

КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Е. Е. Перепёлкин^{1,2}, *Б. И. Садовников*¹, *Н. Г. Иноземцева*³,
*П. В. Афонин*¹, *Р. В. Полякова*^{2,*}, *М. Б. Садовникова*¹

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Москва, Россия

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

³ Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Приводится описание кинематических свойств квантовых систем в терминах фазового пространства. Несмотря на принцип неопределенности Гейзенберга, квантовые системы в фазовом пространстве рассматриваются с привлечением аппарата функций квазиплотности вероятностей, например функции Вигнера и калибровочно-инвариантной функции Вейля–Стратоновича. Термин квазиплотность связан с наличием фазовых областей с отрицательными значениями функции плотности вероятностей и вызывает интерес к возможным физическим интерпретациям таких значений.

Рассматриваются кинематические свойства систем в рамках формализма Вигнера–Власова, позволяющего связать классическое и квантовое описание посредством единого математического аппарата, использующего функцию распределения в фазовом пространстве.

The paper describes the kinematic properties of quantum systems in terms of phase space. Despite the Heisenberg uncertainty principle, the consideration of quantum systems in phase space is widely used with the apparatus of quasiprobability density functions, such as the Wigner function and the gauge-invariant Weyl–Stratonovich function. The term “quasi-density” refers to the presence of phase regions with negative values of the probability density function and arouses interest in possible physical interpretations of such values.

The kinematic properties of the systems are considered within the Wigner–Vlasov formalism, which enables to link the classical and quantum descriptions through a unified mathematical apparatus using the distribution function in phase space.

PACS: 03.65.Ca; 03.65.Sq; 05.60.Gg

ВВЕДЕНИЕ

Роль фазового пространства в анализе динамики классических систем хорошо известна [1–7]. Еще в работах А. Пуанкаре фазовое пространство получило широкое распространение как инструмент для анализа устойчивости и характера поведения системы в целом [8–11].

* E-mail: polykovarv@mail.ru

Существенное развитие концепции фазового пространства произошло в работах М. В. Остроградского, который ввел в рассмотрение не только координату $\vec{r}$ и импульс $\vec{p}$ (скорость $\vec{v}$), но и конечный набор кинематических величин высших порядков $\vec{v}, \ddot{\vec{v}}, \ddot{\ddot{\vec{v}}}, \dots$ — ускорение и ускорения высших порядков [12]. Такой подход получил название «механики Остроградского» [13, 14] и в дальнейшем имел применение в общей теории относительности [15–20], некоторых струнных моделях [21, 22], квантовой теории поля и калибровочных теориях [21–23], а также в последних работах по данной тематике [24–26]. В рамках классической механики, оперирующей с уравнением движения второго порядка, наличие высших производных выглядит как переопределенная задача. Развитие электромагнитной теории привело к появлению новых эффектов, таких как излучение электромагнитной волны. Согласно формуле Лармора [27] мощность электромагнитного излучения пропорциональна $\ddot{\vec{v}}$ (силе радиационного трения), что задает третий порядок дифференциального уравнения движения, например уравнения Лоренца–Абрахама–Дирака [28–30]. Стоит отметить, что современные исследования по теории темной материи и темной энергии могут претендовать на использование уравнений движения с высшими кинематическими величинами [31, 32]. Вопрос существования конечного порядка уравнения, описывающего динамику произвольной физической системы, остается открытым.

В середине XX в. А. А. Власов выдвинул кардинально новое предположение [33, 34], рассмотрев бесконечный набор кинематических величин всех порядков в обобщенном фазовом пространстве Ω_∞ (ОФП). Точка $\xi_0 = \{\vec{r}_0, \vec{v}_0, \ddot{\vec{v}}_0, \ddot{\ddot{\vec{v}}}_0, \dots\}^T \in \Omega_\infty$ формально определяет ряд Тейлора для обобщенной фазовой траектории движения $\xi(t) = \{\vec{r}(t), \vec{v}(t), \ddot{\vec{v}}(t), \ddot{\ddot{\vec{v}}}(t), \dots\}^T$. Необходимость в уравнении движения исчезает. В пространстве Ω_∞ А. А. Власов определил функцию распределения $f_\infty(\vec{r}, \vec{v}, \ddot{\vec{v}}, \ddot{\ddot{\vec{v}}}, \dots)$, для которой постулировал первый принцип — закон сохранения вероятностей. Заметим, что переменные $\vec{r}, \vec{v}, \ddot{\vec{v}}, \ddot{\ddot{\vec{v}}}, \dots$ в общем случае являются независимыми. Для детерминированной системы, когда имеется дифференциальная связь между кинематическими величинами $\vec{v} = \dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}, \ddot{\ddot{\vec{v}}} = \dot{\ddot{\vec{v}}}, \dots$, функция распределения может иметь вид $f_\infty(\xi, t) = \delta[\xi - \vec{\eta}(t)]$, где $\vec{\eta}(t)$ — фиксированная обобщенная фазовая траектория системы. При рассмотрении статистических систем дифференциальная связанность между кинематическими переменными является необязательной, поэтому функция распределения описывает вероятность принимать определенные значения для кинематических величин.

На основании первого принципа А. А. Власов получил бесконечную самозацепляющуюся цепочку уравнений для функций $f_1(\vec{r}, t)$, $f_2(\vec{r}, \vec{v}, t)$, $f_3(\vec{r}, \vec{v}, \ddot{\vec{v}}, t)$, ... с законами сохранения, которые условно можно классифицировать как законы сохранения «массы», «количества движения» и «энергии». Переход на фазовые подпространства конечной размерности обусловлен процедурой усреднения по высшим кинематическим величинам.

нам и, как следствие, потерей кинематической информации о системе, что приводит к появлению дополнительных законов сохранения. В силу самозацепляющейся структуры цепочки уравнений Власова нахождение решения « n »-го уравнения цепочки требует решения « $n + 1$ »-го уравнения. Выход из данной ситуации может быть осуществлен путем обрыва цепочки на некотором уравнении. Обрыв цепочки подразумевает введение динамической аппроксимации для средней кинематической величины. Номер уравнения, на котором производится обрыв цепочки, фактически определяет количество требуемой в рамках конкретной задачи кинематической информации для описания физической системы.

Переход к рассмотрению квантовых систем в фазовом пространстве стал возможен после введения Е. Вигнером и Г. Вейлем функции квазиплотности вероятностей [35, 36] и последующем ее обобщении в виде калибровочно-инвариантной функции Вейля–Стратоновича для электромагнитных систем [37–41]. Несмотря на принцип неопределенности Гейзенберга, с развитием техники квантовых вычислений, квантовой связи, криптографии и квантовой информатики стал востребованным математический аппарат функции Вигнера, которая используется как функция квазивероятностей при описании квантовой системы в фазовом пространстве [42, 43]. Квантовой особенностью функции Вигнера является наличие у нее отрицательных значений в фазовой области [44–47]. Например, при реализации многих схем квантовой криптографии [48, 49] должны быть использованы источники одиночных фотонов. Это одно из требований, которое необходимо для защиты передаваемых данных на самом фундаментальном уровне [50]. Однако создание хорошего источника одиночных фотонов — достаточно сложная задача, в то время как источники лазерного излучения широко распространены. В связи с этим возникает идея [50] об обобщении основных схем квантовой криптографии на случай нетривиальной статистики фотонов в световых модах передаваемого сигнала. Одним из основных способов исследования статистики фотонов является метод гомодинного детектирования [51–53]. Применяя данный метод к исследуемому сигналу, можно получить экспериментальные данные о его так называемых квадратурных компонентах сигнала, зная которые можно получить функцию Вигнера исследуемого сигнала с помощью методов квантовой томографии [54, 55]. В данном случае функция Вигнера служит наглядным визуальным образом квантового состояния, своего рода паспортом. Экспериментатор визуально может определить «качество» определенного им квантового состояния, сравнивая полученную им функцию Вигнера с неким эталоном. Наличие отрицательных областей у этой функции Вигнера выступает достаточным условием «неклассичности» состояния.

Объединение подхода А. А. Власова и аппарата функции Вигнера для описания квантовых и классических систем в фазовом пространстве приводит к формализму Вигнера–Власова. В рамках указанного формализма первое уравнение из цепочки Власова сводится к электромагнитному

уравнению Шрёдингера и дает уравнение Гамильтона–Якоби, уравнение движения заряженной частицы в электромагнитных полях, а в случае самосогласованной системы — уравнения Максвелла [56]. Аналогичная взаимосвязь присутствует в уравнениях Паули и Дирака [57]. Зная волновую функцию для систем с электрическим взаимодействием, можно построить функцию Вигнера, удовлетворяющую эволюционному уравнению Моэля [58]. Оказывается, уравнение Моэля является частным случаем второго уравнения из цепочки Власова с аппроксимацией Власова–Моэля для среднего потока ускорений [59, 60]. Формализм Вигнера–Власова позволяет строить точные решения классических и квантовых систем, находить средние по функции Вигнера кинематические величины, производить сравнительный анализ их физических свойств с позиций различных областей физики.

Данный обзор состоит из двух разделов. Разд. 1 посвящен системам с электрическим взаимодействием. Рассматриваются квантовые системы с полиномиальным потенциалом $U_N(x)$, где N — максимальная степень полинома. Выбор полиномиального потенциала обусловлен рядом причин. Во-первых, с необходимой точностью любой гладкий потенциал может быть аппроксимирован потенциалом $U_N(x)$. Таким образом, результат, полученный для потенциала $U_N(x)$, может быть использован для широкого круга задач. Во-вторых, функция Вигнера удовлетворяет уравнению Моэля [19] (квантовый аналог уравнения Лиувилля), которое получено в предположении, что потенциал квантовой системы является аналитической функцией, т.е. представляется в виде степенного ряда типа $U_{N \rightarrow \infty}(x)$. Выбирая значение N , можно с любой точностью аппроксимировать аналитическую функцию в окрестности «точки колебания». В п. 1.1 изложена процедура нахождения кинематических средних величин по фазовому пространству для простейшей системы — квантовый гармонический осциллятор. В п. 1.2 рассматривается представление функции Вигнера через оператор Вейля в базисе гармонического осциллятора [61]. Таким образом, в явном виде получаются выражения для средних энергий как функций координат $\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}(x)$ и импульсов $\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}(p)$, где s — номер квантового состояния. Также в п. 1.2 приведены доказательства теорем о виде явных выражений кинематических средних величин $\langle p^{2\ell} \rangle_1^{(s)}$ и $\langle x^r \rangle_2^{(s)}$, где $\ell, r \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. С использованием явных выражений средних кинематических величин строятся выражения средних энергий $\langle \mathcal{E}_N \rangle$. В п. 1.3 на основе результатов п. 1.2 и метода нахождения матрицы плотности ρ для квантовой системы с полиномиальным потенциалом показывается наличие полюсов функций энергии $\langle \mathcal{E}_N \rangle$ в областях, где функция Вигнера W_s имеет отрицательные значения. На примере гармонического осциллятора показано, что полюсы функции $\langle \mathcal{E}_N \rangle$ приводят к «разбиению» исходной квантовой системы на множество независимых систем с новыми потенциалами. Количество таких систем определяется номером квантового состояния.

В п. 1.4 рассматривается математическая постановка задачи о восстановлении векторного поля $\langle \vec{v} \rangle_{1,2}$ по его дивергенции и ротору (задача Гельмгольца). Уравнения квантовой механики содержат информацию только о дивергенции поля плотности тока $\vec{J}_{1,2}^2 = f^{1,2} \langle \vec{v} \rangle_{1,2}$. Отсутствие информации о роторе тока $\vec{J}_{1,2}^2$ приводит к неопределенности поля ускорений и, как следствие, к различным траекториям движения. В п. 1.5 рассматриваются различные варианты построения аппроксимаций Власова–Моэля для общего случая аналитического потенциала U . Показывается, что таких вариантов существует бесконечное множество, имеющее мощность, — континуум. Оказывается, что члены ряда в аппроксимации Власова–Моэля в явном виде могут не содержать множителя $\hbar^{2l}$ и не могут быть «отброшены» в классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$ как малые величины. Более того, на малых пространственных масштабах («микромасштабах») члены ряда аппроксимации Власова–Моэля могут вносить существенный вклад в поле $\langle \vec{v} \rangle_{1,2}$, входящее во второе уравнение Власова. На больших пространственных масштабах («макромасштабах») слагаемые в аппроксимации Власова–Моэля могут оказаться пренебрежимо малыми, и уравнение Моэля перейдет в уравнение Лиувилля. В п. 1.6 приведены численные расчеты модельной квантовой системы с потенциалом в виде «квадратичной воронки»: $U(\rho, z) \sim \rho^2 + z^2 - 4\sigma_r^4/\rho^2$, где (ρ, z) — цилиндрическая система координат. Построено точное решение 3D-уравнения Шрёдингера с потенциалом $U(\rho, z)$, и найдена функция Вигнера. В частном случае функция Вигнера может быть выражена через полный эллиптический интеграл первого рода. Построена численно-аналитическая схема нахождения поля $\langle \vec{v} \rangle_{1,2}$ по функции Вигнера и потенциалу $U(\rho, z)$. Проведенный траекторный анализ показывает, что на микромасштабах ($r < \sigma_r$) существует бесконечное множество различных траекторий движения частиц. Наличие бесконечного множества траекторий вносит неопределенность по координате и импульсу. На макромасштабах ($r > \sigma_r$) множество траекторий «стягивается» вокруг единственной классической траектории, описываемой уравнением движения $m \langle \vec{v} \rangle_{1,2} = -\nabla_r U$, для которой координата и импульс определены с приемлемой точностью.

