P11-2003-249

Е. Ю. Щетинин

О СИЛЬНОЙ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ СОВМЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

Введение

Рассмотрим на единичном интервале I [0,1] функцию $C(x,y)$, определенную на I^2 и удовлетворяющую следующим свойствам:

1) граничные условия:

$$C(x,0)=C(0,y)=0,\ C(x,1)=x,\ C(1,y)=y \text{ для } \forall x,\ y\in I;$$

2) монотонность: $0\le x_1\le x_2\le 1$ и $0\le y_1\le y_2\le 1$, тогда

$$C(x_2,y_2)-C(x_1,y_2)-C(x_2,y_1)+C(x_1,y_1)\ge 0.$$

Функция $C(x,y)$, заданная таким образом, определяет функцию совместного распределения двух случайных величин X,Y с частными функциями распределения F,G и называется функцией копулы. Функцию копулы $C(x,y)$ ввел А.Скляр [1]. Он доказал, что если $H(x,y)$ является функцией совместного распределения двух случайных величин X,Y с частными функциями распределения F,G, тогда всегда можно найти непрерывную функцию $C(x,y)$ такую, что

$$H(x,y)=C(F(x),G(y)).$$

Функция $C(x,y)$ есть функция, определенная дважды стохастической мерой μ на единичном квадрате $I^2=[0,\ 1]\times[0,\ 1]$, т. е. $C(x,y)=\mu([0,\ 1]\times[0,\ 1])$ для $x,y=[0,\ 1]$. Функции $C(x,y)$ являются также функцией Липшица, т. е. для (x_1,y_1), $(x_2,\ y_2)\in I^2$ справедливо

$$\left|C(x_1,y_1)-C(x_2,y_2)\right|\le\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|,$$

и множества функций $C(x,y)$ являются выпуклым компактом пространства непрерывных функций с равномерной нормой. Поэтому естественный путь в решении задачи построения аппроксимации $C(x,y)$ есть ее аппроксимация в топологии равномерной сходимости. Однако, как показали в своей работе Е.Ольсен, В.Дарсоу и др. [2] на примере введенной ими операции произведения функций $C(x,y)$ и $D(x,y)$ следующего вида:

$$(CD)(x,y)=\int_0^1\frac{\partial C}{\partial y}(x,y)\frac{\partial D}{\partial x}(t,y)dt,$$

если последовательность $\{C_n\}$ сходится равномерно к функции C, а последовательность $\{D_n\}$ равномерно сходится к функции D, то отсюда не следует обязательно, что последовательность функции $\{C_nD_n\}$ равномерно сходится к функции CD.

Другой проблемой, возникающей с использованием равномерной сходимости при аппроксимации функций $C(x,y)$, является построение асимптотических оценок различных мер статистической зависимости, таких как коэффициенты Кендалла τ и Спирмена ρ или верхний предел зависимости $\lambda(C)$.

Таким образом, в решении задачи аппроксимации $C(x,y)$ мы приходим к выводу об использовании другого типа сходимости, а именно сильной сходимости в операторной топологии пространства L^p (для этого мы воспользуемся так называемыми марковскими операторами [3]). Цель настоящей работы — определить необходимые и достаточные условия сильной сходимости последовательностей аппроксимаций функций $C(x,y)$. Необходимые определения и предварительные сведения, используемые в дальнейших выводах, даны в следующем параграфе.

1. Марковские операторы и дважды стохастические меры

Определение 1. Дважды стохастической мерой μ называется вероятностная мера, заданная на борелевских множествах единичного квадрата I^2 и удовлетворяющая следующим требованиям: A — борелевское множество на единичном интервале $I=[0,1]$ и λ — мера Лебега на I, тогда

$$\mu(A\times I)=\mu(I\times A)=\lambda(A).$$

Очевидно однозначное соответствие между функциями $C(x,y)$ и дважды стохастическими мерами:

$$C_\mu(x,y)=\mu([0,x]\times[0,y]) \text{ и } \mu_C([0,x]\times[0,y])=C(x,y).$$

Определение 2. Марковским оператором называется линейный оператор $T:L^\infty\to L^\infty$, обладающий следующими свойствами:

1) $T1=1$;
2) $Tf\geq 0$, если $f\geq 0$;
3) $\int_0^1 Tf(t)dt=\int_0^1 f(t)dt$ для всех $f\in L^\infty$.

