

СПЕКТР МАСС И РАСПАДЫ МЕЗОНОВ В РАМКАХ БИЛОКАЛЬНОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ

Т. З. Насиров^{1,*}, Н. Ш. Мирходжаева²

¹ Университет геологических наук, Ташкент, 100164, Узбекистан

² Ташкентский государственный экономический университет,
Ташкент, 100066, Узбекистан

Получен спектр масс псевдоскалярных и векторных мезонов в рамках релятивистской потенциальной модели (РПМ). Потенциал межкваркового взаимодействия выбран в виде суммы осцилляторного и кулоноподобного потенциалов. Рассчитаны константы лептонных распадов, результаты расчетов находятся в количественном согласии с имеющимися экспериментальными данными. РПМ использована для расчета спектра электрона в приближении двумерного пространства. Получены значения энергии и вид волновых функций возможных связанных состояний электронов, эти результаты могут быть полезны для выявления природы проявления квантового эффекта Холла.

The mass spectrum of pseudoscalar and vector mesons in the framework of relativistic potential model (RPM) has been obtained. The interquark potential as the sum of oscillator and Coulomb-like ones has been chosen. The leptonic decay constants have been calculated which are in the quantitative agreement with the experimental data. The RPM model has been used for calculation of electronic spectrum in two-dimensional space. The energy values and wave functions shape of the possible bound states have been obtained. These results can be useful for revealing nature of quantum Hall effect.

PACS: 12.39.Pn

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в научной литературе интенсивно изучается поведение электрона в приближении двумерного потенциала при очень низких температурах. Это связано с тем, что данное состояние позволяет глубже понять картину макромира, объясняемую и видимо связанную с квантовым эффектом Холла.

В литературе аналогичные объекты широко изучаются как в экспериментальном, так и теоретическом плане. Однако в большинстве теоретических подходов поведение электрона рассматривалось с применением уравнения Шредингера, являющегося с самого начала нерелятивистским.

* E-mail: tulkunnasirov@yandex.ru

Несмотря на то, что в изучаемых объектах электрон рассматривается в ограниченном пространстве, необходимо помнить, что он является ультрарелятивистской (пока наименьшей по массе, зарегистрированной) частицей, и при изучении возможных состояний электрона мы должны учитывать и релятивистские эффекты.

Одним из подходов для описания релятивистских эффектов связанных состояний, широко применяемых в описании спектра масс и распадов мезонов, является бислокальная релятивистская потенциальная модель [1], в которой массы и волновые функции связанного состояния находятся решением уравнений Швингера–Дайсона и Бете–Солпитера.

В последнее время уравнение Швингера–Дайсона использовалось при описании суперсимметричной теории Янга–Миллса [2], 1 + 2-мерной квантовой электродинамики [3] и в рамках модели взаимодействия скалярных полей [4]. В последней работе, в частности, показано существование критической константы связи, разделяющей область слабой связи с асимптотически свободным поведением и область сильной связи, в которой асимптотическое поведение пропагаторов полей меняется на ультралокальное.

В настоящей работе уравнение Швингера–Дайсона используется для описания состояний электрона в двумерном пространстве.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Уравнение Швингера–Дайсона в импульсном представлении имеет следующий вид [1]:

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = m_0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \sin \varphi(q), \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \hat{p} \hat{q} \cos \varphi(q), \end{cases} \quad (1)$$

где $E(p)$ — одночастичная энергия и $\varphi(p)$ — фазовая функция электрона, являющиеся искомыми функциями; p — импульс; m_0 — масса электрона; $V(|p - q|)$ — потенциал взаимодействия электрона с полем

$$\hat{p} = \frac{p}{|p|}, \quad \hat{q} = \frac{q}{|q|}.$$

Для решения уравнения (1) удобно преобразовать его в безразмерный вид подстановкой

$$p/m_0 \rightarrow p, \quad E(p)/m_0 \rightarrow E(p), \quad m_0 \rightarrow 1. \quad (2)$$

После этого уравнение (1) примет вид

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \sin \varphi(q), \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p - q|) \hat{p} \hat{q} \cos \varphi(q). \end{cases} \quad (3)$$

Полагая, что по одному направлению (оси p_z) движение электрона ограничено, потенциал взаимодействия можно представить в виде

$$V(|p - q|) = \frac{4\pi\alpha}{|p - q|^2} \delta(p_z - q_z), \quad (4)$$

где α — постоянная тонкой структуры.