В разд. 2 рассматриваются квантовые системы с электромагнитным взаимодействием. В п. 2.1 на основе формализма Вигнера–Власова по известной плотности распределения f^1 и векторному полю потока вероятностей $\langle \vec{v} \rangle_1$ строится 3D-решение уравнения Шрёдингера. Функции f^1 и $\langle \vec{v} \rangle_1$ удовлетворяют первому уравнению Власова. Знание решения уравнения Шрёдингера позволяет находить функцию Вигнера W и функцию Вейля–Стратоновича f_w . Оказывается, что функция f_w в отличие от функции W имеет области отрицательных значений для волновой функции с распределением Гаусса (теорема Хадсона). Более того, приведен пример электромагнитной квантовой системы, описываемой

мой негауссовой волновой функцией, для которой f_w положительна во всем фазовом пространстве. Этот результат можно рассматривать как аналог теоремы Хадсона для калибровочно-инвариантной функции f_w . При известных функциях W и f_w вычисляются средние импульсные поля $\langle \vec{p} \rangle_1$, $\langle \vec{P} \rangle_1$ и среднее значение энергии $\langle \mathcal{E} \rangle_0$, производится их сравнение с точным распределением $\langle \vec{p}_c \rangle_1$ и точным значением энергии E . В п. 2.2 строится эволюционное уравнение для функции Вигнера W с учетом электромагнитного взаимодействия. В отличие от уравнения для функции f_w , полученное уравнение для функции W имеет компактную форму записи. Главное отличие построенного уравнения для функции W от ранее известных заключается в том, что оно похоже на второе уравнение Власова. Это сходство позволило расширить аппроксимацию Власова–Моэля на квантовые системы с электромагнитным взаимодействием. Подробно рассмотрены некоторые предельные переходы в электромагнитной аппроксимации Власова–Моэля как для классических, так и для квантовых систем. Показано, что квантовые поправки во внешних силах, действующих на систему, исчезают при усреднении электромагнитной аппроксимации Власова–Моэля по импульсному пространству. В заключении приведены основные выводы работы.

1. СИСТЕМЫ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1.1. Средние кинематические величины. Для простейшей системы — квантовый гармонический осциллятор — функция Вигнера известна в явном виде:

$$W_s(\varepsilon) = \frac{(-1)^s}{\pi \hbar} e^{-2\varepsilon} L_s(4\varepsilon), \quad \varepsilon(x, p) = \frac{1}{\hbar \omega} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right), \quad (1.1)$$

где L_s — полиномы Лагерра; s — номер квантового состояния. Параметры m, ω — масса и частота для квантового гармонического осциллятора. По теореме Хадсона [62] только гауссово распределение функции Вигнера является положительным. В случае квантового гармонического осциллятора (1.1) это основное состояние: $s = 0$. В работе [63] для квантового гармонического осциллятора в явном виде были найдены распределения средней энергии $\langle \bar{\varepsilon} \rangle$ как функции координат и импульса:

$$\bar{\varepsilon}(x, v) = 2\varepsilon(x, p) = \frac{v^2}{2\sigma_v^2} + \frac{x^2}{2\sigma_x^2},$$

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(s)}(x) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varepsilon}(x, v) W_s(x, mv) dv}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, mv) dv}, \\
\langle \bar{\varepsilon} \rangle_2^{(s)}(v) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\varepsilon}(x, v) W_s(x, mv) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, mv) dx},
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(s)}(x) = \frac{\langle v^2 \rangle_1^{(s)}(x)}{2\sigma_v^2} + \frac{x^2}{2\sigma_x^2}, \quad \langle \bar{\varepsilon} \rangle_2^{(s)}(v) = \frac{v^2}{2\sigma_v^2} + \frac{\langle x^2 \rangle_2^{(s)}(v)}{2\sigma_x^2}, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
\langle v^2 \rangle_1^{(s)}(x) &= \sigma_v^2 \frac{\sum_{k=0}^s C_k^{(+)} L_{s-k}(x^2/\sigma_x^2)}{\sum_{k=0}^s C_k^{(-)} L_{s-k}(x^2/\sigma_x^2)}, \\
\langle x^2 \rangle_2^{(s)}(v) &= \sigma_x^2 \frac{\sum_{k=0}^s C_k^{(+)} L_{s-k}(v^2/\sigma_v^2)}{\sum_{k=0}^s C_k^{(-)} L_{s-k}(v^2/\sigma_v^2)},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$C_k^{(\pm)} = (-1)^k \sum_{j=0}^k \frac{1 + \eta(j)}{2} \frac{H_{k-j}^2(0) \pm 2(k-j) H_{k-j-1}^2(0)}{2^{k-j} (k-j)!},$$

где $\sigma_x \sigma_v = \hbar/(2m)$, $\omega = \sigma_v/\sigma_x$; H_k — полиномы Эрмита; $\eta(j)$ — функция Хэвисайда. Как было показано в работе [63], функции средних значений энергии $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_2^{(s)}$ и $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(s)}$ (1.3) имеют полюсы в областях, где соответствующие функции Вигнера $W_s(x, 0)$ и $W_s(0, p)$ (1.1) имеют отрицательные значения квазивероятностей. В каждой области отрицательности функции Вигнера находится по одному полюсу функции энергии. Количество полюсов равно номеру квантового состояния s .

1.2. Система с полиномиальным потенциалом. Рассмотрим расширение результата, полученного для квантового гармонического осциллятора [63] с квадратичным потенциалом $U_2 = m\omega^2 x^2/2$, на общий случай полиномиального потенциала [60]:

$$U_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \tag{1.5}$$

где a_n — известные коэффициенты, для которых существуют «хорошие» решения уравнения Шрёдингера.

Представим функцию Вигнера через оператор Вейля в базисе гармонического осциллятора [61]:

$$W(x, p) = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n} w_{n,k}(x, p) = \text{Tr} [\rho \mathcal{W}(x, p)],$$

$$w_{n,k}(x, p) = \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} e^{-\kappa^2 x^2 - \frac{p^2}{\hbar^2 \kappa^2}} \mathcal{P}_{n,k} \left(-\kappa x - i \frac{p}{\hbar \kappa}, \kappa x - i \frac{p}{\hbar \kappa} \right), \quad (1.6)$$

$$\mathcal{P}_{n,k}(z_1, z_2) = \sqrt{2^{n+k} n! k!} \sum_{s=0}^{\min(n,k)} \frac{z_1^{n-s} z_2^{k-s}}{2^s s! (k-s)! (n-s)!},$$

где $\kappa = \sqrt{(m\omega)/\hbar}$; $\rho_{k,n} = c_k c_n^*$ — матрица плотности. Полиномы $\mathcal{P}_{n,k}$ допускают представление

$$\mathcal{P}_{n,k}(-z, z^*) = (-1)^n \Upsilon_{n,k}(|z|) e^{i(n-k)\varphi},$$

$$\Upsilon_{n,k}(x) \stackrel{\text{det}}{=} x^{n+k} \sqrt{2^{n+k} n! k!} \sum_{s=0}^{\min(n,k)} \frac{(-1)^s}{2^s s! (k-s)! (n-s)! x^{2s}}, \quad (1.7)$$

т. е.

$$w_{n,k}(x, p) = \frac{1}{\pi \hbar} e^{-|z|^2} \Upsilon_{n,k}(|z|) e^{i(n-k)\varphi},$$

$$|z|^2 = \frac{2}{\hbar \omega} \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) = 2\varepsilon(x, p), \quad \varphi = \arg z = \arctg \left(\frac{p}{m\omega x} \right). \quad (1.8)$$

Таким образом, используя представление для функции Вигнера (1.6)–(1.8), можно получить в явном виде выражения для средних энергий:

$$\mathcal{E}_N(x, p) = \frac{p^2}{2m} + U_N(x), \quad (1.9)$$

$$\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, p) \mathcal{E}_N(x, p) dp}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, p) dp},$$

$$\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}(p) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, p) \mathcal{E}_N(x, p) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, p) dx}, \quad (1.10)$$

где $W_s(x, p)$ — функция Вигнера квантовой системы с потенциалом (1.5), соответствующая состоянию s . Функция Вигнера $W_s(x, p)$ s -го состояния

согласно (1.6) имеет вид

$$W_s(x, p) = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} w_{n,k}(x, p). \quad (1.11)$$

Вычислим интегралы, стоящие в знаменателе и числителе выражения (1.10) соответственно:

$$I_s^{(1)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, p) dp = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n,k} dp = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} I_{n,k}^0(x), \quad (1.12)$$

$$I_s^{(2)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, p) \mathcal{E}_N(x, p) dp = \frac{1}{2m} \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} I_{n,k}^1(x) + U_N(x) I_s^{(1)}(x), \quad (1.13)$$

$$I_{n,k}^\ell(x) \stackrel{\text{det}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} w_{n,k}(x, p) dp, \quad \ell \in \mathbb{N}_0. \quad (1.14)$$

С использованием обозначений (1.12)–(1.14) выражение $\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}$ (1.10) примет вид

$$\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}(x) = \frac{1}{2m} \frac{\sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} I_{n,k}^1(x)}{\sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} I_{n,k}^0(x)} + U_N(x). \quad (1.15)$$

Таким образом, нахождение функции $\langle \mathcal{E}_N \rangle_{s,x}$ сводится к вычислению интегралов типа (1.14). Рассмотрим следующие утверждения.

Теорема 1. *Выражение для функции (1.14) имеет вид*

$$I_{n,k}^\ell(x) = \frac{(m\hbar\omega)^{\ell+1/2}}{\hbar\sqrt{\pi}} \times \begin{cases} \sqrt{\frac{2^{3\max(n,k)-\min(n,k)}}{n!k!}} |n-k| \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{\lfloor |n-k|/2 \rfloor} \sum_{\mu=0}^{\min(n,k)-\lambda+s} C_{\min(n,k)-\lambda+s}^\mu \times \\ \times \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda! |2(\ell+\mu)-1|!!}{2^{\lambda+2s+\ell+\mu+1} s} C_n^\lambda C_n^\lambda C_{|n-k|-s-1}^{s-1} \bar{x}^{n+k-2(\lambda+\mu)} e^{-\bar{x}^2}, \quad n \neq k, \\ \sum_{\lambda=0}^n \sum_{s=0}^\lambda \frac{(-1)^{\lambda+n}}{\lambda!} 2^{\lambda-\ell-s} C_n^\lambda C_\lambda^s |2(\ell+s)-1|!! \bar{x}^{2(\lambda-s)} e^{-\bar{x}^2}, \quad n = k, \end{cases} \quad (1.16)$$

где C_n^k — число сочетаний и $\frac{1}{s} C_{|n-k|-(s+1)}^{s-1} \Big|_{s=0} = \frac{1}{|n-k|}$; $\bar{x} = \kappa x$.