Марковский оператор ограничен по норме пространства L^∞ и $\|T\|_{L^\infty}=1$. Покажем, что множества марковских операторов T и множества функций $C(x,y)$ изоморфны. Итак, пусть задана функция $C(x,y)$. Определим оператор $T:L^\infty\to L^\infty$ следующим образом:

$$T_C f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 \frac{\partial C}{\partial y}(x,y) f(y) dy.$$

Тогда T_C — марковский оператор. С другой стороны, если T — марковский оператор и можно определить функцию $C_T(x,y)$ в виде

$$C_T(x,y) = \int_0^x T(\chi[0,y])(t)dt, \ (x,y) \in I^2,$$

тогда $C_T(x,y)$ — функция копулы $C(x,y)$.

Определение 3. Пусть последовательность функций $\{C_n\}$ и функция C являются функциями зависимости в определенном выше смысле. Будем говорить, что последовательность $\{C_n\}$ сильно сходится к C, если соответствующий марковский оператор T_{C_n} сходится к марковскому оператору T_C в заданной ими операторной топологии пространства L^1, т. е. имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \left| T_{C_n} f(x) - T_C f(x) \right| dx = 0$$

для всех $f \in L^1$. В дальнейшем будем писать $C_n \Rightarrow C$ при условии, что $\{C_n\}$ сильно сходится к C.

Данное нами определение строгой сходимости имеет следующую возможную вероятностную интерпретацию. Пусть C — функция копулы и T — соответствующий ей марковский оператор. Если $f \in L^1$, то, полагая существование и непрерывность второй смешанной производной $\dfrac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}$, получим

$$Tf(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}(x,y) f(y) dy.$$

Допустим, что отображения $X, Y : I^2 \to I$ определены как $X(x,y) = x$ и $Y(x,y) = y$ и являются случайными величинами. Тогда можно увидеть, что выражение $Tf(x) = E(f(Y) \mid X = x)$ есть условное математическое ожидание случайной величины $f(Y)$ с плотностью функции распределения $\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y}$, заданной на I^2. Введем обозначение для дискретизированной функции C на сетке $M = \left\{ \left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) : 0 \le i, j \le n \right\}$. Пусть $\Delta_{i,j} C$ означает общую массу, индуцируемую на квадрате

$$S_{i,j} = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right] \times \left[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n} \right].$$

Тогда $\Delta_{i,j}(C) = C\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n} \right) - C\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n} \right) - C\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n} \right) + C\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n} \right)$.

Определение 4. Величина $\left(n\Delta_{i,j}(C) \right)_{i,j=1}^{n}$ называется дважды стохастической матрицей, если:

1) $n\Delta_{i,j}(C) \ge 0$;

2) $\sum_{i=1}^{n} n\Delta_{i,j}(C) = 1$;

3) $\sum_{j=1}^{n} n\Delta_{i,j}(C) = 1$.

Определим аппроксимацию функции $C(x, y)$ в следующем виде:

$$\tilde{C}_n(x, y) = n^2 \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{i,j}(C) \int_0^1 \chi_{i,n}(s) ds \int_0^1 \chi_{j,n}(t) dt, \tag{1}$$

где $\chi_{i,n}$ — характеристическая функция интервала $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$. Ниже мы покажем, что $\tilde{C}_n$ удовлетворяет всем свойствам функции копулы C. Назовем $\tilde{C}_n$ аппроксимацией решета функции копулы $C(x, y)$. Также рассмотрим в качестве аппроксимации функции C полиномы Бернштейна

$$B_n(x, y) = \sum_{k,l=1}^{n} C\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n} \right) \binom{n}{k} \binom{n}{l} x^k (1-x)^{n-k} y^l (1-y)^{n-l} =$$

$$= \sum_{k,l=1}^{n} C\left(\frac{k}{n}, \frac{l}{n} \right) p_{k,n}(x) p_{l,n}(y),$$

