

ЭМИССИЯ ФРАГМЕНТОВ В СТОЛКНОВЕНИЯХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ЭНЕРГИЙ НА ОСНОВЕ НЕРАВНОВЕСНОГО КВАНТОВОГО ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОДХОДА

А. Т. Дьяченко^{1, 2, *}

¹ Петербургский институт ядерной физики им. Б. П. Константинова
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»,
Гатчина, 188300, Россия

² Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I, Санкт-Петербург, 190031, Россия

Исходя из уравнения Клейна–Фока–Гордона сформулирован неравновесный гидродинамический подход для описания столкновений тяжелых ионов промежуточных энергий и проведено сравнение вычисленных дифференциальных сечений испускания фрагментов с экспериментальными данными ИФВЭ (Протвино), ИТЭФ (Москва) и коллаборации BM@N (ОИЯИ, Дубна). В данном подходе получено описание экспериментальных данных по двойным дифференциальным сечениям испускания ядер ^1H , ^2H и ^3H в реакции (19,6 ГэВ/нуклон) $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow f + X$ (ИФВЭ) и реакциях ядер ^{40}Ar при энергии 3,2 ГэВ/нуклон с ядрами ^{64}Cu и ^{208}Pb (коллаборация BM@N), а также ^{11}Be и ^{12}B под углом $3,5^\circ$ в реакции (300 МэВ/нуклон) $^{12}\text{C} + ^9\text{Be} \rightarrow f + X$ (ИТЭФ). Проведено сравнение с другими моделями и проанализирована динамика процесса фрагментации.

Based on the Klein–Fock–Gordon equation, a nonequilibrium hydrodynamic approach is formulated to describe collisions of intermediate-energy heavy ions, and a comparison of the calculated differential fragment emission cross sections with experimental data from IHEP (Protvino), ITEP (Moscow), and the BM@N collaboration (JINR, Dubna) is carried out. In this approach, a description of experimental data on double differential emission cross sections of ^1H , ^2H and ^3H nuclei in the reaction (19.6 GeV/nucleon) $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ (IHEP) and reactions of ^{40}Ar nuclei at an energy of 3.2 GeV/nucleon with ^{64}Cu and ^{208}Pb nuclei (BM@N collaboration), as well as ^{11}Be and ^{12}B at an angle of 3.5° in the reaction (300 MeV/nucleon) $^{12}\text{C} + ^9\text{Be}$ (ITEP) is obtained. A comparison with other models is made, and the dynamics of the fragmentation process is analyzed.

PACS: 25.10.+s

ВВЕДЕНИЕ

Исследование фрагментации в процессе столкновений тяжелых ионов различных энергий представляет теоретический интерес для изучения фазовой КХД-диаграммы образующихся состояний с различными сте-

* E-mail: dyachenko_a@mail.ru

пенями свободы [1–3], а также имеет важное прикладное значение для практических ядерных и медицинских технологий [4, 5]. В разные годы было предложено большое количество теоретических моделей фрагментации, варьирующихся от статистических моделей [1–3, 6, 7] и модели коалесценции [8–11] до статистической модели мультифрагментации [12–14] и различных версий квантовой молекулярной динамики [15–17].

С другой стороны, Л. Д. Ландау в работах [18–20] обратил внимание на образование ударной волны как на единственную возможность реализации первой стадии процесса столкновений протонов и ядер с ядрами высокой энергии и предложил гидродинамическую теорию множественного рождения вторичных частиц. В наших работах [21, 22] была предложена связь уравнения Клейна–Фока–Гордона при учете диссипации с уравнениями квантовой релятивистской гидродинамики. В работе [23] была установлена связь с гидродинамикой для уравнения Шредингера в нерелятивистском случае.

Не останавливаясь здесь подробно на многообразии различных подходов к процессу фрагментации, отметим, что нас интересует механизм фрагментации для описания эксперимента ФРАГМ (ИТЭФ) при столкновениях ядер углерода с бериллиевой мишенью при энергии налетающих ядер углерода 300 МэВ/нуклон [24]. Для нас представляет интерес развитие неравновесного гидродинамического подхода для описания испускания высокоэнергетических вторичных частиц, в котором нами ранее было рассмотрено описание [25, 26] экспериментальных данных эксперимента ФРАГМ по двойным дифференциальным сечениям испускания кумулятивных протонов [27] и пионов [28] в реакциях углерода с бериллиевой мишенью.

Также недавно [29] в нашем подходе были описаны экспериментальные инвариантные дифференциальные сечения испускания протонов, пионов, каонов и антипротонов в реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ при энергии 19,6 ГэВ/нуклон, полученные на ускорителе У-70 (ИФВЭ, Протвино). Поэтому представляет интерес применение нашего подхода к описанию экспериментальных данных ИФВЭ по испусканию протонов, дейтронов и тритонов в реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ при этой же энергии на фиксированной мишени [30]. А также представляет несомненный интерес рассмотрение описания недавно полученных экспериментальных данных коллаборацией BM@N по испусканию этих легких фрагментов в реакциях налетающих ионов аргона при энергии 3,2 ГэВ/нуклон с ядрами меди и свинца [31].

Здесь мы предложили простой алгоритм для описания экспериментальных дифференциальных сечений испускания под углом $3,5^\circ$ ядер ^{11}Be и ^{12}B в эксперименте ФРАГМ для налетающих на бериллиевую мишень ядер углерода при энергии 300 МэВ/нуклон с использованием неравновесной гидродинамики и рассмотренной нами ранее модели коалесценции [11, 32] и статистической модели фрагментации Фешбаха,

Хуанга и Голдхабера [6, 7]. Описание этих экспериментальных данных получилось лучше, чем в расчетах по каскадным моделям [33, 34] и модели квантовой молекулярной динамики [16], проведенных в работе [24].