Доказательство теоремы 1. С учетом выражения (1.8) интеграл (1.4) примет вид

$$I_{n,k}^{\ell}(x) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) \cos(n-k)\varphi dp + \\ + \frac{i}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) \sin(n-k)\varphi dp. \quad (1.17)$$

При интегрировании (1.17) по импульсу $p \in (-\infty, +\infty)$ угол $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Функция $\sin \varphi = \sqrt{1 - ((\kappa^2 x^2)/(2\varepsilon))} = \bar{p}/\sqrt{2\varepsilon}$, $\bar{p} = p/\sqrt{m\hbar\omega}$, является нечетной по переменной p , следовательно, функция $\sin(n-k)\varphi$ также будет нечетной. Так как функция $p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon})$ является четной функцией по переменной p , при умножении на функцию $\sin(n-k)\varphi$ получится нечетная функция по переменной p . Следовательно, мнимая часть выражения (1.17) равна нулю. В результате выражение (1.17) примет вид

$$I_{n,k}^{\ell} = \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} \operatorname{Re}[w_{n,k}(x, p)] dp = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) \cos(n-k)\varphi dp. \quad (1.18)$$

Выражение $\cos[(n-k)\varphi]$ можно представить через полиномы Чебышёва

$$T_{n-k}(\cos \varphi) = \cos[(n-k)\varphi] = \cos[(k-n)\varphi] = T_{|n-k|}\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right), \quad (1.19)$$

где учтено (1.8):

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \left(\frac{p}{m\omega x}\right)^2, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{m^2 \omega^2 x^2}{m^2 \omega^2 x^2 + p^2}, \\ \cos \varphi = \frac{m\omega x}{\sqrt{m^2 \omega^2 x^2 + p^2}} = \frac{m\omega x}{\sqrt{2m\hbar\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}} = \frac{\kappa x}{\sqrt{2\varepsilon}}, \\ p^2 + m^2 \omega^2 x^2 = 2m\hbar\omega\varepsilon(x, p).$$

Полиномы Чебышёва допускают представление в виде ряда

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{s=0}^{[n/2]} (-1)^s \frac{(n-s-1)!}{s!(n-2s)!} (2x)^{n-2s}, \quad n > 0,$$

или

$$T_{|n-k|}\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) = \frac{|n-k|}{2} \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} (-1)^s \frac{(|n-k|-s-1)!}{s!(|n-k|-2s)!} \left(2\frac{\kappa x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^{|n-k|-2s}. \quad (1.20)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $n \neq k$. Подставляя выражения (1.20) и (1.7), (1.8) в интеграл (1.18), получим

$$\begin{aligned} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) &= 2^{\frac{n+k}{2}} \varepsilon^{\frac{n+k}{2}} \sqrt{2^{n+k} n! k!} \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \frac{(-1)^\lambda}{2^{2\lambda} \lambda! (k-\lambda)! (n-\lambda)! \varepsilon^\lambda}, \\ I_{n,k}^\ell &= \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) T_{|n-k|}\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) dp = \\ &= \frac{2^{n+k} \sqrt{n! k!}}{\pi \hbar} \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \frac{(-1)^\lambda}{2^{2\lambda} \lambda! (k-\lambda)! (n-\lambda)!} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \varepsilon^{\frac{n+k}{2}-\lambda} T_{|n-k|}\left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right) dp = \\ &= \frac{2^{n+k+|n-k|-1}}{\pi \hbar} \sqrt{n! k!} |n-k| \times \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} &\times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{|n-k|/2} \frac{(-1)^{\lambda+s} (|n-k|-s-1)!}{2^{2(\lambda+s)} \lambda! s! (k-\lambda)! (n-\lambda)! (|n-k|-2s)!} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\kappa x}{\sqrt{2\varepsilon}}\right)^{|n-k|-2s} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \varepsilon^{\frac{n+k}{2}-\lambda} dp = \frac{2^{2\max(n,k)-1} |n-k|}{\pi \hbar} \sqrt{n! k!} \times \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{|n-k|/2} \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda!}{2^{2(\lambda+s)}} C_k^\lambda C_n^\lambda \frac{C_{|n-k|-s-1}^{s-1}}{s} \times \\ &\times 2^{-\frac{|n-k|-2s}{2}} \bar{x}^{|n-k|-2s} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{n+k-|n-k|}{2}-\lambda+s} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} dp, \\ I_{n,k}^\ell &= \frac{2^{2\max(n,k)-\min(n,k)-\frac{|n-k|}{2}}}{\pi \hbar} \frac{|n-k|}{\sqrt{n! k!}} (m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \times \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{|n-k|/2} \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda!}{2^{2(\lambda+s)-\lambda}} C_k^\lambda C_n^\lambda \frac{C_{|n-k|-s-1}^{s-1}}{s} \bar{x}^{|n-k|-2s} \times \quad (1.22) \\ &\times \int_0^{+\infty} (\bar{x}^2 + \bar{p}^2)^{\min(n,k)-\lambda+s} \bar{p}^{2\ell} e^{-(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)} d\bar{p}, \end{aligned}$$

где учтено

$$\begin{aligned}
 & \frac{(|n-k|-s-1)!}{\lambda!s!(k-\lambda)!(n-\lambda)! (|n-k|-2s)!} = \\
 & = \frac{1}{\lambda! (k-\lambda)! (n-\lambda)!} \frac{(|n-k|-s-1)!}{s! (|n-k|-2s)!} = \\
 & = \frac{\lambda!}{k!n!} \frac{k!}{\lambda! (k-\lambda)!} \frac{n!}{\lambda! (n-\lambda)!} \frac{(|n-k|-(s+1))!}{s! (|n-k|-2s)!} = \\
 & = \frac{\lambda!}{k!n!} C_k^\lambda C_n^\lambda \frac{(|n-k|-(s+1))!}{s! (|n-k|-(s+1)-(s-1))!} = \\
 & = \frac{\lambda!}{k!n!} \frac{C_k^\lambda C_n^\lambda}{s} \frac{(|n-k|-(s+1))!}{(s-1)! (|n-k|-(s+1)-(s-1))!}, \\
 & \frac{(|n-k|-s-1)!}{\lambda!s!(k-\lambda)!(n-\lambda)! (|n-k|-2s)!} = \frac{\lambda!}{k!n!} C_k^\lambda C_n^\lambda \frac{C_{|n-k|-s-1}^{s-1}}{s}.
 \end{aligned} \tag{1.23}$$

Заметим, что при $s = 0$ в выражении (1.23) особенности нет, так как

$$\left. \frac{1}{s} C_{|n-k|-(s+1)}^{s-1} \right|_{s=0} = \left. \frac{(|n-k|-s-1)!}{s! (|n-k|-2s)!} \right|_{s=0} = \frac{(|n-k|-1)!}{(|n-k|)!} = \frac{1}{|n-k|}. \tag{1.24}$$

Преобразуем выражение $2 \max(n, k) - \min(n, k) - |n - k|/2$:

$$2 \max(n, k) - \min(n, k) - \frac{|n - k|}{2} = \frac{3 \max(n, k) - \min(n, k)}{2}. \tag{1.25}$$

Подставим (1.25) в выражение (1.22) и воспользуемся формулой бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}
 I_{n,k}^\ell &= \frac{\sqrt{2}^{3 \max(n,k) - \min(n,k)}}{\pi \hbar} \frac{|n-k|}{\sqrt{n!k!}} (m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \times \\
 & \times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda!}{2^{\lambda+2s}} C_k^\lambda C_n^\lambda \frac{C_{|n-k|-s-1}^{s-1}}{s} \times \\
 & \times \sum_{\mu=0}^{\min(n,k)-\lambda+s} C_{\min(n,k)-\lambda+s}^\mu e^{-\bar{x}^2} \bar{x}^{2 \min(n,k) + |n-k| - 2(\lambda+\mu)} \times \\
 & \times \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+\mu)} e^{-\bar{p}^2} d\bar{p}.
 \end{aligned} \tag{1.26}$$

С учетом того, что $2 \min(n, k) + |n - k| = n + k$ и

$$\int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+s)} e^{-\bar{p}^2} d\bar{p} = \frac{|2(\ell+s)-1|!}{2^{\ell+s+1}} \sqrt{\pi} \tag{1.27}$$

выражение (1.26) переходит в (1.16) при $n \neq k$. Если $n = k$, то вместо выражений (1.7), (1.8) можно использовать выражение (1.1), поэтому

$$\begin{aligned}
 I_{n,n}^{\ell}(x) &= \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} L_n(4\varepsilon) dp = \\
 &= \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-4)^{\lambda}}{\lambda!} C_n^{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \varepsilon^{\lambda} dp = \\
 &= 2 \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-4)^{\lambda}}{\lambda!} C_n^{\lambda} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} \times \\
 &\times \int_0^{+\infty} p^{2\ell} e^{-\frac{p^2}{m\hbar\omega}} \left(\frac{p^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega x^2}{2\hbar} \right)^{\lambda} dp = \\
 &= 2 \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-4)^{\lambda}}{\lambda!} C_n^{\lambda} e^{-\kappa^2 x^2} \sum_{s=0}^{\lambda} C_{\lambda}^s \left(\frac{\kappa^2 x^2}{2} \right)^{\lambda-s} \times \quad (1.28) \\
 &\times \int_0^{+\infty} p^{2\ell} e^{-\frac{p^2}{m\hbar\omega}} \left(\frac{p^2}{2m\hbar\omega} \right)^s dp = \\
 &= 2 \frac{(-1)^n}{\pi \hbar} (m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-2)^{\lambda}}{\lambda!} C_n^{\lambda} e^{-\kappa^2 x^2} \sum_{s=0}^{\lambda} C_{\lambda}^s (\kappa^2 x^2)^{\lambda-s} \times \\
 &\times \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+s)} e^{-\bar{p}^2} d\bar{p}, \\
 I_{n,n}^{\ell}(x) &= \frac{(m\hbar\omega)^{\ell+1/2}}{\hbar\sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^n \sum_{s=0}^{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda+n}}{\lambda!} \times \\
 &\times 2^{\lambda-\ell-s} C_n^{\lambda} C_{\lambda}^s |2(\ell+s)-1|! (\kappa x)^{2(\lambda-s)} e^{-\kappa^2 x^2}.
 \end{aligned}$$

Теорема 1 полностью доказана.

В некоторых случаях удобно работать с рядами, содержащими ортогональные полиномы, поэтому представление (1.16) можно выразить через обобщенные полиномы Лагерра. Рассмотрим лемму.

Лемма 1. Матричные элементы $w_{n,k}(x, p)$ допускают представление через обобщенные полиномы Лагерра $L_{\min(n,k)}^{(|n-k|)}$:

$$\begin{aligned}
 w_{n,k}(x, p) &= \frac{(-1)^{\min(n,k)}}{\pi \hbar} \sqrt{\frac{2^{|n-k|} \min(n,k)!}{\max(n,k)!}} \times \\
 &\times e^{-|z|^2} |z|^{|n-k|} L_{\min(n,k)}^{(|n-k|)}(2|z|^2) e^{i(n-k)\varphi}, \quad (1.29)
 \end{aligned}$$

где величины $|z|$ и φ определяются выражениями (1.8).

Доказательство леммы 1. Выразим полиномы $\Upsilon_{n,k}(x)$ через обобщенные полиномы Лагерра. Не ограничивая общность, положим $\ell = \min(n, k) = k$, $y = x\sqrt{2}$, $\lambda = k - s$, тогда

$$\begin{aligned}\Upsilon_{n,k}(x) &= \left(\sqrt{2}x\right)^{n+k} \sqrt{n!k!} \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(-1)^s}{s!(k-s)!(n-s)! \left(\sqrt{2}x\right)^{2s}} = \\ &= y^{n+k} \sqrt{n!k!} \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(-1)^s}{s!(k-s)!(n-s)! y^{2s}}, \\ \Upsilon_{n,k}(x) &= (-1)^k y^{n-k} \sqrt{n!k!} \sum_{\lambda=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda} y^{2\lambda}}{\lambda! (k-\lambda)! (n-k+\lambda)!} = \\ &= y^{n-k} \frac{(-1)^k \sqrt{n!k!}}{(n-k+k)!} \sum_{\lambda=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda} (k+n-k)! y^{2\lambda}}{\lambda! (k-\lambda)! (n-k+\lambda)!}.\end{aligned}$$

Используя замену $\alpha = n - k$, получим

$$\begin{aligned}\Upsilon_{n,k}(x) &= (-1)^k y^{\alpha} \sqrt{\frac{k!}{n!}} \sum_{\lambda=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda} (k+\alpha)! y^{2\lambda}}{\lambda! (k-\lambda)! (\alpha+\lambda)!} = \\ &= (-1)^k y^{n-k} \sqrt{\frac{k!}{n!}} L_{\ell}^{(n-k)}(y^2), \\ \Upsilon_{n,k}(x) &= (-1)^k x^{n-k} \sqrt{\frac{2^{n-k} k!}{n!}} L_{\min(n,k)}^{(n-k)}(2x^2),\end{aligned}\tag{1.30}$$

где учтено, что

$$L_{\ell}^{(\alpha)}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda} (\ell+\alpha)! x^{\lambda}}{\lambda! (\ell-\lambda)! (\alpha+\lambda)!}.\tag{1.31}$$

