент второй δ-функции в (12) принимает вид $\left(p + p' - q\right)^2 - s' = s - s' + \mu^2 - 2\sqrt{s}q_0$, поскольку первая δ-функция приводит к $q^2 = \mu^2$. Итак, переходя к сферическим координатам $d^4q = |\mathbf{q}|^2 d\mathbf{q}dq_0 d\Omega$, где $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ - элемент телесного угла по направлению $\mathbf{q}$, и проводя интегрирования по $|\mathbf{q}|, q_0$ с помощью двух δ-функций, далее по φ получим

$$\left\{\begin{aligned} \frac{c_1}{m^2} &= \frac{\pi^2\lambda g}{8(2\pi)^4|\mathbf{p}|^2\sqrt{s}} \int \frac{\left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha(t)}\left(\frac{c_1}{m}+c_2 m\right)}{\eta(\beta+z)\sqrt{\beta^2+2\beta z_0 z+z^2+z_0^2-1}} \left(1 - \frac{s-s'}{s\sqrt{s}}\left(\frac{\sqrt{s}}{2} + |\mathbf{p}|z\right)\right) dz ds', \\ \frac{c_2}{c_1}m &= \frac{\pi^2\lambda g}{8(2\pi)^4|\mathbf{p}|^2\sqrt{s}} \int \frac{\left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha(t)}}{\eta(\beta+z)\sqrt{\beta^2+2\beta z_0 z+z^2+z_0^2-1}} ds' dz, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

где $z = \cos\theta = \cos(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}), z_0 = \cos\theta_0 = \cos(\mathbf{p} \wedge \mathbf{k})$, θ_0 - угол рассеяния, $|\mathbf{p}| = \sqrt{\frac{t}{2(z_0-1)}}$, $\eta = \frac{s-s'}{2\sqrt{s}}$, $\beta = \frac{s-s'}{4\mathbf{p}\eta}$.

Для изучения случая рассеяния на малые передаваемые импульсы в подынтегральном выражении произведем замену $z_0 = 1 + \varepsilon$ $(\varepsilon << 1)$ и перепишем (13) в виде

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{m^3} &= \frac{G}{|\mathbf{p}|^2\sqrt{s}}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{c_2}{c_1}\right) \int \frac{dz ds'}{\eta(\beta+z)^2\sqrt{1+2\varepsilon H}} \left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha(t)} \left[1 - \frac{s-s'}{s\sqrt{s}}\left(\frac{\sqrt{s}}{2} + |\mathbf{p}|z\right)\right], \\ \frac{c_2}{c_1}m &= \frac{G}{|\mathbf{p}|^2\sqrt{s}} \int \frac{dz ds'}{\eta(\beta+z)^2\sqrt{1+2\varepsilon H}} \left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha(t)}, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

где $G = \frac{\lambda g}{128\pi^2}$, $H = \frac{1+\beta z}{(\beta+z)^2}$, при этом после замены $z_0 = 1 + \varepsilon$ в знаменателе ядра (14) пренебрегаем слагаемым ε^2 .

Разлагая ядро в (14) по степеням ε и удерживая первые два члена разложения, получаем

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{m^3} &= \frac{G}{|\mathbf{p}|^2\sqrt{s}}\left(\frac{1}{m^2} + \frac{c_2}{c_1}\right) \int \frac{dz ds'}{\eta(\beta+z)^2} \left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha(t)} \left(1 - \varepsilon\frac{\beta z+1}{(\beta+z)^2}\right) \left[1 - \frac{s-s'}{s\sqrt{s}}\left(\frac{\sqrt{s}}{2} + |\mathbf{p}|z\right)\right], \\ \frac{c_2}{c_1}m &= \frac{G}{|\mathbf{p}|^2\sqrt{s}} \int \frac{dz ds'}{\eta(\beta+z)^2} \left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha(t)} \left(1 - \varepsilon\frac{\beta z+1}{(\beta+z)^2}\right). \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Пределы интегрирования по z и s' определяются из кинематического $|\cos\theta| = \left|\frac{(\mathbf{pq})}{(\mathbf{p}^2\mathbf{q}^2)^{\frac{1}{2}}}\right| \leq 1$ и порогового условия $s' \gg \mu^2 :\ -1 \leq z \leq 1,\ 0 \leq s' \leq s$, соответственно.