Далее в разд. 1, исходя из уравнения Клейна–Гордона, сформулирован неравновесный гидродинамический подход, в разд. 2 рассмотрена гидродинамическая модель фрагментации, в разд. 3 приведено двойное дифференциальное сечение испускания фрагментов и проведено сравнение с экспериментальными данными, в заключении приведены основные выводы работы.

1. УРАВНЕНИЯ КВАНТОВОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Уравнения релятивистской гидродинамики могут быть связаны с эффективным уравнением Клейна–Фока–Гордона. Согласно результатам наших работ [21, 22] оно имеет вид

$$-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^0 \partial x_0} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^l \partial x_l} = \frac{2m}{\hbar^2} (U_f + J + mc^2/2) \Psi \quad (1)$$

и содержит эффективное среднее поле $U_f = mc^2/(1 - U/mc^2)^2/2 - mc^2/2$, где $U = U(\rho)$ — эффективный, зависящий от плотности ρ средний нуклонный потенциал; m — нуклонная масса; c — скорость света; $\hbar$ — постоянная Планка, а также диссипативный член $J = \kappa(I/\rho)$, где I — плотность тепловой энергии, κ — показатель адиабаты $\kappa = 3q + (5/3)(1 - q)$. Дополнительно к уравнению Клейна–Гордона (1) с диссипативным членом или уравнениям гидродинамики (уравнению непрерывности и уравнению Эйлера) должно быть добавлено уравнение для теплового члена

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E v_l}{\partial x_l} = -\nabla^l (v_l P), \quad (2)$$

где $E = \frac{\rho mc^2 + e + P}{1 - (v/c)^2} - P$, $e = e_{\text{kin}} + e_{\text{int}}$, e_{kin} включает квантовые члены и плотность тепловой энергии I , плотность энергии взаимодействия $e_{\text{int}} = \int_0^\rho U_f d\rho$. При этом давление $P = -\frac{d(e/\rho)}{d(1/\rho)}$. Уравнение для функции распределения f , и тем самым для фактора q , имеет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{f_0 - f}{\tau}, \quad (3)$$

где f_0 — локально равновесная функция распределения; τ — время релаксации. Решение уравнения (3) ищется для функции распределения в виде $f = f_1 q + f_0(1 - q)$, f_1 — неравновесная функция распределения.

Из уравнения (1) следуют уравнения релятивистской квантовой гидродинамики [22], содержащие квантовый потенциал Маделунга

$$\frac{\partial \rho u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho u_l}{\partial x_l} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (mc^2 \rho u_0 u_k)}{\partial x_0} + \frac{\partial (mc^2 \rho u_k u_l)}{\partial x_l} = \\ = -\rho \frac{\partial (U_f + J)}{\partial x_k} - \rho \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \rho^{1/2}}{\rho^{1/2} c^2 \partial t^2} - \frac{\Delta \rho^{1/2}}{\rho^{1/2}} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где u_k — четырехскорость, которая для $l = 1, 2, 3$ равна $u^l = v_l/c/\sqrt{1-(v/c)^2}$, $u_l = -u^l$, а $u_0 = 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$, где $\mathbf{v}$ — обычная трехмерная скорость. Уравнения (4) и (5) должны быть дополнены уравнениями (2) и (3).

В наших работах [25, 26] показано, что на начальной стадии процесса столкновения тяжелых ионов образуется ударная волна с изменяющимся фронтом, приводящая к образованию горячего пятна — hot spot — источника быстрых частиц. При этом неравновесная компонента важна на начальной стадии, а на стадии расширения hot spot она не так существенна, и уравнения (2)–(5) упрощаются. Это будет рассмотрено в следующем разделе.

2. ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФРАГМЕНТАЦИИ

Л. Д. Ландау обратил внимание [18–20] на распространение ударной волны как на единственную возможность реализации первой стадии процесса столкновений протонов и ядер с ядрами и предложил одномерное решение уравнений гидродинамики для последующей адиабатической стадии расширения системы при столкновении протонов высокой энергии. В нашем гидродинамическом подходе после прохождения ударной волны с изменяющимся фронтом [35] образуется горячее пятно — hot spot — источник высокоэнергетических частиц [25, 26, 29]. После первоначального сжатия начинается процесс расширения hot spot.

В приближении для плотности $\rho = \rho(t)$ и давления $P = P(t)$ для хаббловского закона для четырехскорости $\mathbf{cu}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}/(\sqrt{1-(v/c)^2}) = H\mathbf{r}$, где $H(t) = d(R)/dt/R$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор расширяющейся среды с максимальным, зависящим от времени t , значением для размера hot spot $R(t)$, уравнения гидродинамики (4), (5) сводятся к уравнениям

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H\rho = 0, \quad (6)$$

$$\frac{dH}{dt} + H^2 = 0. \quad (7)$$

Эти уравнения имеют простое решение

$$H = 1/t, \quad \rho = \rho_1 t_0^3/t^3, \quad (8)$$

где t_0 — начальный момент времени. С учетом уравнения (2) имеем $I = I_1(\rho/\rho_1)^\kappa$ для адиабатического расширения, где I_1 — независимый от ρ коэффициент, находящийся из совместного решения трех уравнений гидродинамики и позволяющий находить температуру ударной волны, $\rho_1 = \rho(t_0)$ — максимальная плотность нуклонов на ударной волне. Используя это приближенное решение в следующем по порядку приближении, можно получить линейные уравнения