где $p_{k,n}(x) = (n/k) x^k (1-x)^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Простые вычисления показывают, что

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} B_n(x,y) = n^2 \sum_{k,l=1}^{n} \Delta_{k,l}(C) p_{k-1,n-1}(x) p_{l-1,n-1}(y).$$

Так как для дифференцируемой функции C соответствующий марковский оператор имеет вид

$$(T_C f)(x) = \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} C(x,y) f(y) dy,$$

то марковский оператор, соответствующий аппроксимациям $B_n(x,y)$, можно записать следующим образом:

$$\left(T_{B_n} f\right)(x) = n^2 \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{i,j}(C) \left(\int_0^1 p_{j-1,n-1}(y) f(y) dy \right) p_{i-1,n-1}(x).$$

Тогда марковский оператор для $\tilde{C}_n$ имеет вид

$$\left(T_{\tilde{C}_n} f\right)(x) = n^2 \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{i,j}(C) \left(\int_0^1 \chi_{j,n}(y) f(y) dy \right) \chi_{i,n}(x).$$

2. Методы построения аппроксимаций функций C

Введем в рассмотрение набор функций $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \in L^1$ с такими свойствами:

1) $\varphi_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, n;$

2) $\int_0^1 \varphi_i(x) dx = 1/x, \; i = 1, \ldots, n;$

3) $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i = 1.$

Набор функций $\{\varphi_i\}$ называется разложением единицы. В работе [4] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \in L^1$ — набор функций со свойствами, указанными выше. Тогда справедливы положения:

1) для каждой функции C оператор $T_n : L^\infty \to L^\infty$, определенный как

$$T_n(f)(x) = n^2 \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{i,j}(C) \int_0^1 \varphi_i(y) f(y) dy \varphi_j(x),$$

является марковским оператором;

2) для каждой функции C функция $C_n : I \to I^2$, определенная как

$$C_n(x,y) = n^2 \sum_{i,j=1}^{n} \Delta_{i,j}(C) \int_0^x \varphi_i(t)dt \int_0^y \varphi_j(t)dt,$$

есть функция копулы $C(x,y)$.

Рассмотренные выше аппроксимации решета и Бернштейна — частные случаи аппроксимаций, построенных с помощью разложения единицы. Рассмотрим некоторые новые аппроксимации с помощью набора функций $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \in L^1$. Пусть $\varphi_i^{(0)}(x) = \chi_{\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]}(x)$ для $i \in Z$.

Для $j = 1, 2...$ и $i \in Z$ определим набор функций:

$$\varphi_i^{(j)}(x) = n \int_{-\infty}^{x} \left[\varphi_{i-1}^{(j-1)}(t) - \varphi_i^{(j-1)}(t)\right] dt.$$

Они обладают следующими свойствами:

$$\varphi_i^{(j)}(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(j)}(x) + \varphi_{n+i}^{(j)}(x), & i = 1,...,j, \\ \varphi_i^{(j)}(x), & i = j+1,...,n. \end{cases} \tag{2}$$

Теорема 2. Для каждого фиксированного $j = 1, 2...$ набор $\{\varphi_1^{(j)},..., \varphi_n^{(j)}\}$ является разложением единицы.

Доказательство. Определенные выражением (2) функции $\varphi_i^{(j)}$ обладают свойствами:

1) $\varphi_i^{(j)}$ — кусочный полином степени j;

2) $\sup p(\varphi_i^{(j)}) = \left[\frac{i-j-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$;

3) $\varphi_i^{(j)} \geq 0$;

4) $\sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i^{(j)}(x) = 1$;

5) $\varphi_i^{(j)}(x) = \varphi_{j+1}^{(j)}\left(x + \frac{j+1-i}{n}\right)$ для $i \in \mathbf{Z}$.