Проводя интегрирование по z (при этом пренебрегаем членами вида $\frac{\ln s}{s}$ из-за очень медленного роста при $s \to \infty$, по сравнению с ведущими членами в (15)), получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{m^3} = IG \left(\frac{1}{m^2} + \frac{c_2}{c_1}\right), \\ \frac{c_2}{c_1} m = IG. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь

$$I = \frac{2}{|\mathbf{p}|^2 \sqrt{s}} \int_0^s \frac{ds'}{\eta} \left(\frac{s'}{s}\right)^{\alpha(t)} \left[-\frac{1}{1-\beta^2} + \varepsilon \frac{1}{3\,(1-\beta^2)^2} \right].$$

Выражая c_2 через c_1, перепишем (16) как

$$\frac{m\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)}{8G} = \int_0^1 \frac{y\,(1-y)^{\alpha(t)}}{\nu^2 + y^2} dy \;+\; \varepsilon \frac{|\mathbf{p}|^2}{3m^2} \int_0^1 \frac{y^3\,(1-y)^{\alpha(t)}}{\left(\nu^2+y^2\right)^2} dy, \tag{17}$$

где $y = 1 - \frac{s'}{s}$, $\nu^2 = \frac{\mu^2}{m^2}$. Первый интеграл в (17) легко приводится к сумме двух гипергеометрических функций Гаусса. Второй интеграл есть "интеграл Пикара" в частном случае [10], который удается привести к гипергеометрической функции Аппеля двух переменных [10]. Так, имеем

$$\Lambda\,(\alpha\,(t)+1)\,(\alpha\,(t)+2) = {}_2F_1\left(1,2;\alpha\,(t)+3;-i\tfrac{m}{\mu}\right) +$$
$$+ {}_2F_1\left(1,2;\alpha\,(t)+3;i\frac{m}{\mu}\right) + \tfrac{\omega(\varepsilon,t)}{(\alpha(t)+3)(\alpha(t)+4)} F_1\left(4,2,2;\alpha\,(t)+5;i\frac{m}{\mu};-i\frac{m}{\mu}\right), \tag{18}$$

где $\Lambda = \frac{32\pi^2\mu^2\left(-1\pm\sqrt{5}\right)}{\lambda g m}$, $\omega\,(\varepsilon,t) = \varepsilon\frac{|\mathbf{p}|^2}{\mu^2}$. Отметим, что выражение (18) при $\omega = 0$ совпадает с соответствующим результатом [8] для случая рассеяния вперед.

Функция Аппеля F_1 является более трудной для изучения, чем функция Гаусса ${}_2F_1$. Однако, используя известное представление функции F_1 через обобщенную гипергеометрическую функцию одной переменной порядка (3,2) [11], (18), можно записать как

$$\Lambda\,(\alpha\,(t)+1)\,(\alpha\,(t)+2) = {}_2F_1\left(1,2;\alpha\,(t)+3;-i\tfrac{m}{\mu}\right) + {}_2F_1\left(1,2;\alpha\,(t)+3;i\tfrac{m}{\mu}\right) +$$
$$+ \tfrac{\omega(\varepsilon,t)}{(\alpha(t)+3)(\alpha(t)+4)}\, {}_3F_2\left(\begin{array}{ccc} 2, & \frac{5}{2}, & 2; \\ \frac{\alpha(t)+5}{2}, & \frac{\alpha(t)+6}{2}; & -\frac{m^2}{\mu^2} \end{array}\right), \tag{19}$$

где

$$\begin{cases} {}_2F_1\,(\alpha,\beta;\gamma;z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha)_n\,(\beta)_n}{(\gamma)_n\,n!} z^n, \;\; \gamma \neq 0,-1,-2,..., \\ {}_3F_2\left(\begin{array}{c} \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3; \\ \beta_1,\beta_2; z \end{array}\right) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\alpha_1)_n\,(\alpha_2)_n\,(\alpha_3)_n}{(\beta_1)_n\,(\beta_2)_n\,n!} z^n, \;\; \beta_1,\beta_2 \neq 0,-1,-2,..., \end{cases} \tag{20}$$