Далее, подставляя выражение (4) в уравнение (3) с использованием цилиндрической системы координат (q_z, q, θ) и интегрируя по переменной q_z , получим систему уравнений

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^\infty \sin \varphi(q) q dq \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta}, \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^\infty \cos \varphi(q) q dq \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta}. \end{cases} \quad (5)$$

Интегрирование по полярной координате θ в первой строке уравнения (5) дает следующее:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta} = \frac{8pq}{p^2 + q^2}. \quad (6)$$

Аналогично можно проинтегрировать и второй интеграл во второй строке этого же уравнения:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta} = \frac{2(1 - \pi)}{pq}. \quad (7)$$

Таким образом, с подстановкой выражений (6) и (7) уравнение (5) примет вид

$$\begin{cases} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2}, \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha(1 - \pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \cos \varphi(q) dq. \end{cases} \quad (8)$$

Итак, трехмерное интегральное уравнение (3) привели к одномерному (8).

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА

Теперь, прежде чем приступить к решению уравнения (8), мы должны исследовать его поведение для следующих случаев:

- 1) $p \rightarrow 0$;
- 2) $0 < p \leq p_{\max} < \infty$;
- 3) $p \rightarrow \infty$.

Начнем с первого случая ($p \rightarrow 0$). Для этого интеграл в первой строке уравнения (8) удобно представить в виде

$$\int_0^\infty \frac{\sin \varphi(q) dq}{q} = \int_0^h \frac{\sin \varphi(q) dq}{q} + \int_h^{p_{\max}} \frac{\sin \varphi(q) dq}{q} + \int_{p_{\max}}^\infty \frac{\sin \varphi(q) dq}{q}, \quad (9)$$

где $h \ll p_{\max}$ — достаточно малый импульс. Представляет интерес предел, когда в области $0 \leq q \leq h$ $\varphi(q)$ соответствует виду для свободного электрона. При этом ее можно представить в виде

$$\sin \varphi(q) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{q^2 + 1}}.$$

В таком случае интегрирование первого члена в правой части выражения (9) дает следующее:

$$\int_0^h \frac{dq}{q\sqrt{q^2 + 1}} = -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{q^2 + 1}}{q} \right| \Big|_0^h = \ln \frac{2}{0} - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{h^2 + 1}}{h} \right|. \quad (10)$$

Точно так же можно проинтегрировать и третий член выражения (9):

$$\int_{p_{\max}}^\infty \frac{dq}{q\sqrt{q^2 + 1}} = -\ln \left| \frac{1 + \sqrt{q^2 + 1}}{q} \right| \Big|_{p_{\max}}^\infty = \ln \left| \frac{1 + \sqrt{p_{\max}^2 + 1}}{p_{\max}} \right|. \quad (11)$$

Следует отметить, что в выражении (10) первый член является логарифмически расходящимся. Однако его можно устранить переопределением входных параметров.

Во втором случае ($0 < p \leq p_{\max} < \infty$) имеем дело с областью взаимодействия электрона с полем, ее легче исследовать численным методом.

В третьем же случае ($p \rightarrow \infty$) интеграл в первой строке уравнения (8) удобно разбить на две части следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2} = \int_0^{p_{\max}} \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2} + \int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{\sin \varphi(q) q dq}{p^2 + q^2}. \quad (12)$$

Второй интеграл в правой части также удобно исследовать подстановкой для функции φ решения для свободного электрона. Тогда

$$\int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{q dq}{\sqrt{q^2 + 1} (p^2 + q^2)} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\sqrt{p_{\max}^2 + 1}}{\sqrt{p^2 - 1}} \right). \quad (13)$$

Переходим к исследованию интеграла во второй строке уравнения (8), которое удобно проводить для трех рассмотренных выше случаев.

Для случаев $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$

$$\cos \varphi(q) \rightarrow \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}}$$

и

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \cos \varphi(q) dq &= \int_0^h \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}} dq + \int_h^{p_{\max}} \cos \varphi(q) dq + \\ &+ \int_{p_{\max}}^{\infty} \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}} dq = h + \infty - p_{\max} + \int_h^{p_{\max}} \cos \varphi(q) dq. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, мы исследовали возможные значения интегралов для случаев $p \rightarrow 0$ и $p \rightarrow \infty$. Теперь нам предстоит изучить решения уравнения (8) для случая $0 < p \leq p_{\max} < \infty$. Нетрудно заметить, что интегралы в этом уравнении являются расходящимися, связанными с особенностями кулоновского потенциала, в связи с этим решения уравнения (8) теряют какой-либо физический смысл.