Для $\varphi_i^{(j)} \in L^1, \varphi_i^{(j)} \geq 0, x \in I$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^{(j)}(x) = \sum_{i=1}^{n+j} \varphi_i^{(j)}(x) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \varphi_i^{(j)}(x) = 1.$$

Из свойства 5) при $i = j+1,...,n$ следует, что

$$\int_0^1 \varphi_i^{(j)}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j+1}^{(j)}(x)dx.$$

Заметим что, с другой стороны,

$$\int_0^{i/n} \varphi_i^{(j)}(x)dx = \int_1^{n+i/n} \varphi_{n+i}^{(j)}(x)dx,$$

так что при $i = 1, \ ..., \ j$

$$\int_0^1 \varphi_i^{(j)}(x)dx = \int_0^{i/n} \varphi_i^{(j)}(x)dx + \int_{(n+i-j-1)/n}^1 \varphi_{n+i}^{(j)}(x)dx =$$

$$= \int_1^{(n+i)/n} \varphi_{n+i}^{(j)}(x)dx + \int_{(n+i-j-1)/n}^1 \varphi_{n+i}^{(j)}(x)dx =$$

$$= \int_{(n+i-j-1)/n}^{n+i} \varphi_{n+i}^{(j)}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{n+i}^{(j)}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{j+1}^{(j)}(x)dx.$$

Таким образом,

$$\int_0^1 \varphi_i^{(j)}(x)dx = 1/x, \quad i = 1, \ ..., \ n,$$

откуда следует доказательство утверждения теоремы 2.

3. Сильная сходимость последовательностей аппроксимаций функций копулы $C(x, y)$, построенных разложением единицы

Докажем предварительно несколько лемм, которые потребуются нам для доказательства необходимых теорем.

Лемма 1. Пусть последовательность $\{T_n\}, n = 1, 2...$ — марковские операторы и Λ — плотное подмножество на $I = [0,1]$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для $f(x) = \chi_{[0,\lambda]}(x)$ и $\lambda \in \Lambda$

$$\lim_{n\to\infty} T_n(f)(x) - T(f)(x), \quad x \in [0,1]; \tag{3}$$

2) для $p \in [1, \infty), f(x) = \chi_{[0,\lambda]}(x), \quad \lambda \in \Lambda$,

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n(f) - T(f) \|_p = 0; \tag{4}$$

3) $T_n \to T$ в операторной топологии пространства L^p, $p \ge 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |T_n(f) - T(f)|^p = 0, \quad f \in L^p. \tag{5}$$

Доказательство. Так как марковские операторы ограничены по норме пространства L^∞ единицей, то получим $\| T_n(f) \|_\infty \le \| f \|_\infty$, откуда следует $\| T(f) \|_\infty \le \| f \|_\infty$ для $f \in L^\infty[0,1]$. Тогда из (3) по теореме Лебега о пределе ограниченной последовательности имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left| T_n(\chi_{[0,\lambda]} - T(\chi_{[0,\lambda]})) \right|^p = 0$$

для любого $\lambda \in [0,1]$ и $p \ge 1$, откуда и вытекает утверждение 2) леммы 1.

Докажем теперь утверждение 3). Любая функция $f \in L^p$, $p \in [1, \infty)$, может быть приближена последовательностью ступенчатых функций $f_n = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_{jn} \chi_{[0,\lambda_{jn}]}$ таких, что можно подобрать $\lambda_{j,n}$, чтобы

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \|_p = 0.$$

С учетом (4) для $m = 1, 2, \ldots$ получим

$$\lim_{n\to\infty} \| T_n(f_m) - T(f_m) \|_p = 0.$$

Таким образом, последовательность операторов T_n сильно сходится (в топологии пространства L^p) к оператору T на плотном подмножестве линейных комбинаций ступенчатых функций из пространства L^p. Тогда последовательность T_n сходится на всем пространстве L^p к оператору T, что и означает доказательство утверждения 3) и всей леммы 1.

Следствие 1. Аппроксимация методом решета $\tilde{C}_n$, $n = 2^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, сильно сходится к функции C, т. е. $\tilde{C}_{2^m} \Rightarrow C$ при $m \to \infty$.