$(\alpha)_n, (\beta)_n, (\gamma)_n$ – символы Похгаммера. Используя соотношения (20), выражение

(19) перепишем как

$$\Lambda\left(\alpha\left(t\right)+1\right)\left(\alpha\left(t\right)+2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1\right)_{n}\left(2\right)_{n}}{\left(\alpha\left(t\right)+3\right)_{n}n!}\left[\left(i\frac{m}{\mu}\right)^{n}+\left(-i\frac{m}{\mu}\right)^{n}\right]+$$
$$+\frac{\omega(\varepsilon,t)}{(\alpha(t)+3)(\alpha(t)+4)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2\right)_{n}\left(\frac{5}{2}\right)_{n}\left(2\right)_{n}}{\left(\frac{\alpha(t)+5}{2}\right)_{n}\left(\frac{\alpha(t)+6}{2}\right)_{n}n!}\left(-\frac{m^{2}}{\mu^{2}}\right)^{n}. \tag{21}$$

Для определения явного вида реджевского показателя $\alpha\left(t\right)$ рассмотрим три предельных случая:

1) Большие обменные массы: $\frac{m^2}{\mu^2}<1$. В данном случае ряды (21) абсолютно сходятся. Ограничиваясь только нулевым членом рядов (21), получаем алгебраическое уравнение 4-го порядка, что дает возможность в принципе найти конкретные значения для $\alpha\left(t\right)$ (см. приложение). В пределе $\omega\left(\varepsilon,t\right)=0$ получим известное выражение для α:

$$\alpha=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\left[1+\frac{m\lambda g}{4\pi^{2}\mu^{2}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

что совпадает с результатом, полученным в [8] для случая рассеяния вперед.

2) Малые значения обменных масс: $\mu<m$. Как уже отмечалось, обобщенная гипергеометрическая функция порядка (3,2) определяется как сумма обобщенного гипергеометрического ряда (см. (20)) в области его сходимости, а при $z\geq1$ как аналитическое продолжение этого ряда. Аналитическое продолжение можно получить, в частности, с помощью рядов в окрестностях особых точек $z=\infty$ (т.е. $\mu<m$) и $z=1$ (т.е. $\mu=m$). Воспользуемся (20) и представлением [11]:

$$ {}_3F_2\left(\begin{array}{c}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{3;}\\ \beta_1,\beta_2;z\end{array}\right)=\Gamma\left[\begin{array}{c}\beta_1,\beta_2\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\end{array}\right]\sum_{n=1}^{3}\Gamma\left[\begin{array}{c}\alpha_n,\left(\alpha_3\right)'-\alpha_n\\ \left(\beta_2\right)-\alpha_n\end{array}\right]\times$$
$$\times\left(e^{\pi}z^{-1}\right)^{\alpha_n}{}_2F_1\left(1+\alpha_n-\left(\beta_2\right),\alpha_n;1+\alpha_n-\left(\alpha_3\right)';z^{-1}\right) \tag{23}$$

(штрих означает, что слагаемое $1+\alpha_n-\alpha_l$ при $n=l$ отсутствует), где

$$\Gamma\left[\begin{array}{c}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ \beta_1,\beta_2\end{array}\right]=\frac{\prod\limits_{n=1}^{3}\Gamma\left(\alpha_n\right)}{\prod\limits_{l=1}^{2}\Gamma\left(\beta_l\right)},$$

и аналитическим продолжением гипергеометрической функции Гаусса в логарифмическом случае [10]:

$$ {}_2F_1\left(\alpha,\alpha+m;\gamma;z\right)\frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\gamma)}=\frac{(-z)^{-\alpha-m}}{\Gamma(\gamma-\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_{n+m}\left(1-\gamma+\alpha\right)_{n+m}}{n!\left(m+n\right)!}z^{-n}\times$$
$$\times\left[\ln\left(-z\right)+h_n\right]+\left(-z\right)^{-\alpha}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{\Gamma\left(m-n\right)\left(\alpha\right)_n z^{-n}}{\Gamma\left(\gamma-\alpha-n\right)n!}, \tag{24}$$