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + H \mathbf{r} \nabla \delta + \nabla c \mathbf{u} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial c \mathbf{u}}{\partial t} + H c \mathbf{u} + H \mathbf{r} \nabla c \mathbf{u} = -c_s^2 \nabla \delta, \quad (10)$$

где $\delta = (\delta \rho)/\rho$ — относительное возмущение плотности; $c_s^2 = (dP)/(md\rho)$ — квадрат скорости звука c_s . После дифференцирования (10) по $\mathbf{r}$ и последующей подстановки $\nabla c \mathbf{u}$ из (9) в (10) с учетом (8) и радиальной компоненты в виде $\delta_r = \exp(-r/a(t))$, где $a(t) = R(t)$, имеем в линейном приближении

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} - c_s^2 \Delta \delta = 0, \quad (11)$$

где $\nabla^2 = \Delta$ — оператор Лапласа. Переменные здесь разделяются $\delta = \delta_r(r)\delta_1(t)$, и для зависящей от времени $\delta_1(t)$ получается линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 \delta_1}{dt^2} + \frac{2}{t} \frac{d\delta_1}{dt} - \frac{c_s^2}{a^2} \delta_1 = 0. \quad (12)$$

Понижая порядок уравнения (12) заменой $\delta_1 = \exp(\int Q dt)$, получаем для Q нелинейное уравнение первого порядка

$$\frac{dQ}{dt} + Q^2 + \frac{2Q}{t} - \frac{c_s^2}{a^2} = 0. \quad (13)$$

Для гладкой функции $Q(t)$, полагая $dQ/dt = 0$, находим два корня уравнения (13) $Q_{1,2} = -1/t \pm K(t)$, где $K(t) = \sqrt{1/t^2 + (c_s/a)^2}$. Можно найти поправку к этому асимптотическому решению, если подставить

$\delta_1 = C(t) \exp\left(\int_{t_0}^t Q dt\right)$ в уравнение (12), и для гладкой функции $C(t)$

находим поправку $C(t) = 1/\sqrt{K(t)}$, т. е. для δ_1 находим приближенное аналитическое решение

$$\delta_1 = \exp(-\ln(t/t_0))/\sqrt{K(t)} \times \left(C_1 \exp\left(\int_{t_0}^t K(t) dt\right) + C_2 \exp\left(-\int_{t_0}^t K(t) dt\right) \right), \quad (14)$$

где постоянные коэффициенты C_1 и C_2 ($C_1 = -C_2$) находятся из начальных условий.

Из формулы (14) можно видеть экспоненциально растущий со временем t первый член и наступление фрагментации для расширяющегося файербола (hot spot) при $t > 2t_0 = 2a/c_s$. Действительно, интеграл от показателя экспоненты в (14) при малых $t - t_0$ равен $\int_{t_0}^t K(t) dt \approx \sqrt{y} (t - t_0)/t_0$, где $y = ((c_s/a)t_0)^2 + 1$. Здесь мы положили a , равное радиусу hot spot в начальный момент времени t_0 , $a = R(t_0) = c_s t_0$. После чего, разлагая первый член в (14) в ряд вблизи $t = t_0$ и полагая $\delta_1(t) = 1$, когда возмущение становится большим, получаем условие $t > 2t_0 = 2a/c_s$, при котором $\delta\rho > \rho$, и гидродинамическая система становится неустойчивой. Основной вклад разложения экспоненты в первом члене формулы (14) при малых $t - t_0$ вносит член, полученный при интегрировании $K(t)$: $\sqrt{2} (t - t_0)/t_0$, из которого надо еще вычесть $(t - t_0)/t_0$ за счет общего в формуле (14) множителя при малых $(t - t_0) \rightarrow 0$ и умножить всю скобку на 2, поскольку $C_1 = -C_2$. Отсюда и получается условие $t - t_0 > t_0 = a/c_s$. Таким образом, до фрагментации системы звуковая волна должна пройти радиус hot spot $R(t_0) = a$ порядка двух раз, т. е. вперед и назад.

Подобное гидродинамическое рассмотрение имеет аналогию и с расширяющейся ранней Вселенной при образовании звезд и галактик [36] (известная джинсовская неустойчивость).

Если учесть квантовые члены в уравнении (5), это приводит к дополнительному члену в уравнении (12): $(\hbar^2/(2m^2 a^4)) \delta_1$ в левой его части, тогда будет $K(t) = \sqrt{1/t^2 + (c_s/a)^2 - 1/2(\hbar/ma^2)^2}$. Это означает, что при малых a ($a < \hbar/\sqrt{2}mc_s \approx$ фм) подкоренное выражение для $K(t)$ становится отрицательным с увеличением t и $K(t)$ становится мнимым, т. е. нет растущего решения с увеличением времени t . Значит, при малых радиусах hot spot квантовые члены в гидродинамике приводят к устойчивости по отношению к фрагментации.

3. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМИ ДАННЫМИ

В предыдущем разделе получено приближенное аналитическое решение для начала фрагментации в гидродинамическом подходе. В нашем подходе [25, 26] после образования hot spot и его последующей гидродинамической эволюции фрагментация наступает по достижении системой критической плотности ρ^* , определяемой из условия $\partial U/\partial \rho = 0$, где $U(\rho)$ — среднее самосогласованное поле. После чего наступает стадия разлета, стадия замораживания с образованием нуклонов и фрагментов, которую можно описать в терминах модели коалесценции [11, 32, 37, 38].