Если $\ell = \min(n, k) = n$, то $\lambda = n - s$:

$$\begin{aligned}\Upsilon_{n,k}(x) &= \left(\sqrt{2}x\right)^{n+k} \sqrt{n!k!} \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(-1)^s}{s!(k-s)!(n-s)! \left(\sqrt{2}x\right)^{2s}} = \\ &= y^{n+k} \sqrt{n!k!} \sum_{s=0}^{\ell} \frac{(-1)^s}{s!(k-s)!(n-s)! y^{2s}}, \\ \Upsilon_{n,k}(x) &= (-1)^n y^{k-n} \sqrt{n!k!} \sum_{\lambda=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda} y^{2\lambda}}{\lambda! (n-\lambda)! (k-n+\lambda)!} = \\ &= y^{k-n} \frac{(-1)^n \sqrt{n!k!}}{(k-n+n)!} \sum_{\lambda=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda} (k-n+n)! y^{2\lambda}}{\lambda! (n-\lambda)! (k-n+\lambda)!},\end{aligned}\tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
\Upsilon_{n,k}(x) &= (-1)^n y^{-\alpha} \sqrt{\frac{n!}{k!}} \sum_{\lambda=0}^{\ell} \frac{(-1)^{\lambda} (-\alpha + n)! y^{2\lambda}}{\lambda! (n - \lambda)! (-\alpha + \lambda)!} = \\
&= (-1)^n y^{-\alpha} \sqrt{\frac{n!}{k!}} L_{\min(n,k)}^{(-\alpha)}(y^2), \\
\Upsilon_{n,k}(x) &= (-1)^n x^{k-n} \sqrt{\frac{2^{k-n} n!}{k!}} L_{\min(n,k)}^{(k-n)}(2x^2).
\end{aligned}$$

Обобщая выражения (1.30) и (1.32), окончательно получим

$$\Upsilon_{n,k}(x) = (-1)^{\min(n,k)} x^{|n-k|} \sqrt{\frac{2^{|n-k|} \min(n,k)!}{\max(n,k)!}} L_{\min(n,k)}^{(|n-k|)}(2x^2). \quad (1.33)$$

С учетом представлений (1.33) и (1.7) выражение (1.8) для элементов $w_{n,k}$ примет вид (1.29). Лемма 1 доказана.

Отметим, что в частном случае при $n = k$ выражение (1.29) переходит в известные выражения для функции Вигнера гармонического осциллятора (1.1). Используя утверждение леммы, можно представить интеграл (1.14) через обобщенные полиномы Лагерра.

Теорема 2. *Выражение для функции (1.14) имеет вид*

$$\begin{aligned}
I_{n,k}^{\ell}(x) &= A_{n,k} (m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \times \\
&\times \begin{cases} 2^{|n-k|} |n-k| \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} \sum_{\mu=0}^s \frac{(-1)^s}{s} C_{|n-k|-s-1}^{s-1} \times \\ \times C_s^{\mu} G_{\lambda}^{2(\ell+\mu)} \bar{x}^{|n-k|-2\mu} L_{\min(n,k)-\lambda}^{(|n-k|-1)}(2\bar{x}^2) e^{-\bar{x}^2}, & n \neq k, \\ \sqrt{\pi} \sum_{\lambda=0}^n \sum_{s=0}^{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda}}{\lambda!} 2^{\lambda-\ell-s} C_n^{\lambda} C_{\lambda}^s |2(\ell+s)-1|! \bar{x}^{2(\lambda-s)} e^{-\bar{x}^2}, & n = k, \end{cases} \\
\end{aligned} \quad (1.34)$$

где $A_{n,k} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(-1)^{\min(n,k)}}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{2^{|n-k|} \min(n,k)!}{\max(n,k)!}}$; C_n^k — число сочетаний; $\bar{x} = kx$. Коэффициенты $G_{\lambda}^{2\beta}$ определяются рекуррентным соотношением:

$$G_{\lambda}^{2\beta} = \left(\beta + \lambda - \frac{1}{2} \right) G_{\lambda}^{2(\beta-1)} - \lambda G_{\lambda-1}^{2(\beta-1)}, \quad \beta \in \mathbb{N}, \quad (1.35)$$

где

$$\begin{aligned}
G_{\lambda}^0 &= (-1)^{\lambda} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\lambda+1} \lambda!} H_{\lambda}^2(0), \\
G_{\lambda}^2 &= (-1)^{\lambda} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \frac{1}{2^{\lambda+1} \lambda!} H_{\lambda}^2(0) + \sum_{r=1}^{\lambda} \frac{H_{\lambda-r}^2(0)}{2^{\lambda-r} (\lambda-r)!} \right\}.
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2. Подставляя выражение (1.29) в интеграл (1.18), получим

$$I_{n,k}^{\ell} = A_{n,k} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-2\varepsilon} (2\varepsilon)^{\frac{|n-k|}{2}} L_{\min(n,k)}^{(|n-k|)} (4\varepsilon) \cos[(n-k)\varphi] dp. \quad (1.36)$$

Используя выражение для полиномов Чебышёва (1.20) и разложение для обобщенных полиномов Лагерра

$$L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y) = \sum_{m=0}^n L_m^{(\alpha)}(x) L_{n-m}^{(\beta)}(y), \quad (1.37)$$

$$L_{\min(n,k)}^{(|n-k|)} \left(\frac{2p^2}{m\hbar\omega} + \frac{2m\omega x^2}{\hbar} \right) = \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} L_{\lambda}^{(0)} \left(\frac{2p^2}{m\hbar\omega} \right) L_{\min(n,k)-\lambda}^{(|n-k|-1)} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} \right),$$

получим

$$\begin{aligned} I_{n,k}^{\ell} &= A_{n,k} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-\frac{p^2}{m\hbar\omega}} \sqrt{2\varepsilon}^{|n-k|} L_{\min(n,k)}^{(|n-k|)} (4\varepsilon) T_{|n-k|} \left(\kappa \frac{x}{\sqrt{2\varepsilon}} \right) dp = \\ &= A_{n,k} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} \frac{|n-k|}{2} \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} L_{\min(n,k)-\lambda}^{(|n-k|-1)} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} \right) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-\frac{p^2}{m\hbar\omega}} \sqrt{2\varepsilon}^{|n-k|} L_{\lambda} \left(\frac{2p^2}{m\hbar\omega} \right) \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} (-1)^s \frac{(|n-k|-s-1)!}{s! (|n-k|-2s)!} \times \\ &\times x^{|n-k|-2s} (2\kappa)^{|n-k|-2s} \sqrt{2\varepsilon}^{2s-|n-k|} dp = \\ &= A_{n,k} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} \frac{|n-k|}{2} (2\kappa)^{|n-k|} \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} L_{\min(n,k)-\lambda}^{(|n-k|-1)} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} \right) \times \\ &\times \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} \left(\frac{-1}{4\kappa^2} \right)^s \frac{(|n-k|-s-1)!}{s! (|n-k|-2s)!} x^{|n-k|-2s} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-\frac{p^2}{m\hbar\omega}} L_{\lambda} \left(\frac{2p^2}{m\hbar\omega} \right) \sqrt{2\varepsilon}^{2s} dp, \\ I_{n,k}^{\ell} &= A_{n,k} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}} \frac{|n-k|}{2} (2\kappa)^{|n-k|} \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} L_{\min(n,k)-\lambda}^{(|n-k|-1)} \left(\frac{2m\omega x^2}{\hbar} \right) \times \\ &\times \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} \left(\frac{-1}{4\kappa^2} \right)^s \frac{(|n-k|-s-1)!}{s! (|n-k|-2s)!} x^{|n-k|-2s} J_{\lambda}^{\ell}(x), \\ J_{\lambda}^{\ell,s}(x) &\stackrel{\text{det}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} p^{2\ell} e^{-\frac{p^2}{m\hbar\omega}} L_{\lambda} \left(\frac{2p^2}{m\hbar\omega} \right) \left(\frac{p^2}{m\hbar\omega} + \frac{m\omega x^2}{\hbar} \right)^s dp. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Вычислим интеграл $J_{\lambda}^{\ell,s}(x)$. Введем обозначения $\bar{p} = p/(\sqrt{m\hbar\omega})$, $\bar{x} = \kappa x$, получим

$$\begin{aligned} J_{\lambda}^{\ell,s}(x) &= (m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}^{2\ell} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) (\bar{p}^2 + \bar{x}^2)^s d\bar{p} = \\ &= (m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \sum_{\mu=0}^s C_s^{\mu} \bar{x}^{2(s-\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}^{2\ell} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) \bar{p}^{2\mu} d\bar{p}, \quad (1.39) \\ J_{\lambda}^{\ell,s}(x) &= 2(m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \sum_{\mu=0}^s C_s^{\mu} \bar{x}^{2(s-\mu)} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+\mu)} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) d\bar{p}. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл, стоящий в выражении (1.39). Производя интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+\mu)} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) d\bar{p} &= \frac{1}{2(\ell+\mu)+1} \int_0^{+\infty} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) d\bar{p}^{2(\ell+\mu)+1} = \\ &= -\frac{1}{2(\ell+\mu)+1} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+\mu)+1} \frac{d}{d\bar{p}} [e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2)] d\bar{p}. \quad (1.40) \end{aligned}$$

Воспользуемся выражением $L'_{\lambda}(x) = (\lambda/x) [L_{\lambda}(x) - L_{\lambda-1}(x)]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{p}} [e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2)] &= -2\bar{p} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) + e^{-\bar{p}^2} L'_{\lambda}(2\bar{p}^2) 4\bar{p} = \\ &= 2e^{-\bar{p}^2} [2\bar{p} L'_{\lambda}(2\bar{p}^2) - \bar{p} L_{\lambda}(2\bar{p}^2)] = \quad (1.41) \\ &= 2e^{-\bar{p}^2} \left[\frac{\lambda}{\bar{p}} (L_{\lambda}(2\bar{p}^2) - L_{\lambda-1}(2\bar{p}^2)) - \bar{p} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) \right], \\ \frac{d}{d\bar{p}} [e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2)] &= \frac{2}{\bar{p}} e^{-\bar{p}^2} [(\lambda - \bar{p}^2) L_{\lambda}(2\bar{p}^2) - \lambda L_{\lambda-1}(2\bar{p}^2)]. \end{aligned}$$

Подставим выражение для производной (1.41) в интеграл (1.40), получим

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+\mu)} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) d\bar{p} &= \\ &= -\frac{2}{2(\ell+\mu)+1} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+\mu)} e^{-\bar{p}^2} [(\lambda - \bar{p}^2) L_{\lambda}(2\bar{p}^2) - \lambda L_{\lambda-1}(2\bar{p}^2)] d\bar{p} = \\ &= -\frac{2\lambda}{2(\ell+\mu)+1} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell+\mu)} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda}(2\bar{p}^2) d\bar{p} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{2(\ell + \mu) + 1} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell + \mu) + 2} e^{-\bar{p}^2} L_\lambda(2\bar{p}^2) d\bar{p} + \\
& + \frac{2\lambda}{2(\ell + \mu) + 1} \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell + \mu)} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda-1}(2\bar{p}^2) d\bar{p},
\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell + \mu) + 2} e^{-\bar{p}^2} L_\lambda(2\bar{p}^2) d\bar{p} = \\
& = \left(\ell + \mu + \lambda + \frac{1}{2} \right) \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell + \mu)} e^{-\bar{p}^2} L_\lambda(2\bar{p}^2) d\bar{p} - \\
& - \lambda \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2(\ell + \mu)} e^{-\bar{p}^2} L_{\lambda-1}(2\bar{p}^2) d\bar{p},
\end{aligned}$$

или

$$G_\lambda^{2(\ell + \mu) + 2} = \left(\ell + \mu + \lambda + \frac{1}{2} \right) G_\lambda^{2(\ell + \mu)} - \lambda G_{\lambda-1}^{2(\ell + \mu)}, \quad (1.42)$$

где

$$G_\lambda^{2\beta} = \int_0^{+\infty} \bar{p}^{2\beta} e^{-\bar{p}^2} L_\lambda(2\bar{p}^2) d\bar{p}. \quad (1.43)$$

В работе [63] вычислены интегралы

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau^2} L_k(2\tau^2) d\tau = (-1)^k \frac{\sqrt{\pi}}{2^k k!} H_k^2(0), \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \tau^2 e^{-\tau^2} L_k(2\tau^2) d\tau = (-1)^k \sqrt{\pi} \left\{ \frac{1}{2^{k+1} k!} H_k^2(0) + \sum_{s=1}^k \frac{H_{k-s}^2(0)}{2^{k-s} (k-s)!} \right\}.
\end{aligned} \quad (1.44)$$