3. СХЕМА ПЕРЕНОМИРОВКИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА

Для получения решения уравнения Швингера–Дайсона с определенным физическим смыслом необходимо воспользоваться процедурой перенормировки. В литературе известно множество вариантов данной процедуры.

В этой работе мы используем схему перенормировки, в которой расходимости устраняются добавлением в интеграл функции φ , соответствующей свободному электрону:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(p) \sin \varphi(p) = 1 + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{dq}{q\sqrt{q^2+1}} + \\ \quad + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \varphi(q) q}{p^2 + q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2+1}} \right) dq, \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} dq + \\ \quad + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \left(\cos \varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \right) dq. \end{array} \right. \quad (15)$$

Теперь, если учесть то, что в первых интегралах обоих уравнений (15) имеются расходимости (см. выражения (10) и (14)), (15) можно переписать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} E(p) \sin \varphi(p) = 1 - \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\ln \left| \frac{1 + \sqrt{h^2+1}}{h} \right| + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{p_{\max}^2+1}}{p_{\max}} \right| \right) + \\ \quad + \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \varphi(q) q}{p^2 + q^2} - \frac{1}{q\sqrt{q^2+1}} \right) dq, \\ E(p) \cos \varphi(p) = p + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} (h - p_{\max}) + \\ \quad + \frac{\alpha(1-\pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \left(\cos \varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2+1}} \right) dq. \end{array} \right. \quad (16)$$

Заметим, что уравнения (16) теперь свободны от расходимостей, поскольку единица в правой части первого уравнения (в которую входит масса электрона) и импульс в правой части второго уравнения переопределены.

Для решения системы уравнений (16) удобно привести ее к уравнению для одной неизвестной. Умножая первое уравнение на $\cos \varphi(p)$ и второе — на $\sin \varphi(p)$, а затем вычитая из первого уравнения второе, получим уравнение для одной функции $\varphi(p)$:

$$(1 + A_1 + A_2) \cos \varphi(p) - (p + B_1 + B_2) \sin \varphi(p) = 0 \quad (17)$$

и с помощью уже известной $\varphi(p)$ определим значения для одночастичной энергии $E(p)$:

$$E(p) = (1 + A_1 + A_2) \sin \varphi(p) + (p + B_1 + B_2) \cos \varphi(p), \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha}{\pi^2} \left(\ln \left| \frac{1 + \sqrt{h^2 + 1}}{h} \right| + \ln \left| \frac{1 + \sqrt{p_{\max}^2 + 1}}{p_{\max}} \right| \right), \\ A_2(p) &= \frac{\alpha}{\pi^2} \int_0^\infty \left(\frac{\sin \varphi(q) q}{p^2 + q^2} - \frac{1}{q \sqrt{q^2 + 1}} \right) dq, \\ B_1(p) &= \frac{\alpha(1 - \pi)}{2\pi p} (h - p_{\max}), \\ B_2(p) &= \frac{\alpha(1 - \pi)}{2\pi p} \int_0^\infty \left(\cos \varphi(q) - \frac{q}{\sqrt{q^2 + 1}} \right) dq. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, мы получили нелинейное уравнение (17) без каких-либо расходимостей и сингулярностей, которое будет описывать состояние электрона в двумерном пространстве, решением которого можно будет исследовать связанные состояния электрона в двумерном электронном газе, соответствующие квантовому эффекту Холла.

4. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШВИНГЕРА–ДАЙСОНА

Численное решение уравнения (17) получили с использованием непрерывного аналога метода Ньютона [5]. При этом значение параметра $p_{\max}$ определяли подбором и сравнением нескольких последовательных значений по невязке.

На рис. 1 представлена зависимость фазовой функции электрона от значений импульса. Здесь же в целях выяснения роли кулоновского потенциала во взаимодействии электрона с электронным облаком (поле оставшихся электронов) в двумерном пространстве полученное решение сопоставляли с решением уравнения Швингера–Дайсона для свободного электрона.

Из рис. 1 видно, что решения для фазовой функции электрона в двумерном пространстве несильно отличаются от случая свободных электронов внутри пространства, особенно при малых импульсах. Это связано с тем, что, на наш взгляд, поведение электрона в двумерном пространстве очень близко для случая со свободной частицей.