Доказательство. В соответствии с леммой 1 необходимо только показать, что для $\lambda = j / 2^{m_0}$

$$\lim_{m\to\infty} T_{\tilde{C}_n}\left(\chi_{[0,\lambda]}\right)(x) = T_C\left(\chi_{[0,\lambda]}\right)(x), \quad x \in [0,\ 1].$$

Но $T_C\left(\chi_{[0,\lambda]}\right)(x) = \dfrac{\partial C(x,y)}{\partial x}$, и если $i_0 - 1 < nx < i_0$ и $n \ge 2^{m_0}$, то

$$T_{\tilde{C}_n}\left(\chi_{[0,\lambda]}\right)(x) = \frac{\partial \tilde{C}_n(x,\lambda)}{\partial x} = n\left[C\left(\frac{i_0}{n}, \lambda\right) - C\left(\frac{i_0 - 1}{n}, \lambda\right) \right],$$

откуда и следует искомый результат.

Лемма 2. Пусть заданы $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — набор функций со свойствами, определенными в условиях теоремы 2. Определим также $\phi_i(x) = n\int_0^x \varphi_i(t)dt,\ i = 1,...,n.$ Тогда при $n \to \infty$ справедливы следующие оценки:

$$\sum_{|x-i/n|\geq\delta} \varphi_i(x) = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{6}$$

$$\sum_{|x-i/n|\geq\delta} \left|\phi_i(x) - \phi_{i+1}(x)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{7}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\left|\varphi_i(x) - \varphi_{i+1}(x)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{8}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left|x - \frac{i}{n}\right|\left|\phi_i(x) - \phi_{i+1}(x)\right| = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{9}$$

Доказательство. Проанализируем случай, когда $\varphi_i = \varphi_i^{(j)}$, $i = 1,\ ...,\ n.$ Принимая во внимание ограничения снизу на индекс суммирования, можно сделать вывод, что суммы (6), (7) для всех достаточно больших n близки к нулю, и, следовательно, выражения (6), (7) справедливы при $n \to \infty$.

Теперь рассмотрим доказательство для аппроксимаций Бернштейна. Положим $\varphi_i = p_{i-1,n-1}, i = 1,...,n.$ Выражение (6) является очевидным свойством полиномов Бернштейна [4]: для каждого $\delta > 0$ и $s = 1,\ 2,\ ...$ найдется такая константа $C = C(\delta, s)$, что

$$\sum_{|i/n-x|\geq\delta} p_{in}(x) \leq Cn^{-s},\ \ n = 1,\ 2,\ ...\ \text{и}\ x \in [0,1].$$

Также выражение (8) следует из равенств

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n-1} - x\right)^2 p_{i,n-1}(x) = \frac{x(1-x)}{n-1}$$

и

$$p_{i-1,n-1}(x) - p_{i,n-1}(x) = \frac{1}{x(1-x)}\left(\frac{i}{n} - x\right)p_{i,n}(x).$$

Выражения (7) и (9) могут быть получены из (6), (8), если принять во внимание, что

$$p_{i-1,n-1}(x) - p_{i,n-1}(x) = \frac{p'_{i,n}(x)}{n}.$$

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_{1,n}, \ldots, \varphi_{n,n}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность разложений единицы. Если для каждого $n = 1, 2, \ldots$ разложение $\varphi_{1,n}, \ldots, \varphi_{n,n}$ удовлетворяет оценкам (6)–(9), тогда аппроксимации C_n функций C, полученные с использованием набора функций $\varphi_{1,n}, \ldots, \varphi_{n,n}$ со свойствами 1)–5), указанными в теореме 2, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\frac{\partial C_n(x,y)}{\partial x} \to \frac{\partial C(x,y)}{\partial x},$$
$$\frac{\partial C_n(x,y)}{\partial y} \to \frac{\partial C(x,y)}{\partial y},$$

откуда следует, что аппроксимации C_n сильно сходятся в топологии пространства L^p, $p \geq 1$, к функции C, т. е.

$$C_n \Rightarrow C \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть

$$\phi_0 = 0, \ \ \phi_{n+1} = 0, \ \ \phi_i(x) = n\int_0^x \phi_i(t)dt, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Тогда

$$C_n(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} \Delta_{i,j}(C)\phi_i(x)\phi_j(y). \tag{10}$$