При этом двойное дифференциальное сечение в реакции $A + B \rightarrow f + X$ имеет вид

$$E_f \frac{d^2\sigma}{p_f^2 dp_f d\Omega} = \frac{2\pi(2s+1)}{(2\pi\hbar)^3} \times \\ \times \int Gb db \gamma N(E - \mathbf{p}\mathbf{v}) F \exp\left(\gamma \frac{\mu N + \nu Z - N(E - \mathbf{p}\mathbf{v})}{T}\right) d\mathbf{r}, \quad (15)$$

где b — параметр удара; s — спин фрагмента; E_f и $\mathbf{p}_f$ — энергия и импульс фрагмента; E и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс нуклона; N и Z — массовое и зарядовое число фрагмента; μ и ν — его химический и зарядовый потенциалы; $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ и $T(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей и поле температур, которые находятся из решения уравнений на стадии замораживания; $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ — лоренц-фактор; $G = \sigma_t/\sigma_g$ — фактор, учитывающий отличие полного сечения σ_t от геометрического σ_g при образовании hot spot, и Ω — телесный угол соответственно. Здесь в отличие от [32] и в согласии с [2, 3, 14] мы перешли от ферми- и бозе-распределений фрагментов к больцмановскому распределению, ввели зарядовый потенциал ν и еще ввели фактор

$$F = \frac{(2\pi\hbar)^3}{(2\pi\sigma_N^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_{0f})^2}{2\sigma_N^2}\right) \rho^* \quad (16)$$

согласно статистической модели фрагментации Фешбаха, Хуанга и Гольдхабера [6, 7], где входящая в (16) дисперсия $\sigma_N^2 = \sigma_0^2 \frac{N(A-N)}{(A-1)}$, A — массовое число фрагментирующего ядра, N — массовое число фрагмента; $\mathbf{p}_{0f}$ — импульс фрагмента, соответствующий нуклонному полю скоростей [37]. Здесь в формуле (15) $\delta N = 2 \times \exp\left(\gamma \frac{\mu N + \nu Z - N(E - \mathbf{p}\mathbf{v})}{T}\right) \frac{p_f^2 dp_f d\Omega d\mathbf{r}}{(2\pi\hbar)^3}$ — найденное в термодинамике число вылетающих нуклонов в фазовом объеме фрагмента. С ним получается правильное и близкое по смыслу к результатам [3] выражение для интегрального выхода фрагментов:

$$Y_{N,Z} \sim \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mT}\right)^{-3/2} N^{3/2} \exp\left(\frac{\mu N + \nu Z}{T}\right).$$

Дисперсия σ_0 может быть выражена по модели Гольдхабера через импульс Ферми $\sigma_0^2 = \langle p^2 \rangle / 3 = p_F^2 / 5$, где импульс Ферми $p_F = ((3/2)\pi^2 \rho_0)^{1/3} \hbar$, $\rho_0 = 0,145 \text{ фм}^{-3}$. Это относится к фрагментации «холодных спектаторов», а у нас здесь рассматривается фрагментация нагретого hot spot с p_F , зависящим от температуры T . Поэтому здесь мы использовали интерполяционную формулу $\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \frac{3}{5} E_F \frac{(N-3)}{N} + \frac{3}{2} T \frac{(A-N)}{A}$ для фрагментов с $A > N > 3$, где энергия Ферми

«холодного» ядра $E_F = 35$ МэВ. При $T = 0$ мы получаем импульс Ферми, близкий к модели Гольдхабера, а для легких ядер с N в несколько единиц получаем температурное выражение для дисперсии σ_0 , которое обсуждается в [6, 7, 37].

Однако при сравнении с экспериментальными данными для испускания легких фрагментов фактор F мы усреднили и положили его равным 1, т. е. опускаем его в формуле (15) аналогично работам [2, 3, 14, 32].

На рис. 1 приведены инвариантные двойные дифференциальные сечения испускания протонов, дейтронов и тритонов под углом 40° в реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow f + X$ при энергии 19,6 ГэВ/нуклон для налетающих ядер ^{12}C . Результаты расчетов по формуле (15) (сплошная линия — протоны, штриховая — дейтроны, штрихпунктирная — тритоны), точки — экспериментальные данные из работы [30], полученные на ускорителе У-70 (ИФВЭ). Можно видеть согласие с экспериментом в спектрах испускания этих фрагментов и наличие скейлинга — одинакового наклона этих кривых. При этом для тритонов получилось хорошее совпадение, для дейтронов имеется совпадение ближе к концу экспериментального спектра. Это спектры кумулятивных фрагментов, средняя температура в нашем подходе $\langle T \rangle \approx 150$ МэВ, химический потенциал $\mu (\mu = m + \mu_T)$, где $\langle \mu_T \rangle \approx -370$ МэВ, как и в нашей предыдущей работе [29], посвященной описанию испускания кумулятивных протонов, пионов, каонов и антипротонов на ускорителе У-70 при той же энергии налетающих ядер углерода.