С учетом результата (1.44) интеграл (1.43) при $\beta = 0$ и $\beta = 1$ примет соответственно вид

$$\begin{aligned}
G_\lambda^0 &= (-1)^\lambda \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\lambda+1} \lambda!} H_\lambda^2(0), \\
G_\lambda^2 &= (-1)^\lambda \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ \frac{1}{2^{\lambda+1} \lambda!} H_\lambda^2(0) + \sum_{r=1}^{\lambda} \frac{H_{\lambda-r}^2(0)}{2^{\lambda-r} (\lambda-r)!} \right\}.
\end{aligned} \quad (1.45)$$

Заметим, что исходный интеграл (1.40) равен $G_\lambda^{2\beta}$ при $\beta = \ell + \mu$. Формулу (1.42) можно переписать в виде

$$G_\lambda^{2\beta} = \left(\beta + \lambda - \frac{1}{2} \right) G_\lambda^{2(\beta-1)} - \lambda G_{\lambda-1}^{2(\beta-1)}, \quad \beta \in \mathbb{N}. \quad (1.46)$$

Подставляя выражение (1.45) в рекуррентную формулу (1.46), можно вычислить значения $G_\lambda^{2\beta}$, $\beta = \ell + \mu$. Таким образом,

$$J_\lambda^{\ell,s}(x) = 2(m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \sum_{\mu=0}^s C_s^\mu G_\lambda^{2(\ell+\mu)}(\kappa x)^{2(s-\mu)}. \quad (1.47)$$

Окончательно для интеграла $I_{n,k}^\ell$ (1.38) получим

$$\begin{aligned} I_{n,k}^\ell = & A_{n,k} 2^{|n-k|} |n-k| (m\hbar\omega)^{\ell+1/2} \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \times \\ & \times \sum_{s=0}^{\lfloor |n-k|/2 \rfloor} (-1)^s \frac{(|n-k|-s-1)!}{4^s s! (|n-k|-2s)!} \times \\ & \times \sum_{\mu=0}^s C_s^\mu G_\lambda^{2(\ell+\mu)}(\kappa x)^{|n-k|-2\mu} L_{\min(n,k)-\lambda}^{(|n-k|-1)}(2\kappa^2 x^2) e^{-\kappa^2 x^2}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Если учесть соотношение (1.24) $\frac{1}{s} C_{|n-k|-(s+1)}^{s-1} = \frac{(|n-k|-s-1)!}{s! (|n-k|-2s)!}$, то выражение (1.48) примет вид

$$\begin{aligned} I_{n,k}^\ell = & (-1)^{\min(n,k)} \frac{(m\hbar\omega)^{\ell+1/2}}{\pi\hbar} 2^{\frac{3}{2}|n-k|} \sqrt{\frac{\min(n,k)!}{\max(n,k)!}} |n-k| \times \\ & \times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{\lfloor |n-k|/2 \rfloor} \sum_{\mu=0}^s \frac{(-1)^s}{s} C_{|n-k|-s-1}^{s-1} C_s^\mu G_\lambda^{2(\ell+\mu)} \bar{x}^{|n-k|-2\mu} \times \\ & \times L_{\min(n,k)-\lambda}^{(|n-k|-1)}(2\bar{x}^2) e^{-\bar{x}^2}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

В случае, когда $n = k$, невозможно воспользоваться формулой (1.37), поэтому интеграл $I_{n,n}^\ell(x)$ имеет вид (1.27). Теорема 2 доказана.

Заметим, что для нахождения коэффициентов $G_\lambda^{2\beta}$ (1.35) удобно использовать формулы нулей полиномов Эрмита $H_{2\lambda}^2(0) = \frac{(2\lambda)!(2\lambda)!}{\lambda!\lambda!}$, $H_{2\lambda+1}^2(0) = 0$.

Используя формулы (1.16) и (1.34) в выражении (1.10), можно получить распределение средней энергии $\langle \mathcal{E}_N \rangle_{s,x}$. Получим аналогичное выражение для распределения $\langle \mathcal{E}_N \rangle_{s,p}$ (1.10). Знаменатель и числитель

дробь (1.10) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}
 R_s^{(1)}(p) &= \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} w_{n,k}(x, p) dx = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} J_{n,k}^0(p), \\
 R_s^{(2)}(p) &= \frac{p^2}{2m} R_s^{(1)}(p) + \sum_{r=0}^N a_r \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r w_{n,k}(x, p) dx = \\
 &= \frac{p^2}{2m} R_s^{(1)}(p) + \sum_{r=0}^N a_r \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} J_{n,k}^r(p).
 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Следовательно,

$$\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}(p) = T(p) + \sum_{r=0}^N a_r \langle x^r \rangle_2^{(s)}(p), \quad (1.51)$$

$$\langle x^r \rangle_2^{(s)}(p) = \frac{\sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} J_{n,k}^r(p)}{\sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{k,n}^{(s)} J_{n,k}^0(p)}, \quad (1.52)$$

$$J_{n,k}^r(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r w_{n,k}(x, p) dx, \quad r \in \mathbb{N}_0,$$

где $T(p) \stackrel{\text{def}}{=} p^2/(2m)$. Сформулируем следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть матрица плотности удовлетворяет условию $\rho_{n,k} = \rho_{k,n}$, тогда функции $J_{n,k}^r(p)$ в выражении для средней величины $\langle x^r \rangle_2^{(s)}$, $r \in \mathbb{N}_0$, (1.52) имеют следующий вид:

при $n \neq k$

$$J_{n,k}^r(p) = \begin{cases} 0, & |n-k| + r = 2\nu + 1, \\ \frac{|n-k|}{2\hbar\kappa^{r+1}} \sqrt{\frac{2^{3\max(n,k)-\min(n,k)}}{\pi n!k!}} \times \\ \times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{|n-k|/2} \sum_{\mu=0}^{\min(n,k)+s-\lambda} \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda!}{2^{\lambda+s+\mu+\nu} s!} |2(\nu + \mu - s) - 1|!! \times \\ \times C_{\min(n,k)+s-\lambda}^{\mu} C_k^{\lambda} C_n^{\lambda} C_{|n-k|-s-1}^{s-1} \times \\ \times \bar{p}^{2(\min(n,k)+s-\lambda-\mu)} e^{-\bar{p}^2}, & |n-k| + r = 2\nu, \end{cases} \quad (1.53)$$

при $n = k$

$$J_{n,n}^r(p) = \begin{cases} 0, & r = 2\ell + 1, \\ \frac{2^n n!}{\kappa^{2\ell+1} \hbar \sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^n \sum_{\mu=0}^{n-\lambda} \frac{(-1)^\lambda |2(\ell + \mu) - 1|!!}{2^{\lambda+\ell+\mu} \lambda! [(n-\lambda)!]^2} \times \\ \times C_{n-\lambda}^\mu \bar{p}^{2(n-\lambda-\mu)} e^{-\bar{p}^2}, & r = 2\ell, \end{cases} \quad (1.54)$$

где $\bar{p} = p/\sqrt{m\hbar\omega}$, $\nu = 0, 1, \dots$

Доказательство теоремы 3. Преобразуем интеграл (1.52), получим

$$\begin{aligned} R_s^{(1)}(p) \langle x^r \rangle_2^{(s)} &= \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{n,k}^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r w_{n,k}(x, p) dx = \\ &= \frac{1}{\pi \hbar} \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{n,k}^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) \cos[(n-k)\varphi] dx + \\ &+ \frac{i}{\pi \hbar} \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{n,k}^{(s)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) \sin[(n-k)\varphi] dx. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Так как по условию теоремы $\rho_{n,k}^{(s)} = \rho_{k,n}^{(s)}$, в силу нечетности функции $\sin[(n-k)\varphi] = -\sin[(k-n)\varphi]$ при суммировании по индексам n, k мнимая часть выражения (1.55) обратится в ноль. Рассмотрим действительную часть выражения (1.55):

$$\begin{aligned} R_s^{(1)} \langle x^r \rangle_2^{(s)} &= \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{n,k}^{(s)} J_{n,k}^r(p), \\ J_{n,k}^r(p) &= \frac{1}{\pi \hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon}) \cos[(n-k)\varphi] dx. \end{aligned} \quad (1.56)$$

При интегрировании по переменной $x \in (-\infty, +\infty)$ угол φ меняется от π до 0. Значение $x = 0$ соответствует углу $\varphi = \pi/2$. На указанном промежутке функция $\cos[(n-k)\varphi]$ является четной при $|n-k| = 2j$, а при $|n-k| = 2j+1$ — нечетной. Функция $\Upsilon_{n,k}(\sqrt{2\varepsilon})$ является четной по переменной x . Следовательно, интеграл (1.56) $J_{n,k}^{2\ell}(p) = 0$ при $|n-k| = 2j+1$ и $J_{n,k}^{2\ell+1}(p) = 0$ при $|n-k| = 2j$. Вычислим интеграл (1.56):

$$\begin{aligned} J_{n,k}^r(p) &= \frac{\sqrt{n!k!}}{\pi \hbar} \frac{|n-k|}{2} 2^{|n-k|+n+k} \times \\ &\times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{|n-k|/2} \frac{(-1)^{\lambda+s}}{2^{2(\lambda+s)} \lambda! (k-\lambda)! (n-\lambda)!} \frac{(|n-k|-s-1)!}{s! (|n-k|-2s)!} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} x^r e^{-2\varepsilon} \varepsilon^{\frac{n+k}{2} - \lambda \bar{x} |n-k| - 2s} (2\varepsilon)^{-\frac{|n-k| - 2s}{2}} dx = \\
& = \frac{1}{\pi \hbar \kappa^{r+1}} \frac{|n-k|}{\sqrt{n!k!}} 2^{\frac{|n-k|}{2} + n+k-1} \times \\
& \times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda!}{2^{2(\lambda+s)-s} s} C_k^\lambda C_n^\lambda C_{|n-k|-s-1}^{s-1} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\varepsilon} \varepsilon^{\frac{n+k-|n-k|}{2} + s - \lambda \bar{x} |n-k| - 2s+r} d\bar{x}, \tag{1.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{n,k}^r(p) &= \frac{1}{\pi \hbar \kappa^{r+1}} \frac{|n-k|}{\sqrt{n!k!}} 2^{\frac{|n-k|}{2} - \min(n,k) + n+k-1} \times \\
& \times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} \frac{(-1)^{\lambda+s} 2^{\lambda-s} \lambda!}{2^{2(\lambda+s)-s} s} C_k^\lambda C_n^\lambda C_{|n-k|-s-1}^{s-1} e^{-\bar{p}^2} \times \\
& \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\bar{x}^2} (\bar{p}^2 + \bar{x}^2)^{\min(n,k) + s - \lambda} \bar{x}^{|n-k| - 2s+r} d\bar{x}, \\
J_{n,k}^r(p) &= \frac{|n-k|}{2\pi \hbar \kappa^{r+1}} \sqrt{\frac{2^{3\max(n,k) - \min(n,k)}}{n!k!}} \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \times \\
& \times \sum_{s=0}^{[|n-k|/2]} \sum_{\mu=0}^{\min(n,k) + s - \lambda} \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda!}{2^{\lambda+2s} s} C_{\min(n,k) + s - \lambda}^\mu C_k^\lambda C_n^\lambda C_{|n-k|-s-1}^{s-1} \times \\
& \times \bar{p}^{2(\min(n,k) + s - \lambda - \mu)} e^{-\bar{p}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\bar{x}^2} \bar{x}^{|n-k| + r + 2(\mu-s)} d\bar{x}.
\end{aligned}$$

Интеграл, стоящий в выражении (1.57), можно представить как

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\bar{x}^2} \bar{x}^{|n-k| + r + 2(\mu-s)} d\bar{x} = \\
& = \begin{cases} 0, & \text{если } |n-k| + r = 2\nu + 1, \\ \frac{|2(\nu + \mu - s) - 1|!!}{2^{\nu + \mu - s}} \sqrt{\pi}, & \text{если } |n-k| + r = 2\nu. \end{cases} \tag{1.58}
\end{aligned}$$

С учетом выражения (1.58) интеграл (1.57) примет вид

$$J_{n,k}^r(p) = \begin{cases} 0, & \text{если } |n-k| + r = 2\nu + 1, \\ \frac{|n-k|}{2\hbar\kappa^{r+1}} \sqrt{\frac{2^{3\max(n,k)-\min(n,k)}}{\pi n!k!}} \times \\ \times \sum_{\lambda=0}^{\min(n,k)} \sum_{s=0}^{\lfloor |n-k|/2 \rfloor} \sum_{\mu=0}^{\min(n,k)+s-\lambda} \frac{(-1)^{\lambda+s} \lambda!}{2^{\lambda+s+\mu+\nu_s}} |2(\nu + \mu - s) - 1|!! \times \\ \times C_{\min(n,k)+s-\lambda}^\mu C_k^\lambda C_n^\lambda C_{|n-k|-s-1}^{s-1} \times \\ \times \bar{p}^{2(\min(n,k)+s-\lambda-\mu)} e^{-\bar{p}^2}, & \text{если } |n-k| + r = 2\nu. \end{cases} \quad (1.59)$$