С использованием решений для функции $\varphi(p)$ можно вычислить значения энергии электрона $E(p)$ на основании выражения (18). На рис. 2

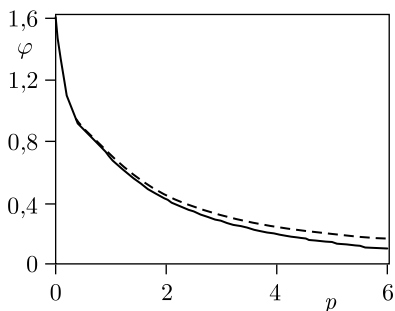


Рис. 1. Численные решения уравнения Швингера–Дайсона с кулоновским потенциалом (сплошная линия) и для свободного электрона (штриховая)

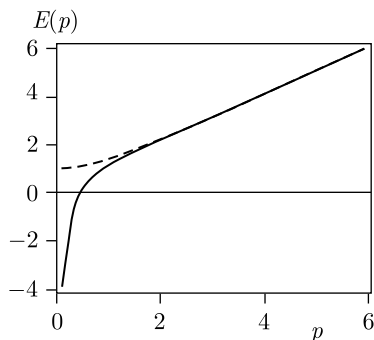


Рис. 2. Зависимость одночастичной энергии от импульса с кулоновским потенциалом (сплошная линия) и для свободного электрона (штриховая)

представлена зависимость одночастичной энергии, полученная решением уравнения Швингера–Дайсона в приближении двумерного пространства с кулоновским потенциалом. Также приведена зависимость энергии для свободной частицы.

Из рис. 2 видно, что, в отличие от фазовой функции $\varphi(p)$, расхождение по энергии четко видно при малых значениях импульса ($0 < p < 2$), где энергия электрона принимает и отрицательные значения. Это свидетельствует о том, что электрон при малых импульсах ($0 < p < 0,5$) будет находиться в связанном состоянии. При больших же значениях импульса ($p > 2$) электрон будет вести себя как свободная частица.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, подытожим основные результаты исследований, проведенных по изучению состояния электрона в двумерном пространстве в релятивистском приближении с применением уравнения Швингера–Дайсона.

Исследовано уравнение Швингера–Дайсона для состояния электрона в двумерном пределе кулоновского потенциала. Предложена схема перенормировки, свободная от каких-либо расхождений и сингулярностей. Получено радиальное уравнение, которое описывает состояние электрона в двумерном пространстве, решением которого можно будет исследовать связанные состояния электрона в двумерном электронном газе.

Получены численные решения для фазовой функции электрона, которые очень близки к случаям решения уравнения Швингера–Дайсона для свободного электрона, особенно при малых импульсах. Это, на наш взгляд, связано с тем, что электрон в приближении двумерного пространства можно считать практически свободной частицей.

Показано, что при малых значениях импульса энергия электрона принимает и отрицательные значения. Данное обстоятельство свидетельствует о том, что электрон при малых импульсах будет находиться в связанном состоянии, а при больших значениях импульса будет вести себя как свободная частица.

Финансирование. Работа финансировалась за счет средств бюджета Университета геологических наук. Никаких дополнительных грантов на проведение или руководство данным исследованием получено не было.

Конфликт интересов. Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Nasyrov T.Z.* Mass Spectrum and Leptonic Decay Constants of Pseudoscalar Mesons // Ukr. J. Phys. 2007. V. 52, No. 8. P. 723–728.
2. *Солошенко А. А., Степаньянц К. В.* Уравнение Швингера–Дайсона для $N = 1$ суперсимметричной теории Янга–Миллса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физика. Астрономия. 2008. № 3. С. 40–42.
3. *Inagaki T.* Schwinger–Dyson Analysis of 1+2 Dimensional QED // TSPU Bull. 2014. V. 12, No. 153. P. 100–102.
4. *Рочев В. Е.* Система уравнений Швингера–Дайсона и асимптотическое поведение в евклидовой области // ЯФ. 2015. Т. 78, № 5. С. 475–478.
5. *Никонов Э. Г., Казаков Д. С.* Использование квадратичной интерполяции для ускорения сходимости непрерывного аналога метода Ньютона // Системный анализ в науке и образовании: Сетевое науч. изд. 2019. № 3. С. 56–64;
Никонов Э. Г., Казаков Д. С. Вычислительная схема повышения устойчивости непрерывного аналога метода Ньютона для решения нелинейных уравнений // Mod. High Technol. 2020. No. 10. P. 68–72.