где $h_n = \psi(1+m+n) + \psi(1+n) - \psi(\alpha+m+n) - \psi(\gamma-\alpha-m-n)$, ψ- есть логарифмическое производное Г-функции . Итак, формулу (19) перепишем как

$$\Lambda(\alpha(t)+1) = -\tfrac{\mu^2}{m^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1-\alpha(t))_{n+1}}{n!\,(n+1)!} \times$$
$$\times \left[\left(-i\tfrac{m}{\mu}\right)^{-n} \left(\ln\left(i\tfrac{m}{\mu}\right) + \psi(1+n) - \psi(\alpha(t)+1-n)\right) + \left(i\tfrac{m}{\mu}\right)^{-n} \left(\ln\left(-i\tfrac{m}{\mu}\right) + \psi(1+n) - \right.\right.$$
$$-\psi(\alpha(t)+1-n)$$
$$-\omega(\varepsilon,t)\,\frac{e^{\frac{5}{2}\pi}(\alpha(t)+5)(\alpha(t)+6)}{16(\alpha(t)+1)(\alpha(t)+2)(\alpha(t)+3)(\alpha(t)+4)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\alpha(t)}{2}\right)_n \left(\frac{5}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!} \left(-\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{5}{2}n}, \tag{25}$$

откуда можно в принципе найти явный вид для реджевского показателя $\alpha(t)$.

Ограничиваясь первыми членами рядов в (25) (при $n = 0$) и воспользовавшись формулой [10]:

$$\psi(\alpha+1) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{n(\alpha+n)}$$

($\gamma = 0,5772156649...$ - постоянная Эйлера - Маскерони), находим

$$\Lambda = 2\tfrac{\mu^2}{m^2}\left[-\tfrac{1}{2}\ln\tfrac{\mu^2}{m^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{n(\alpha+n)} + \gamma\right] - \frac{\omega(\varepsilon,t)(\alpha(t)+5)(\alpha(t)+6)}{16(\alpha(t)+1)^2(\alpha(t)+2)(\alpha(t)+3)(\alpha(t)+4)} \times$$
$$\times e^{\frac{5}{2}\pi}\left(-\tfrac{\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{5}{2}}, \tag{26}$$

что дает принципиальную возможность определить конкретные значения для $\alpha(t)$ (см. приложение).

Как известно, функция $\psi(\alpha+1)$ мероморфна и имеет простые полюсы в точках $\alpha = 0, -1, -2, -3, ...$, причем при переходе через полюс меняется знак производной $\psi(\alpha+1)$. При $\omega(\varepsilon,t) \to 0$ и конечных значениях константы связи и обменной массы (при $\mu \ll m$) для α получаем ранее известное представление (см.[8]):

$$\alpha \approx -n \pm \left[-\frac{16\pi^2 m\left(-1\pm\sqrt{5}\right)}{\lambda g} - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right] \quad n = 1, 2, 3, ..., \tag{27}$$

$$\left|\frac{16\pi^2 m\left(-1\pm\sqrt{5}\right)}{\lambda g} + \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2}\right| \ll 1. \tag{28}$$

Из (27) и (28) видно, что в случае малых обменных масс амплитуда становится неаналитичной по константе связи. Следует также отметить, что выражение (28) приводит к поведению амплитуды, согласующемуся с ограничением Фруассара [12].

Полученные результаты позволяют утверждать, что только последовательный учет инфракрасных особенностей по массе (μ) обменной частицы (при $p^2 \neq m^2$, $k^2 = m^2$) может обеспечить реджевское поведение амплитуды рассеяния.