При $n = k$ интеграл $J_{n,n}^{2\ell+1}(p) = 0$, поэтому достаточно вычислить только $J_{n,n}^{2\ell}(p)$:

$$\begin{aligned} J_{n,n}^{2\ell}(p) &= \frac{2}{\pi\hbar} \int_0^{+\infty} x^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \Upsilon_{n,n}(\sqrt{2\varepsilon}) dx = \\ &= \frac{n!}{\pi\hbar} 2^{2n+1} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-1)^\lambda}{2^{2\lambda} \lambda! [(n-\lambda)!]^2} \int_0^{+\infty} x^{2\ell} e^{-2\varepsilon} \varepsilon^{n-\lambda} dx = \\ &= \frac{2^{n+1} n!}{\kappa^{2\ell+1} \pi\hbar} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-1)^\lambda e^{-\bar{p}^2}}{2^{\lambda} \lambda! [(n-\lambda)!]^2} \int_0^{+\infty} \bar{x}^{2\ell} e^{-\bar{x}^2} (\bar{p}^2 + \bar{x}^2)^{n-\lambda} d\bar{x} = \\ &= \frac{2^{n+1} n!}{\kappa^{2\ell+1} \pi\hbar} \sum_{\lambda=0}^n \frac{(-1)^\lambda e^{-\bar{p}^2}}{2^{\lambda} \lambda! [(n-\lambda)!]^2} \times \\ &\times \sum_{\mu=0}^{n-\lambda} C_{n-\lambda}^\mu \bar{p}^{2(n-\lambda-\mu)} \int_0^{+\infty} \bar{x}^{2(\ell+\mu)} e^{-\bar{x}^2} d\bar{x}, \\ J_{n,n}^{2\ell}(p) &= \frac{2^n n!}{\kappa^{2\ell+1} \hbar \sqrt{\pi}} \sum_{\lambda=0}^n \sum_{\mu=0}^{n-\lambda} \frac{(-1)^\lambda |2(\ell + \mu) - 1|!!}{2^{\lambda+\ell+\mu} \lambda! [(n-\lambda)!]^2} C_{n-\lambda}^\mu \bar{p}^{2(n-\lambda-\mu)} e^{-\bar{p}^2}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Учитывая, что $R_s^{(1)}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} W_s(x, p) dx = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \rho_{n,k} J_{n,k}^0(p)$, и выражения (1.56), (1.59), (1.60), приходим к справедливости (1.53) и (1.54). Теорема 3 доказана.

Подставляя выражения (1.53) и (1.54) в формулу (1.52), можно определить $\langle x^r \rangle_2^{(s)}$, а следовательно, и среднюю энергию (1.51) $\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}$.

1.3. Модельный пример. В качестве примера рассмотрим потенциал третьей степени ($N = 3$) $U_3(x)$ с коэффициентами $\{a_r\} = \{0; 0; 2; -0, 2\}$ (1.5). Степень ангармоничности потенциала определяется коэффициентом a_3 . Решая стационарное уравнение Шрёдингера с потенциалом $U_3(x)$ методом, изложенным в работе [59], получим волновые функции $\Psi_s(x)$, где s — номер квантового состояния. На рис. 1 показаны кривые плотности вероятностей $|\Psi_s(x)|^2$ для первых четырех состояний $s = 0, 1, 2, 3$. В случае гармонического осциллятора $U_2(x)$ распределения $|\Psi_s(x)|^2$ являются четными функциями. Как видно из рис. 1, кривые распределений $|\Psi_s(x)|^2$ имеют асимметричный вид относительно начала координат, что вызвано наличием ангармоничности в потенциале $U_3(x)$. Помимо сдвига распределений вправо наблюдается рост амплитуды распределений.

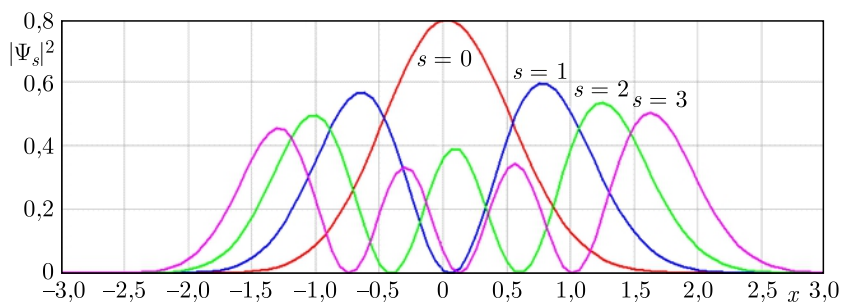


Рис. 1. Плотность вероятностей $|\Psi_s|^2(x)$ для квантовых состояний $s = 0, 1, 2, 3$

На рис. 2 показаны распределения функций Вигнера $W_s(x, p)$, соответствующих волновым функциям $\Psi_s(x)$. Для быстрого построения функции $W_s(x, p)$ использовался численно-аналитический метод, изложенный в работе [64]. В отличие от функций Вигнера гармонического осциллятора распределения квазиплотности вероятностей $W_s(x, p)$, приведенные на рис. 2, имеют явный асимметричный вид вдоль координатной оси OX фазовой плоскости. Функция Вигнера основного состояния ($s = 0$) гармонического осциллятора является положительной функцией (теорема Хадсона).

На рис. 2 функция $W_0(x, p)$ имеет небольшую область отрицательных значений, которая не заметна на рисунке. Наличие этой области напрямую связано с видом функций $w_{n,k}(x, p)$. Из представления (1.8) следует, что функция $w_{n,k}(x, p)$ в фазовой плоскости имеет факторизованный вид $R_{n,k}(\varepsilon) \Phi_{n,k}(\varphi)$. Угловая часть $\Phi_{n,k}(\varphi)$ принимает положительные и отрицательные значения независимо от значений ε для всех $|n - k| \neq 0$. При $|n - k| = 0$ только одна функция $R_{n,n}(\varepsilon)$ является положительной — $R_{0,0}(\varepsilon)$, т. е. основное состояние гармонического осциллятора (гауссово распределение).

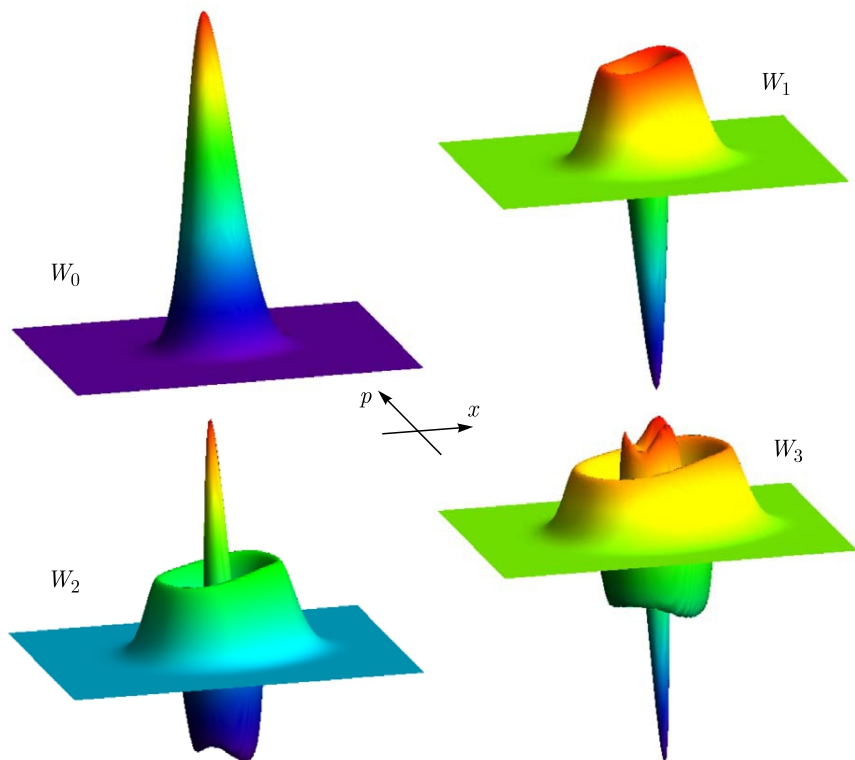


Рис. 2. Плотность квазивероятностей $W_s(x, p)$ для квантовых состояний $s = 0, 1, 2, 3$

Внешне функции распределения $W_s(x, p)$ похожи на функции Вигнера гармонического осциллятора, но из-за наличия ангармоничности в потенциале $U_3(x)$ не являются четными по координате.

На рис.3 приведены распределения средней энергии $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(s)}$ (синие кривые, 1) для трех состояний $s = 1, 2, 3$. Численные расчеты выполнены по формулам (1.15) и (1.51). Для основного состояния ($s = 0$) графики энергий $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(0)}$ и $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(0)}$ «почти» совпадают с функциями $U_3(x)$ и $T(p)$ соответственно, поэтому на рис.3 они отсутствуют. Слева на рис.3 расположены распределения $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(s)}$ вдоль оси импульсов OP , а справа — распределения $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(s)}$ вдоль оси координат OX . Распределения $U_3(x)$ и $T(p)$ на рис.3 представлены красными кривыми (2). Распределения $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(s)}$ по импульсу являются четными функциями, а распределения $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(s)}$ имеют явную асимметричную форму вдоль оси координат. Все распределения $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(s)}$ имеют полюсы, в которых

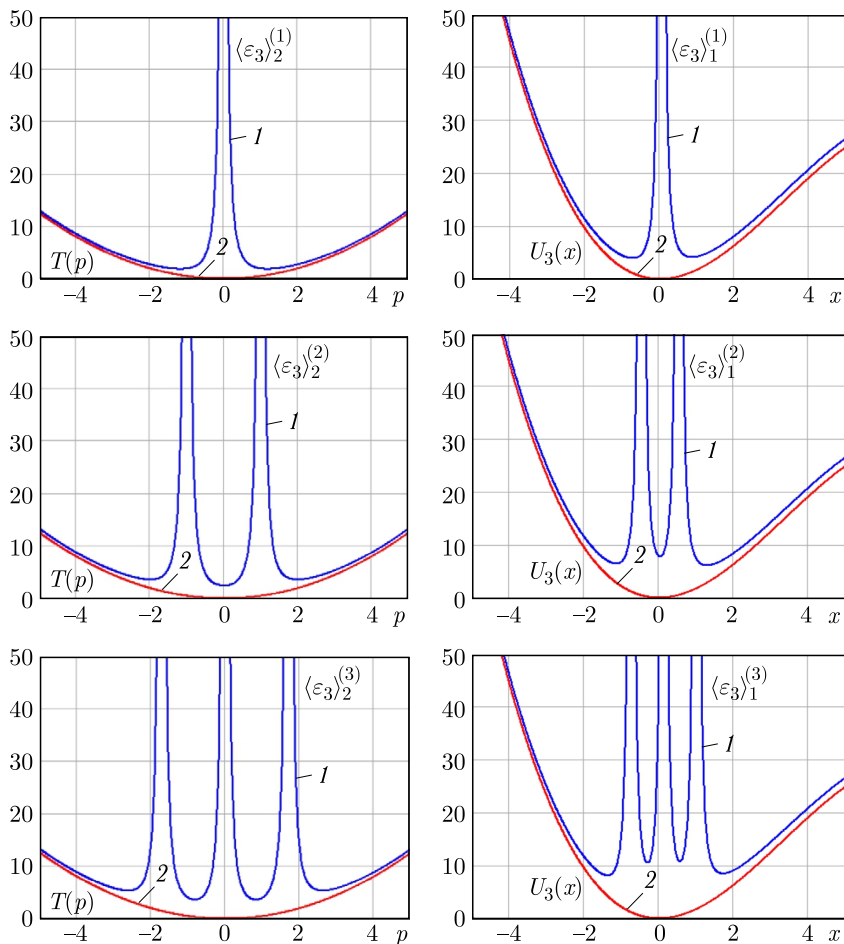


Рис. 3 (цветной в электронной версии). Средняя энергия $\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}$ для квантовых состояний $s = 1, 2, 3$

средняя энергия $\langle \mathcal{E}_3 \rangle^{(s)}$ стремится к бесконечности. Количество полюсов у функции средней энергии $\langle \mathcal{E}_3 \rangle^{(s)}$ определяется номером квантового состояния s .