Учитывая значения функций φ_i на границах, выражение (10) можно преобразовать к следующему виду:

$$C_n(x,y) = \sum_{i,j=0}^{n} C\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right)\left[\phi_i(x) - \phi_{i+1}(x)\right]\left[\phi_j(y) - \phi_{j+1}(y)\right].$$

Тогда

$$\frac{\partial C_n(x,y)}{\partial x} = \sum_{i,j=0}^{n} C\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) n\left[\phi_i(x) - \phi_{i+1}(x)\right]\left[\phi_j(y) - \phi_{j+1}(y)\right]. \tag{11}$$

Так как функция C — липшицевая функция (по теореме Радемахера [5]), то C дифференцируема почти всюду на квадрате I^2. Пусть точка (x, y) является такой точкой функции C и в ней выполнены равенства (6), (8). Тогда для i, $j = 0, 1, \ldots, n$ получим

$$C\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)=C(x,y)+\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\left(\frac{i}{n}-x\right)+\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}\left(\frac{j}{n}-y\right)+$$
$$+\eta\left(\frac{i}{n}-x,\frac{j}{n}-y\right)\sqrt{\left(\frac{i}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{n}-y\right)^2}, \qquad (12)$$

где $\eta(s,t)\to 0$ при $(s,t)\to(0,0)$ и $|\eta|\le M$.

Пусть $\eta_{i,j}=\eta\left(\frac{i}{n}-x,\frac{j}{n}-y\right)$ и $\delta_{i,j}=\sqrt{\left(\frac{i}{n}-x\right)^2+\left(\frac{j}{n}-y\right)^2}$. Подставим (12) в (11) и получим

$$\frac{\partial C_n(x,y)}{\partial x}=\sum_{i,j=0}^{n}nC(x,y)[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]\,[\varphi_j(y)-\varphi_{j+1}(y)]+$$
$$+\sum_{i,j=0}^{n}n\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}\left(\frac{i}{n}-x\right)[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]\,[\varphi_j(y)-\varphi_{j+1}(y)]+$$
$$+\sum_{i,j=0}^{n}n\frac{\partial C(x,y)}{\partial y}\left(\frac{i}{n}-y\right)[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]\,[\varphi_j(x)-\varphi_{j+1}(x)]+ \qquad (13)$$
$$+\sum_{i,j=0}^{n}n\eta_{i,j}\delta_{i,j}[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]\,[\varphi_i(y)-\varphi_{i+1}(y)]$$

Заметим, что

$$\sum_{j=0}^{n}[\phi_j(y)-\phi_{j+1}(y)]=\phi_0(y)-\phi_{n+1}(y)=1$$

и
$$\sum_{i=0}^{n}[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]=\varphi_0-\varphi_{n+1}=0$$

согласно принятым нами равенствам $\varphi_0=\varphi_{n+1}=\phi_{n+1}=0$ и $\phi_0=1$. Откуда, суммируя по частям (12), получим

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}-x\right)[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)]=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(x)=\frac{1}{n}.$$

Учитывая эти три равенства, можно видеть, что в (13) первая сумма равна нулю, вторая равна $\frac{\partial C(x,y)}{\partial x}$, третья также равна нулю. Оценим четвертую сумму в выражении (13):

$$S_n=\sum_{i,j=0}^{n}n\eta_{i,j}\delta_{i,j}[\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)][\phi_j(y)-\phi_{j+1}(y)]. \qquad (14)$$

Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $|\eta_{i,j}|<\varepsilon$ как только

$$\delta_{i,j} < \delta \ . \tag{15}$$

Разобьем суммирование в (14) на две части:

$$S_n = \sum_{\delta_{i,j}<\delta} + \sum_{\delta_{i,j}\geq\delta} = S_< + S_\geq.$$