3) Равные значения обменной массы μ и массы внешних частиц m ($\mu = m$). Тогда

(21) принимает вид

$$\Lambda\left(\alpha\left(t\right)+1\right)\left(\alpha\left(t\right)+2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1\right)_n\left(2\right)_n}{\left(\alpha\left(t\right)+3\right)_n n!}\left[\left(i\right)^n+\left(-i\right)^n\right]+$$
$$+\frac{\omega(\varepsilon,t)}{(\alpha(t)+3)(\alpha(t)+4)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(2\right)_n\left(\frac{5}{2}\right)_n\left(2\right)_n}{\left(\frac{\alpha(t)+5}{2}\right)_n\left(\frac{\alpha(t)+6}{2}\right)_n n!}\left(-1\right)^n, \qquad (29)$$

что дает возможность вычислить значения для $\alpha\left(t\right)$ (см. приложение).

Ограничиваясь только первыми членами рядов (29) в пределе $\omega\left(\varepsilon,t\right)\to 0$ для реджевского показателя α, находим

$$\alpha=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\lambda g}{4\pi^2\mu\left(-1\pm\sqrt{5}\right)}},$$

что соответствует ранее полученным результатам [4,6].

Таким образом, можно сделать вывод о том,что только последовательный учет особенностей по массе обменной частицы (в случае $p^2\neq m^2$) может обеспечить реджевское поведение амплитуды рассеяния в рассматриваемой нами модели.

Авторы благодарны ректору Бакинского государственного университета профессору Абелю Магеррамову за создание благоприятных условий для плодотворного проведения научных исследований. Один из авторов (Р.К.Дж.) также благодарен А.И.Ахмедову за многочисленные обсуждения и А.Г.Гасанову и Р.А.Али-заде за помощь в компьютерном обеспечении.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Для оценки справедливости полученных результатов для реджевского показателя $\alpha(t)$ были проведены численные решения в следующих случаях:

1) Большие значения обменной массы ($\mu > m$). Ограничиваясь нулевыми членами рядов в (21), получаем алгебраическое уравнение 4-го порядка:

$$\begin{gathered}\Lambda\alpha^4 + 10\Lambda\alpha^3 + (35\Lambda - 2)\alpha^2 + (50\Lambda - 14)\alpha + 24\Lambda - 24 - \omega = 0,\\ \Lambda = \frac{32\pi^2\mu^2\left(-1\pm\sqrt{5}\right)}{m\lambda g},\ \omega = \varepsilon\frac{|\mathbf{p}|^2}{\mu^2},\end{gathered} \tag{П1}$$

численое решение которого при $\omega = 10^{-3}$; 10^{-2}; 10^{-1} и $1), 2)$ $\frac{\mu}{m} = 10; 100$ и $\frac{\mu}{\lambda g} = 10^{-2}; 10^{-1}; 1; 10; 10^2$ дает возможность найти средние значения для $\alpha(t)$, которые при всех этих значениях ω, $\frac{\mu}{m}$, $\frac{\mu}{\lambda g}$ равны $\alpha \approx -2,5$, что хорошо согласуется с выводами, полученные из теории полюсов Редже, и экспериментальными данными [12].

2) Малые значения обменной массы ($\mu < m$). При $n = 0$ (25) перепишем как

$$\begin{gathered}\Lambda = 2\frac{\mu^2}{m^2}\left[\gamma - \frac{1}{2}\ln\frac{\mu^2}{m^2} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\right] - \frac{\omega(\varepsilon,t)}{16}\frac{(\alpha(t)+5)(\alpha(t)+6)}{(\alpha(t)+1)^2(\alpha(t)+2)(\alpha(t)+3)(\alpha(t)+4)}\\ \times e^{\frac{5}{2}\pi}\left(-\frac{\mu^2}{m^2}\right)^{\frac{5}{2}}.\end{gathered} \tag{П2}$$

Проводя численное решение уравнения (П2) при $\omega = 10^{-1}; 10^{-2}; 10^{-3}$; 1) $\frac{\mu}{m} < 3$; 2) $\frac{\mu}{m} < 1$; 3) $\frac{\mu}{m} < 10^{-1}$ (отметим, что значения для $\frac{\mu}{m}$ выбраны из соображений сходимости гипергеометрических функций ${}_3F_2$ и ${}_2F_1$ в случае их аналитического продолжения $\left|\arg\frac{\mu}{m}\right| < \pi$ (см.(23)-(25))) и при значениях $\frac{m}{\lambda g} = 10^2; 10; 1; 10^{-1}; 10^{-2}$, получаем средние значения для $\alpha(t)$ равные $\approx -2,2$.