Сравним положение полюсов средних энергий $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(s)}$ (см. рис. 3) с областями, где соответствующие распределения функций Вигнера $W_s(x, 0)$ и $W_s(0, p)$ (см. рис. 2) имеют области отрицательных значений. На рис. 4 сделано наложение данных из рис. 2 и 3. Распределения $W_s(x, 0)$ и $W_s(0, p)$ на рис. 4 показаны зелеными кривыми (3). Черными точками на рис. 4 отмечены положения полюсов средних энергий $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(s)}$

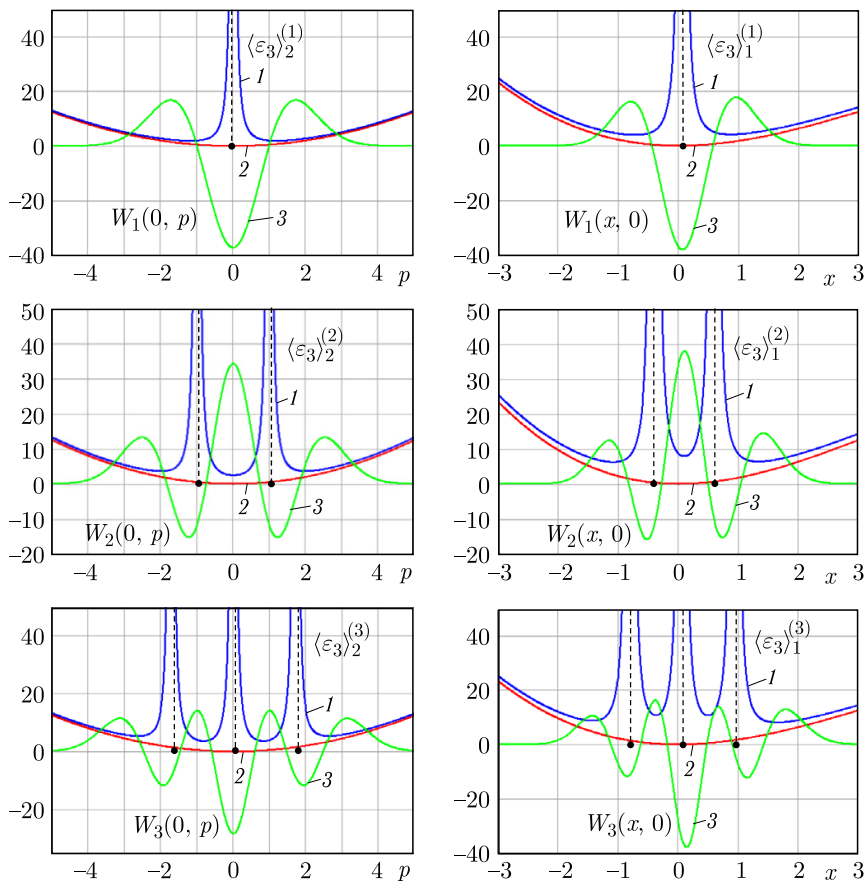


Рис. 4 (цветной в электронной версии). Области отрицательных значений функции Вигнера и полюсы энергий

и $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(s)}$. Видно, что полюсы средних энергий $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_3 \rangle_2^{(s)}$ (синие кривые) находятся в областях отрицательных значений распределений квазиплотностей вероятностей $W_s(x, 0)$ и $W_s(0, p)$ соответственно.

Как и в случае гармонического осциллятора (потенциала второй степени U_2), осциллятор с полиномиальным потенциалом U_N также имеет полюсы функций энергии $\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}$, расположенные в областях, где функция Вигнера принимает отрицательные значения (см. рис. 4). Полюсы приводят к разбиению функции распределения энергии $\langle \mathcal{E}_N \rangle^{(s)}$ на энергетические ямы, разделенные бесконечно высокими барьерами (см. рис. 3). Количество таких ям равно номеру квантового состояния s осциллятора.

Для гармонического осциллятора распределения $\langle \mathcal{E}_2 \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_2 \rangle_2^{(s)}$ являются симметричными из-за симметрии функции «энергии» $\varepsilon(x, p)$ (1.1) по координате и импульсу. Для осциллятора с полиномиальным потенциалом U_N симметрия функций $\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}$ нарушена (см. рис. 3) наличием ангармонических членов в функции $\mathcal{E}_N(x, p)$ (1.9).

Несмотря на то, что основное состояние осциллятора с полиномиальным потенциалом имеет область отрицательных значений, полюсы у функций $\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(0)}$ и $\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(0)}$ отсутствуют. Заметим, что у гармонического осциллятора также нет полюсов у функций $\langle \mathcal{E}_2 \rangle_1^{(0)}$ и $\langle \mathcal{E}_2 \rangle_2^{(0)}$ основного состояния ($s = 0$).

Положение полюсов у функций $\langle \mathcal{E}_N \rangle_1^{(s)}$ и $\langle \mathcal{E}_N \rangle_2^{(s)}$ определяется нулями функций плотностей распределения координат $|\Psi_s(x)|^2$ и импульсов $|\tilde{\Psi}_s(p)|^2$ соответственно (см. рис. 1 для координатного представления).

Исследуем подробнее вопрос взаимосвязи номера квантового состояния s и количества потенциальных/энергетических ям (см. рис. 4), возникающих из-за полюсов функции энергии $\langle \mathcal{E} \rangle^{(s)}$. Для простоты рассмотрим гармонический осциллятор, описываемый волновой функцией $\psi_s(x)$ и спектром энергий E_s :

$$\begin{aligned} \psi_s(x) &= \frac{1}{\sqrt{2^s s!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} H_s \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right), \\ E_s &= \hbar\omega \left(s + \frac{1}{2} \right), \quad s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

где H_s — полиномы Эрмита. Величины (1.61) являются решением задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \hat{H}\psi_s = E_s\psi_s, & \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U_2(x), \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} |\psi_s(x)| = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Пусть $x_k^{(s)}$ — нули полиномов Эрмита H_s , т. е. $H_s(x_k^{(s)}) = 0$. Известно, что полином H_s имеет s вещественных нулей ($k = 1, \dots, s$), которые попарно симметрично расположены относительно начала координат, и $|x_k^{(s)}| < \sqrt{s(s-1)/2}$. Нули $x_k^{(s)}$ полинома H_s чередуются с нулями $x_k^{(s+1)}$ полинома H_{s+1} .

Для полинома H_s степени s рассмотрим $C_{s+2}^2 = 1/2(s+1)(s+2)$ множеств $\{\sigma_{j,n}^{(s)}\}$, где $j, n = 1, \dots, C_{s+2}^2$ и $j \neq n$. Множества $\{\sigma_{j,n}^{(s)}\}$ представляют собой отрезки, интервалы и полуинтервалы. Например, при $s = 0$ будет только одно множество $\sigma_{1,1}^{(0)}$ — интервал $(-\infty, +\infty)$, а при

$s = 2$ получится шесть множеств $\{\sigma_{j,n}^{(2)}\}$, $j, n = 1, \dots, 6$ и $j \neq n$:

$$\begin{aligned} &(-\infty, x_1^{(2)}], \quad (-\infty, x_2^{(2)}], \quad (-\infty, +\infty), \\ &[x_1^{(2)}, x_2^{(2)}], \quad [x_1^{(2)}, +\infty), \quad [x_2^{(2)}, +\infty). \end{aligned} \quad (1.63)$$

Границу области $\sigma_{j,n}^{(s)}$ будем обозначать $\bar{\sigma}_{j,n}^{(s)}$. При $x \in \sigma_{j,n}^{(s)}$ волновая функция $\psi_s(x)$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера (1.62), а при $x \in \bar{\sigma}_{j,n}^{(s)}$ $\psi_s(x) = 0$ (где в случае бесконечно удаленной границы равенство $\psi_s(x) = 0$ понимается в смысле предела (1.62)).

Таким образом, на каждом множестве $\sigma_{j,n}^{(s)}$ может быть рассмотрена отдельная краевая задача для уравнения Шрёдингера (1.62) с модифицированным потенциалом $\bar{U}(x)$:

$$\bar{U}_{j,n}^{(s)}(x) = \begin{cases} U_2(x), & \text{если } x \in \sigma_{j,n}^{(s)}, \\ +\infty, & \text{если } x = x_j^{(s)}, \quad x = x_n^{(s)}, \end{cases} \quad (1.64)$$

где $x_j^{(s)}, x_n^{(s)} \in \bar{\sigma}_{j,n}^{(s)}$. Квантовые состояния с нечетными номерами $s = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$, имеют одну общую точку $x_{n+1} = 0$. Таким образом, потенциалы $\bar{U}_{1,n+1}^{(2n-1)}(x)$ и $\bar{U}_{n+1,2n+1}^{(2n-1)}(x)$ являются общими для нечетных квантовых состояний, т.е. в областях $\sigma_{1,n+1}^{(2n-1)}$ и $\sigma_{n+1,2n+1}^{(2n-1)}$ волновые функции $\psi_{2n-1}(x)$ удовлетворяют следующим условиям (рис. 5):

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_{2n-1}}{\partial x^2} + \bar{U}_{1,n+1}^{(2n-1)} \psi_{2n-1} = E_{2n-1} \psi_{2n-1}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} |\psi_{2n-1}(x)| = 0, \quad \psi_{2n-1}(0) = 0, \end{cases} \quad (1.65)$$

и

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi_{2n-1}}{\partial x^2} + \bar{U}_{n+1,2n+1}^{(2n-1)} \psi_{2n-1} = E_{2n-1} \psi_{2n-1}, \\ \psi_{2n-1}(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |\psi_{2n-1}(x)| = 0. \end{cases} \quad (1.66)$$

Как видно из рис. 5, в каждой новой потенциальной яме $\bar{U}_{1,n+1}^{(2n-1)}(x)$ и $\bar{U}_{n+1,2n+1}^{(2n-1)}(x)$ существуют свои волновые функции $\bar{\psi}_\ell^{(-)}$, $\bar{\psi}_\ell^{(+)}$ и соответствующие им собственные значения энергии $\bar{E}_\ell$, где $\ell \in \mathbb{N}_0$.

По аналогии с энергетическим спектром E_s соседние энергетические уровни

$$\bar{E}_\ell = \hbar\omega \left(2\ell + \frac{3}{2} \right), \quad \ell \in \mathbb{N}_0, \quad (1.67)$$

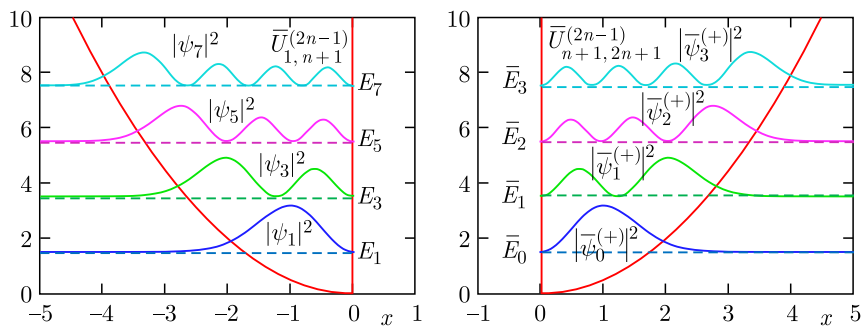
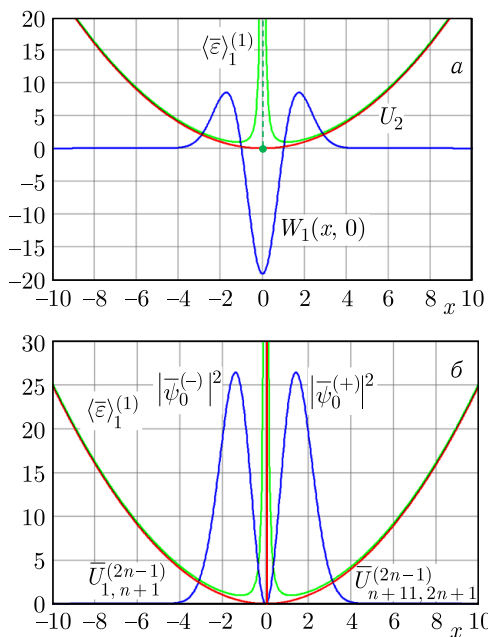


Рис. 5. Плотность вероятностей для краевых задач (1.65) и (1.66)

Рис. 6. Полюсы функции средней энергии $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(1)}$, функция Вигнера W_1 и плотность вероятностей $|\bar{\psi}_0^\pm|^2$

отстоят друг от друга на одинаковом расстоянии, которое для задач (1.65) и (1.66) равно $2\hbar\omega$. Отметим, что в соответствии с условием нормировки новые волновые функции $\bar{\psi}_\ell^{(-)}$, $\bar{\psi}_\ell^{(+)}$ отличны от исходных волновых функций ψ_{2n-1} двойным нормировочным коэффициентом.