Чтобы оценить $S_<$, используем неравенство треугольника, а также (8), (9), (15):

$$|S_<| \leq \varepsilon \sum_{\delta_{ij}} n\delta_{ij} \, |\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)| \left|\phi_j(y)-\phi_{j+1}(y)\right| \leq$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n} 2n\left|\frac{i}{n}-x\right| |\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)| + \varepsilon \sum_{j=0}^{n} 2n\left|\frac{j}{n}-y\right| \left|\phi_j(y)-\phi_{j+1}(y)\right| = \varepsilon O(1).$$

Далее, рассмотрим $S_\geq$. Так как $\left|\eta_{ij}\right| \leq M$ и $\delta_{ij} < 2$, используя (6) и (7), получим

$$\left|S_\geq\right| \leq n \sum_{\delta_{ij}\geq\delta} 2M\left|\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)\right|\left|\phi_j(x)-\phi_{j+1}(x)\right| \leq$$

$$\leq 2Mn \sum_{\left|\frac{i}{n}-x\right|\geq\delta/2} 2\left|\varphi_i(x)-\varphi_{i+1}(x)\right| + \sum_{\left|\frac{j}{n}-y\right|\geq\delta/2} 2\left|\phi_j(y)-\phi_{j+1}(y)\right| = 2Mno\left(\frac{1}{n}\right) = O(1).$$

Таким образом, $| S_n \leq \varepsilon + O(1) |$ при $n \to \infty$. В итоге, можно утверждать, что справедливо следующее:

$$\frac{\partial C_n(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} + S_n \to \frac{\partial C(x,y)}{\partial x}.$$

Аналогично мы можем доказать, что

$$\frac{\partial C_n(x,y)}{\partial y} \to \frac{\partial C(x,y)}{\partial y}.$$

Окончательно, используя *лемму 1*,

$$T_{C_n}\left(\chi[0,\lambda]\right)(x) = \frac{\partial C_n(x,y)}{\partial x} \to \frac{\partial C(x,y)}{\partial x} \quad \text{для } \forall x,\lambda \in I,$$

$C_n \Rightarrow C$ при $n \to \infty$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть B_n — последовательность аппроксимаций функции C полиномами Бернштейна. Тогда $B_n \Rightarrow C$ при $n \to \infty$.

Следствие 2. Пусть C_n— последовательность аппроксимаций функции C, построенных с использованием разложения единицы, набора функций $\varphi_1^{(j)}$, ..., $\varphi_n^{(j)}$, введенных в теореме 2. Тогда для фиксированного значения j ($j = 1, 2, \ldots$) $C_n \Rightarrow C$ при $n \to \infty$.

Литература

1. Sclar A., Schweizer B., Probabilistic Metric Spaces. Elsevier North Holland, New York, 1983.
2. Olsen E.T., Darsow W.F., Nguyen B. Copulas and Markov processes, Int. J. Math., 1992, № 36, p. 600-642.
3. Brown J.R., Approximation theorems for Markov operators, Pacific J. Math., 1966, № 16, p. 13-23.
4. DeVore R.A., Lorentz G.G., Costructive Approximation. Springer-Verlag, 1993.
5. Lojasiewicz S., Introduction to the theory of real functions, John Wiley & Sons, Chichester, 1988.

Получено 30 декабря 2003 г.

Щетинин Е. Ю. Р11-2003-249
О сильной сходимости аппроксимаций совместных
функций распределения многомерных случайных величин

Работа посвящена вопросам построения аппроксимаций совместных функций распределения многомерных случайных величин. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия сильной сходимости аппроксимаций копул в операторной топологии пространства L^p. Построены семейства аппроксимаций копул, обладающих таким свойством.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий и Научном центре прикладных исследований ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2003

Перевод автора

Shchetinin Eu. Yu. P11-2003-249
On Strong Convergence of Approximations
of Multivariate Distributions Functions

We established strong convergence of empirical copulae and of some approximating copulae, namely, the checkerboard approximation and the more general cardinal spline approximation in L^p spaces. We used unified approach via partitions of unity.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies and at the Scientific Center of Application Research, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2003

Редактор *О. Г. Андреева*
Макет *Е. В. Сабаевой*

Подписано в печать 03.03.2004.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,94. Уч.-изд. л. 0,8. Тираж 310 экз. Заказ № 54342.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/