Для описания выходов фрагментов среднего размера лучше использовать гауссовское распределение (16) для фактора F . В формуле Гольд-

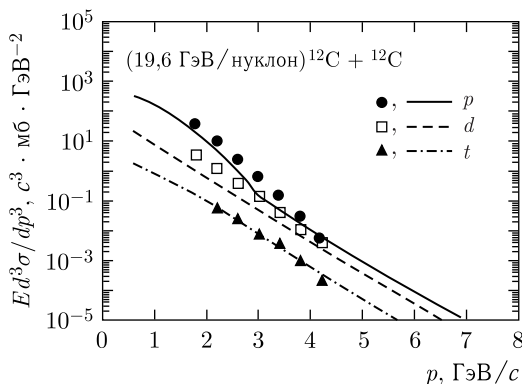


Рис. 1. Инвариантные двойные дифференциальные сечения испускания протонов, дейтронов и тритонов под углом 40° в реакции $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C} \rightarrow f + X$ при энергии 19,6 ГэВ/нуклон для налетающих ядер ^{12}C . Результаты расчетов по формуле (15) (сплошная линия — протоны, штриховая — дейтроны, штрихпунктирная — тритоны). Точки — экспериментальные данные из работы [30]: кружки — протоны, квадраты — дейтроны, треугольники — тритоны

хабера (16) дисперсия σ_N слабо зависит от массового числа A , но имеет сильную зависимость от массового числа фрагмента N . При $N = A$ она теряет смысл. Поэтому для рассматриваемых здесь нами реакций $^{12}\text{C} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be}(^{12}\text{B}) + X$ при $A = 12$ она становится неприменимой. Однако мы применили формулу Гольдхабера и к этим случаям.

Действительно, импульс фрагмента $\mathbf{p}_N$ может быть выражен через его энергию E_N с помощью известной формулы $\mathbf{p}_N = (E_N/c^2) \mathbf{v}$, а за счет энергии среднего поля ядра A эта энергия должна быть заменена $E_N \rightarrow E_N - NU$, и, следовательно, импульс должен быть заменен $\mathbf{p}_N \rightarrow \mathbf{p}_N (1 - (U/mc^2))$, где для ядра углерода $U \approx 30$ МэВ, m — нуклонная масса. С учетом этой поправки на среднее поле U для импульса летящих вперед фрагментов мы получили правильное значение для положения максимума в импульсном спектре фрагментов. Повторяя соответствующие выкладки аналогично [37], получаем дисперсию σ_N , измененную за счет этого сдвига:

$$\sigma_N^2 = \sigma_0^2 \frac{N(A - N(1 - U/mc^2))}{A - 1}, \quad (17)$$

которую можем применять и при $N = A$. Она не равна нулю.

Так, на рис. 2 приведены двойные дифференциальные сечения выхода фрагментов ^{11}Be , испускаемых под углом $3,5^\circ$ в реакции $^{12}\text{C} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be} + X$ при энергии 300 МэВ/нуклон для налетающих ядер углерода. Точки соответствуют экспериментальным данным, полученным в эксперименте ФРАГМ (ИТЭФ) [24]. На рис. 3 приведены двойные

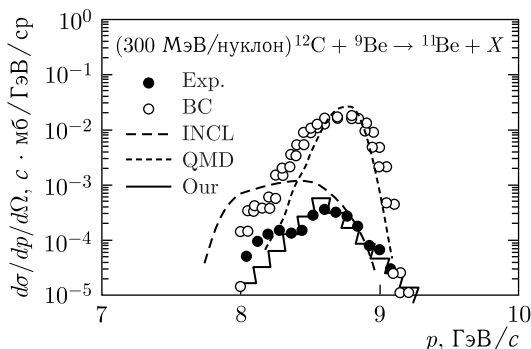


Рис. 2. Двойные дифференциальные сечения испускания ядер ^{11}Be под углом $3,5^\circ$ в реакции $^{12}\text{C} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{11}\text{Be} + X$ при энергии 300 МэВ/нуклон для налетающих ядер ^{12}C . Сплошная линия — результаты нашего расчета по формуле (15) с учетом квантовых поправок согласно [22, 23], темные кружки — экспериментальные данные из работы [24]. Результаты расчета из работы [24] изображены светлыми кружками для модели [33], штриховой кривой для модели [34] и пунктирной кривой для модели [16]

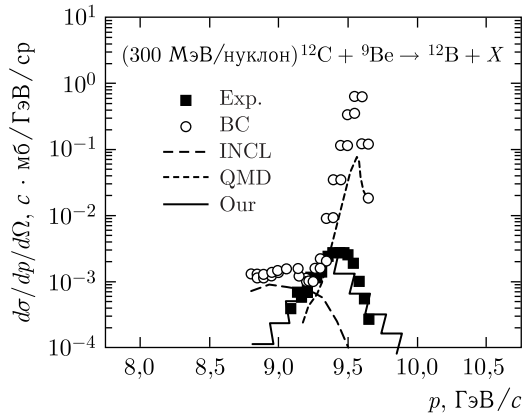


Рис. 3. Двойные дифференциальные сечения испускания ядер ^{12}B под углом $3,5^\circ$ в реакции $^{12}\text{C} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{B} + X$ при энергии 300 МэВ/нуклон для налетающих ядер ^{12}C . Сплошная линия — результаты нашего расчета по формуле (15) с учетом квантовых поправок согласно [22, 23], темные квадраты — экспериментальные данные из работы [24]. Результаты расчета из работы [24] изображены светлыми кружками для модели [33], штриховой кривой для модели [34] и пунктирной кривой для модели [16]

дифференциальные сечения выхода ^{12}B в реакции $^{12}\text{C} + ^9\text{Be} \rightarrow ^{12}\text{B} + X$ при той же энергии 300 МэВ для налетающего ядра ^{12}C [24].