3) Для нахождения численных значений α при равных значениях масс ($\mu = m$) из (29) при $n = 0$ получим алгебраическое уравнение 5-го порядка для $\alpha(t)$, аналогичное (П1), с

$$\Lambda = \frac{32\pi^2\mu}{\lambda g}\left(-1\pm\sqrt{5}\right),\ \omega = \varepsilon\frac{|\mathbf{p}|^2}{\mu^2};$$

решение которого при $\omega = 10^{-1}$; 10^{-2}; 10^{-3} и $\frac{\mu}{\lambda g} = 10^{-2}$; 10^{-1}; 1; 10; 10^2 дает для каждого отдельного значения ω и $\frac{\mu}{\lambda g}$,равные $\approx -2,5$.

Полученные численные результаты позволяют утверждать, что обменная масса и константа взаимодействия очень слабо влияют на поведение амплитуды рассеяния, что указывает на преобладание в нашей модели рассеяния с обменом легкими частицами. Также следует отметить, что поправка (члены, умноженные на ε) к амплитуде рассеяния вперед при малых значениях передаваемого импульса практически не влияет на поведение амплитуды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B.A.Arbusov, A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze, R.N. Faustov. Phys.Lett., 2 (1962) 150.

2. J.C. Polkinghorne. J. Math. Phys., 4 (1963) 503.

3. D. Amati, S. Fubini, A. Stanghellini. Nuovo Cim., 26 (1962) 896.
L. Bertocchi, S. Fubini, M. Tonin. Nuovo Cim., 25 (1962) 626.

4. Б.А. Арбузов, В.Е. Рочев. ЯФ, 21 (1975) 883.

5. Б.А. Арбузов, В.Ю. Дьяконов, В.Е. Рочев. ЯФ 23 (1976) 904.

6. К.Г. Клименко, В.Е.Рочев. ТМФ, 30 (1977) 191.

7. С.А. Гаджиев, Р.К. Джафаров. Краткие сообщения по физике ФИАН СССР, 11 (1986) 25.

8. R.G. Jafarov, S.A. Hadjiev. Modern Phys. Lett.A, 8 (1993) 237.

9. Р.К. Джафаров. Вестник Бакинского университета, 2 (2001) 43.

10.Г.Бейтмен, А.Эрдейи. Высшие трансцендентные функции. т.1. М.: Наука, 1973. 294 с.

11. А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1986. 800 с.

12. П. Коллинз. Введение в редժевскую теорию и физику высоких энергий. М.: Атомиздат, 1980. 492с.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 мая 2001 года.

Гаджиев С.А., Джафаров Р.К. Р2-2001-100
Уравнение Бете–Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния в лестничном приближении

Исследуется амплитуда рассеяния фермионов и бозонов в лестничном приближении при высоких энергиях. Построена система интегральных уравнений типа Бете–Солпитера для мнимой части амплитуды рассеяния. Найдены решения в виде реджевской асимптотики. Исследовано влияние массовых параметров на поведение амплитуды при высоких энергиях.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2001

Перевод авторов

Gadjiev S.A., Jafarov R.K. P2-2001-100
The Bethe–Salpeter Equation for the Imaginary Part of the Scattering Amplitude in the Ladder Approximation

Scattering amplitude of fermions and bosons in the ladder approximation at high energies is investigated. For the imaginary part of the scattering amplitude the set of Bethe–Salpeter type integral equations is constructed. Solutions of this set in the Regge asymptotic form are found. The impact of mass parameters on the behavior of the amplitude at high energies is studied.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2001

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 08.08.2001
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. л. 1,2
Тираж 425. Заказ 52809. Цена 1 р. 20 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области