Наши расчетные кривые (гистограммы) на этих рисунках соответствуют средней температуре $\langle T \rangle \approx 40$ МэВ, причем кривые получены в расчете с учетом квантовых членов, как в наших работах [22, 23]. Здесь нами было учтено необходимое уширение импульсного распределения в соответствии с формулами теории Лифшица–Слезова в модели коалесценции [39]. Как видно из рис. 2 и 3, имеется согласие наших расчетов с имеющимися экспериментальными данными. Расчетные кривые, полученные в работе [24] для каскадных моделей [33, 34] и по квантовой молекулярной динамике [16], заметно отличаются друг от друга и этих экспериментальных данных.

Наконец, на рис. 4 и 5 приведено сравнение вычисленных двойных дифференциальных распределений протонов, дейтронов и тритонов по быстроте y и поперечной массе m_t $dN/(m_t dm_t dy)$ при быстроте $y = 1,4$ с экспериментальными данными коллаборации BM@N (точки) [31] для столкновения ядер ^{40}Ar при энергии 3,2 ГэВ/нуклон с ядрами-мишенями ^{64}Cu и ^{208}Pb с одинаковой центральностью 40% соответственно. Вычисленная нами средняя температура $\langle T \rangle \approx 120$ МэВ. Можно видеть хорошее согласие с имеющимися экспериментальными данными.

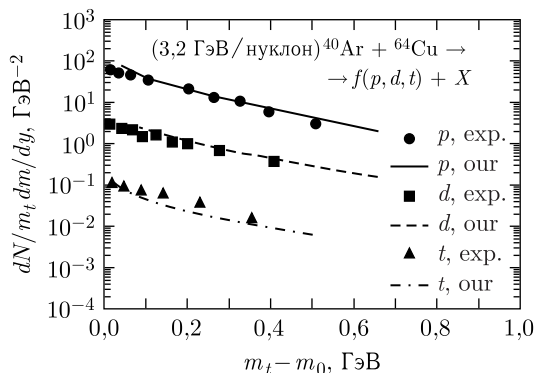


Рис. 4. Двойные дифференциальные распределения по быстроте и поперечной массе протонов (сплошная линия), дейтронов (штриховая) и тритонов (штрихпунктирная) для столкновения ядер ^{40}Ar при энергии 3,2 ГэВ/нуклон с ядрами ^{64}Cu при быстроте $y = 1,4$ для испускаемых фрагментов, точки — экспериментальные данные из работы [31]

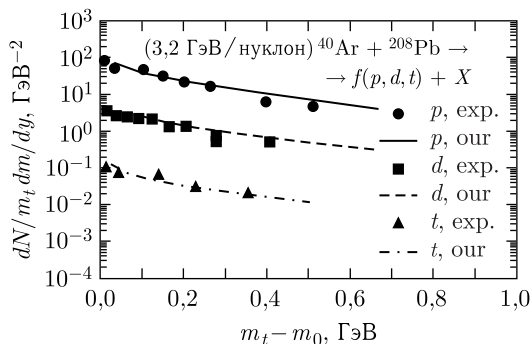


Рис. 5. Двойные дифференциальные распределения по быстроте и поперечной массе протонов (сплошная линия), дейтронов (штриховая) и тритонов (штрихпунктирная) для столкновения ядер ^{40}Ar при энергии 3,2 ГэВ/нуклон с ядрами ^{208}Pb при быстроте $y = 1,4$ для испускаемых фрагментов, точки — экспериментальные данные из работы [31]

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в развитие неравновесного гидродинамического подхода при описании выходов фрагментов, легких и близких по массе с налетающим ядром, достигнуто согласие с имеющимися экспериментальными данными, полученными в экспериментах ИФВЭ (Протвино) при энергии 19,6 ГэВ/нуклон и ФРАГМ (ИТЭФ, Москва) при энергии 300 МэВ/нуклон для налетающих ядер углерода. Существенно было включение в рассмотрение механизма Лифшица–Слезова в модели

коалесценции. Спектры протонов, дейтронов и тритонов при описании эксперимента ИФВЭ имеют одинаковый наклон (обнаруживают скейлинг), что легко объясняется в нашем подходе к фрагментации.

Недавние экспериментальные данные по двойным дифференциальным распределениям протонов, дейтронов и тритонов, полученные в эксперименте BM@N (Дубна) при энергии 3,2 ГэВ/нуклон, были также успешно описаны в нашем подходе.

Автор благодарен В. В. Куликову, М. А. Мартемьянову, И. А. Митропольскому, В. Киреу и О. В. Теряеву за обсуждение результатов работы.

Финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке ПИЯФ им. Б. П. Константинова без использования грантов.

Конфликт интересов. Автор статьи заявляет, что у него нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stöcker H., Greiner W.* High Energy Heavy Ion Collisions: Probing the Equation of State of Highly Excited Hadronic Matter // *Phys. Rep.* 1986. V. 187, No. 5. P. 277–392; doi: 10.1016/0370-1573(86)90131-6.
2. *Toneev V. D., Schulz H., Gudima K. K., Röpke G.* Towards the Investigation of Hot and Compressed Nuclear Matter in Heavy Ion Collisions // *Sov. J. Part. Nucl.* 1986. V. 17, No. 6. P. 485–520.
3. *Blaschke D., Liebing S., Röpke G., Dönigus B.* Cluster Production and the Chemical Freeze-Out in Expanding Hot Dense Matter. arXiv:2408.01399v1 [nucl-th].
4. *Flerov G. N., Barashenkov V. S.* Practical Applications of Heavy Ion Beams // *Sov. Phys. Usp.* 1975. V. 17, No. 5. P. 783–793; doi: 10.1070/PU1975v017n05ABEH004371783.
5. *Chernyaev A. P.* Radiation Technologies in Medicine. Medical Accelerators // *Phys. Part. Nucl.* 2012. V. 43, No. 6. P. 500.
6. *Goldhaber A. S.* Statistical Models of Fragmentation Processes // *Phys. Lett. B.* 1974. V. 53. P. 306–308; [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(74\)90388-8](https://doi.org/10.1016/0370-2693(74)90388-8).
7. *Feshbah H., Huang K.* Fragmentation of Relativistic Heavy Ions // *Phys. Lett. B.* 1973. V. 47. P. 300; [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(73\)90607-2](https://doi.org/10.1016/0370-2693(73)90607-2).
8. *Fridman W. A., Lynch W. G.* Statistical Formalism for Particle Emission // *Phys. Rev. C.* 1983. V. 28. P. 16–23; <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.28.16>.
9. *Gutbrod H. H., Sandoval A., Johansen P. J., Poskanzer A. M., Gosset J., Meyer W. G., Westfall G. D., Stock R.* Final-State Interactions in the Production of Hydrogen and Helium Isotopes by Relativistic Heavy Ions on Uranium // *Phys. Rev. Lett.* 1976. V. 37, No. 11. P. 667–670; <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.37.667>.
10. *Mekjian A. Z.* Thermodynamic Model for Composite-Particle Emission in Relativistic Heavy-Ion Collisions // *Phys. Rev. Lett.* 1977. V. 38, No. 12. P. 640–643; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.38.640>.
11. *D'yachenko A. T.* The Spectra of Fragments in the Fluid Dynamics Model of Heavy Ion Collisions // *Nucl. Phys. A.* 1997. V. 696. P. 273–277.

12. Bondorf J. P., Donagelo R., Mishustin I. N., Schulz H. Statistical Multifragmentation of Nuclei: I. Formulation of the Model // Nucl. Phys. A. 1985. V. 443. P. 321–347; doi:10.1016/0375-9474(85)90266-0.
13. Bondorf J. P., Donagelo R., Mishustin I. N., Schulz H. Statistical Multifragmentation of Nuclei: II. Application of the Model to Finite Nuclei Disassembly // Nucl. Phys. A. 1985. V. 444. P. 460–476; [https://doi.org/10.1016/0375-9474\(85\)90463-4](https://doi.org/10.1016/0375-9474(85)90463-4).
14. Botvina A. S., Ilinov A. S., Mishustin I. N. Multifragmentation of Nuclei by High-Energy Protons // JETP Lett. 1985. V. 42. P. 572–576.
15. Peilert G., Stöcker H., Greiner W. Physics of High-Energy Heavy-Ion Collisions // Rep. Prog. Phys. 1994. V. 57, No. 6. P. 553; doi: 10.1088/0034-4885/57/6/001.
16. Aichelin J. Quantum Molecular Dynamics — A Dynamical Microscopic n -Body Approach // Phys. Rep. 1991. V. 202. P. 233–360; [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(91\)90094-3](https://doi.org/10.1016/0370-1573(91)90094-3).
17. Aichelin J., Bratkovskaya E., Le Fèvre A., Kireyeu V., Kolesnikov V., Leifels Y., Voronyuk V., Coci G. Parton-Hadron-Quantum-Molecular Dynamics: A Novel Microscopic n -Body Transport Approach for Heavy-Ion Collisions, Dynamical Cluster Formation, and Hypernuclei Production // Phys. Rev. C. 2020. V. 101, No. 4. P. 044905; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.101.044905>.
18. Landau L. D. On the Multiple Production of Particles in Collisions of Fast Particles // Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. Fiz. 1953. V. 17. P. 51; Collected Papers of L. D. Landau / Ed. by D. Ter-Haar. Oxford: Pergamon Press, 1965. Paper No. 74.
19. Belenkij S. Z., Landau L. D. Hydrodynamic Theory of Multiple Particle Formation // Usp. Fiz. Nauk. 1955. V. 56. P. 309–348; doi: 10.3367/UFNr.0056.195507a.0309.
20. Belenkij S. Z., Landau L. D. Hydrodynamic Theory of Multiple Production of Particles // Nuovo Cim. 1956. V. 3, Suppl. 1. P. 15–31; <https://doi.org/10.1007/BF02745507>.
21. D'yachenko A. T. Equations of Quantum Relativistic Hydrodynamics and Soliton Solutions in Describing Nucleus–Nucleus Collisions // Phys. At. Nucl. 2023. V. 86, No. 3. P. 289–295; <https://doi.org/10.1134/S1063778823030079>.
22. D'yachenko A. T. Klein–Gordon Equations, Equations of Relativistic Quantum Hydrodynamics, and Quantum Shocks in Describing Collisions of Atomic Nuclei // Phys. At. Nucl. 2024. V. 87, No. 5. P. 646–658; <https://doi.org/10.1134/S106377882470056X>.
23. D'yachenko A. T., Mitropolsky I. A. Schrödinger Equation and Quantum Shock Waves When Describing Collisions of Atomic Nuclei // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2024. V. 88, No. 8. P. 1279–1285; <https://doi.org/10.1134/S1062873824707438>.
24. Kulikovskaya A. A., Abramov B. M., Borodin Yu. A., Bulychyov S. A., Dukhovskoy I. A., Krutenkova A. P., Kulikov V. V., Martemianov M. A., Matsyuk M. A., Turdakina E. N. Search for Nucleon Charge-Exchange Processes in the Fragmentation of Carbon Ions at an Energy of 300 MeV per Nucleon // Phys. At. Nucl. 2022. V. 85, No. 5. P. 466–473; doi: 10.1134/S1063778822050076.

25. *D'yachenko A. T., Mitropolsky I. A.* Emission of High-Energy Protons and Photons in Heavy-Ion Collisions Treated on the Basis of a Hydrodynamic Approach with a Nonequilibrium Equation of State // *Phys. At. Nucl.* 2020. V. 83, No. 4. P. 558–566; doi: 10.1134/S1063778820040080.
26. *D'yachenko A. T., Mitropolsky I. A.* Nonequilibrium Hydrodynamic Approach to Describing the Emission of High-Energy Secondary Particles in Intermediate-Energy Heavy-Ion Collisions // *Phys. At. Nucl.* 2022. V. 85, No. 6. P. 1053–1062; doi: 10.1134/S106377882301018.
27. *Abramov B. M., Alekseev P. N., Borodin Yu. A., Bulychjov S. A., Dukhovskoy I. A., Krutenkova A. P., Kulikov V. V., Martemianov M. A., Matsyuk A., Mashnik S. G., Turdakina E. N., Khanov A. I.* Protons from Carbon Ion Fragmentation at 0.3–2.0 GeV/Nucleon: Comparison with Models of Ion–Ion Interactions // *Phys. At. Nucl.* 2015. V. 78, No. 3. P. 373–380; doi: 10.1134/S1063778815020039.
28. *Abramov B. M., Baznat M., Borodin Yu. A., Bulychjov S. A., Dukhovskoy I. A., Krutenkova A. P., Kulikov V. V., Martemianov M. A., Matsyuk A., Turdakina E. N., Khanov A. I.* Cumulative π -Mesons in $^{12}\text{C} + ^9\text{Be}$ -Interactions at 3.2 GeV/Nucleon // *Phys. At. Nucl.* 2021. V. 84, No. 4. P. 467–474; doi: 10.1134/S1063778821040037.
29. *D'yachenko A. T.* Description of the Emission of Cumulative Secondary Particles in Collisions of Heavy Ions of Intermediate Energies Based on the Nonequilibrium Hydrodynamic Approach // *Phys. At. Nucl.* 2024. V. 87, No. 2. P. 125–130; doi: 10.1134/S106377882402011X.
30. *Antonov N. N., Baldin A. A., Viktorov V. A. et al.* Scaling Behavior of Spectra of Protons, Deuterons, and Tritons Produced with High Transverse Momenta in $p\text{A}$ and $^{12}\text{C}\text{A}$ Collisions // *JEPT Lett.* 2020. V. 111, No. 3. P. 251–254; <https://doi.org/10.1134/S0021364020050069>.
31. *Afanasiev S. et al. (BM@N Collab.).* Production of Protons, Deuterons and Tritons in Argon-Nucleus Interactions at 3.2A GeV. arXiv:2504.02759v1 [hep-ex]. 2025.
32. *D'yachenko A. T., Mitropolsky I. A.* Fragments in Heavy Ion Collisions in a Hydrodynamic Approach with a Nonequilibrium Equation of State // *Bull. Russ. Acad. Sci. Phys.* 2017. V. 81, No. 12. P. 1521–1528; doi: 10.3103/S1062873817100112.
33. *Folger G., Ivanchenko V. N., Wellisch J. P.* The Binary Cascade Nucleon Nuclear Reactions // *Eur. Phys. J. A.* 2024. V. 21, No. 9. P. 407–417; <https://doi.org/10.1140/epja/i2003-10219-7>.
34. *Dudouet J., Cussol D., Durand D., Labalme M.* Benchmarking Geant4 Nuclear Models for Hadron Therapy with 95 MeV/Nucleon Carbon Ions // *Phys. Rev. C.* 2014. V. 89, No. 5. P. 054616; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.89.054616>.
35. *D'yachenko A. T., Gridnev K. A., Greiner W.* Calculation of Heavy Ion Collisions within the Framework of the Modified Hydrodynamic Approach // *J. Phys. G.* 2013. V. 40, No. 8. P. 085101; doi: 10.1088/0954-3899/40/8/085101.
36. *Gorbunov D. S., Rubakov V. A.* Introduction to the Theory of the Early Universe. Cosmological Perturbations. Inflationary Theory. World Sci., 2011.
37. *D'yachenko A. T., Mitropolsky I. A.* Spectrum of Protons in Collisions of Heavy Ions $^{12}\text{C} + ^9\text{Be}$ at Energies of 0.3–2.0 GeV/Nucleon, in Terms of the

- Hydrodynamic Approach // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2021. V. 85, No. 5. P. 554–564; doi: 10.3103/S1062873821050063.
38. *D'yachenko A. T.* Description of Fragments Emitted in Collisions of Intermediate-Energy Heavy Ions Using a Nonequilibrium Hydrodynamic Approach // Bull. Russ. Acad. Sci. Phys. 2025. V. 89, No. 8. P. 1312–1316; doi: 10.1134/S1062873825712103.
39. *Lifshitz E. M., Pitaevsky L. P.* Physical Kinetics. Course of Theoretical Physics. V. 10. Oxford: Pergamon, 1981.