Фактически получается, что в новых потенциалах $\bar{U}_{1,n+1}^{(2n-1)}(x)$ и $\bar{U}_{n+1,2n+1}^{(2n-1)}(x)$ существуют новые квантовые осцилляторы со своими волновыми функциями и спектрами энергий.

«Разделение» потенциала $U_2(x)$ на два потенциала $\bar{U}_{1,n+1}^{(2n-1)}(x)$ и $\bar{U}_{n+1,2n+1}^{(2n-1)}(x)$ можно рассмотреть с позиции отрицательных значений функции Вигнера. Выше было показано, что в области отрицательных значений функции Вигнера находятся полюсы функции средней энергии (1.2)–(1.4) гармонического осциллятора $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(s)}(x)$ (рис. 6).

На рис. 6, а показано распределение функции Вигнера $W_1(x, 0)$ вдоль оси координат для первого возбужденного состояния. В центре ($x = 0$) области, в которой функция W_1 имеет отрицательные значения, находится полюс функции средней энергии $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(1)}$. Функция средней энергии $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(1)}$ симметрично локализуется справа и слева относительно полюса в точке $x = 0$. Полюс функции $\langle \bar{\varepsilon} \rangle_1^{(1)}$ создает бесконечный энергетический барьер, который формально приводит к двум «независимым» квантовым системам, поведение которых определяется волновыми функциями $\bar{\psi}_\ell^{(-)}$, $\bar{\psi}_\ell^{(+)}$ (рис. 6, б). Для квантовых состояний с номерами $\ell > 0$ можно построить распределения аналогичные представленным на рис. 6.

1.4 Построение и анализ аппроксимации Власова–Моэля для электрических систем. Классическое и квантовое описания физических систем имеют существенные отличия. Центральное для классической физики понятие траектории отсутствует в квантовом описании микромира. Введение Е. Вигнером фазового пространства для квантовых систем, несмотря на принцип неопределенности Гейзенберга, позволило анализировать процессы, протекающие в микромире в терминах классической физики. Функция Вигнера $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ квазиплотности вероятностей квантовой системы в фазовом пространстве имеет области отрицательных значений [45, 65, 66], а ее эволюция описывается уравнением Моэля:

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{\vec{p}}{m} \nabla_r W - \nabla_r U \cdot \nabla_p W = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} U \left(\nabla_r \cdot \nabla_p \right)^{2l+1} W, \quad (1.68)$$

где U — потенциал, входящий в уравнение Шрёдингера. Уравнение Моэля (1.68) может быть получено из уравнения фон Неймана для матрицы плотности $\hat{\rho}$ и представления функции Вигнера

$$W(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left\langle \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \left| \hat{\rho} \right| \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle e^{-i \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} d^3 s. \quad (1.69)$$

Правая часть уравнения (1.68) содержит ряд с коэффициентами $\hbar^{2l}$, где $\hbar$ — редуцированная постоянная Планка. Если для уравнения (1.68) формально выполнить «классический предельный переход» при $\hbar \rightarrow 0$, то

уравнение Моэля (1.68) перейдет в классическое уравнение Лиувилля для функции распределения $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ с нулевой правой частью. В результате уравнение (1.68) выглядит как расширение уравнения Лиувилля на случай квантовых систем.

При выводе уравнения Моэля предполагается, что потенциал U является аналитической функцией, т. е. допускает разложение в степенной ряд. В случае полиномиального потенциала вида

$$U_N(x, y, z, t) = \sum_{k_1, k_2, k_3=0}^N (a_{k_1} x^{k_1} + b_{k_2} y^{k_2} + c_{k_3} z^{k_3}), \quad (1.70)$$

где $a_{k_1}, b_{k_2}, c_{k_3}$ — известные коэффициенты в работе [59], была построена аппроксимация Власова–Моэля средней кинематической величины $\langle \dot{v} \rangle_{1,2}$ квантовой системы, описываемой функцией Вигнера (1.69):

$$\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x_\mu^{2l+1}} \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\partial^{2l} f^{1,2}}{\partial v_\mu^{2l}}, \quad (1.71)$$

где $f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m^3 W(\vec{r}, \vec{p}, t)$. Подстановка аппроксимации (1.71) во второе уравнение Власова для функции $f^{1,2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{1,2} + \vec{v} \cdot \nabla_r f^{1,2} + \operatorname{div}_v [f^{1,2} \langle \dot{v} \rangle_{1,2}] = 0 \quad (1.72)$$

переводит уравнение (1.72) в уравнение Моэля (1.68). Таким образом, уравнение Моэля является частным случаем второго уравнения Власова (1.72).

Заметим, что при умножении уравнения (1.72) на компоненту скорости v_μ и последующем интегрировании его по всему пространству скоростей получится уравнение движения в гидродинамическом приближении [33, 34]

$$\frac{d}{dt} \langle v_\mu \rangle_1 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle v_\lambda \rangle_1 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \right) \langle v_\mu \rangle_1 = -\frac{1}{f^1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} + \langle \dot{v}_\mu \rangle_1, \quad (1.73)$$

$$P_{\mu\lambda} = \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} (v_\mu - \langle v_\mu \rangle_1) (v_\lambda - \langle v_\lambda \rangle_1) d^3 v, \quad (1.74)$$

где $P_{\mu\lambda}$ — тензор давления, а средние кинематические величины $\langle v_\mu \rangle_1$ и $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$ удовлетворяют соотношениям

$$f^1 \langle v_\mu \rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} v_\mu d^3 v, \quad f^1 \langle \dot{v}_\mu \rangle_1 = \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} d^3 v, \quad f^1 = \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} d^3 v. \quad (1.75)$$

Функция f^1 является решением первого уравнения Власова, которое получается при интегрировании уравнения (1.72) по пространству скоростей (1.75):

$$\frac{\partial}{\partial t} f^1 + \operatorname{div}_r [f^1 \langle \vec{v} \rangle_1] = 0. \quad (1.76)$$

Для произвольного аналитического потенциала U построение аппроксимации кинематической величины $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ не является тривиальной задачей. Такая неопределенность в виде поля $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ возникает из-за неоднозначного перехода от функции квазиплотности вероятностей (функции Вигнера) $f^{1,2} = m^3 W$ к векторному полю $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$, которое не может быть однозначно определено. Квантовый формализм работает со скалярной величиной в виде волновой функции Ψ , плотностью вероятностей $|\Psi|^2$ или квазиплотностью вероятностей W . Классическая физика (кинематическое уравнение Власова (1.72)) содержит среднее векторное поле ускорений $\langle \vec{v} \rangle_{1,2}$. В квантовом формализме отсутствует понятие траектории частицы, которое требует наличия векторной величины $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$, присущей классической физике. Считается, что уравнение Шрёдингера и волновая функция несут всю информацию об эволюции квантовой системы [68]. Попытка интерпретировать поведение квантовой системы в терминах классической физики требует дополнительной информации. Отсутствие этой информации порождает неопределенность в виде поля $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$.

Заметим, что первое слагаемое в аппроксимации (1.71) соответствует классическому уравнению движения $m \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} = -\nabla_r U + \dots$ (1.73). Последующие члены ряда (1.71) имеют коэффициенты $\hbar^{2l}$, которые при формальном предельном переходе к классической механике $\hbar \rightarrow 0$ должны уйти.

Исследуем корректность предельного перехода $\hbar \rightarrow 0$ в уравнении (1.68) и варианты построения аппроксимаций типа (1.71). Исходя из уравнения Моэля (1.68) и второго уравнения Власова (1.72) должно быть выполнено соотношение

$$\operatorname{div}_v \bar{J}_{1,2}^2 = \operatorname{div}_v [f^{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}] = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v)^{2l+1} f^{1,2}. \quad (1.77)$$

Если функция $f^{1,2}$ удовлетворяет условию Власова на бесконечности [33], то поле $\bar{J}_{1,2}^2$ имеет быстрый спад ($1/v^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$). По теореме Гельмгольца [68] достаточно гладкое векторное поле $\bar{J}_{1,2}^2$ может быть представлено как сумма потенциального и вихревого полей

$$\bar{J}_{1,2}^2 = \bar{J}_{1,2}^{2(p)} + \bar{J}_{1,2}^{2(s)} = -\nabla_v \Pi^{1,2} + \operatorname{curl}_v \vec{\Upsilon}_{1,2}, \quad (1.78)$$

где индексы p и s обозначают соответственно потенциальную и вихревую компоненту поля $\bar{J}_{1,2}^2$.

Выражение (1.77) содержит информацию только о потенциальной компоненте поля $\vec{J}_{1,2}^2$, т.е. $\operatorname{div}_v \vec{J}_{1,2}^2 = -\Delta_v \Pi^{1,2}$. Используя выражение (1.77), можно найти потенциал $\Pi^{1,2}$ с точностью до гармонической функции:

$$\Pi^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \operatorname{div}_v \vec{J}_{1,2}^2 d^3 v'. \quad (1.79)$$

Теорема 4. Пусть выполнено условие (1.77), в котором ряд допускает почленное интегрирование, тогда выражение для скалярного потенциала (1.79) имеет вид

$$\Pi^{1,2} = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v \right)^{2l+1} \vartheta^{1,2}, \quad (1.80)$$

где

$$\vartheta^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{4\pi} \int_{(\infty)} \frac{f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}', t)}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d^3 v', \quad (1.81)$$

при этом

$$\Delta_v \vartheta^{1,2} = -f^{1,2}. \quad (1.82)$$

Доказательство теоремы 4. Подставляя выражение (1.77) в интеграл (1.79) и предполагая выполненным условие почленного интегрирования ряда (1.77), получим

$$\begin{aligned} \Pi(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} U \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v \right)^{2l+1} f^{1,2} d^3 v' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \times \\ &\times \sum_{k_1+k_2+k_3=2l+1} \frac{(2l+1)!}{k_1! k_2! k_3!} U \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial x} \frac{\vec{\partial}}{\partial v'_x} \right)^{k_1} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial y} \frac{\vec{\partial}}{\partial v'_y} \right)^{k_2} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial z} \frac{\vec{\partial}}{\partial v'_z} \right)^{k_3} f^{1,2} d^3 v' = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \sum_{k_1+k_2+k_3=2l+1} \frac{(2l+1)!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial v'_x} \right)^{k_1} f^{1,2} dv'_x \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial v'_z} \right)^{k_3} dv'_z \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial v'_y} \right)^{k_2} dv'_y. \quad (1.83) \end{aligned}$$

Вычислим отдельно интеграл по v'_x :

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \frac{\partial^{k_1} f^{1,2}}{\partial v_x'^{k_1}} dv'_x = \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \frac{\partial^{k_1-1} f^{1,2}}{\partial v_x'^{k_1-1}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \\
 & - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{k_1-1} f^{1,2}}{\partial v_x'^{k_1-1}} \frac{\partial}{\partial v'_x} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} dv'_x = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{k_1-1} f^{1,2}}{\partial v_x'^{k_1-1}} \frac{\partial}{\partial v'_x} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} dv'_x = \\
 & = - \frac{\partial^{k_1-2} f^{1,2}}{\partial v_x'^{k_1-2}} \frac{\partial}{\partial v'_x} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{k_1-2} f^{1,2}}{\partial v_x'^{k_1-2}} \frac{\partial^2}{\partial v_x'^2} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} dv'_x = \\
 & = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{k_1-2} f^{1,2}}{\partial v_x'^{k_1-2}} \frac{\partial^2}{\partial v_x'^2} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} dv'_x = \dots = (-1)^{k_1} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{1,2} \frac{\partial^{k_1}}{\partial v_x'^{k_1}} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} dv'_x,
 \end{aligned} \tag{1.84}$$

где учтен быстрый спад на ноль функции распределения и ее производных при $v \rightarrow \infty$. Для интегралов по переменным v'_y и v'_z можно получить выражения, аналогичные представлению (1.84). Учитывая сказанное и подставляя (1.84) в (1.83), получим

$$\begin{aligned}
 \Pi^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \times \\
 & \times \sum_{k_1+k_2+k_3=2l+1} \frac{(2l+1)!}{k_1!k_2!k_3!} (-1)^{k_1} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \times \\
 & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{k_1}}{\partial v_x'^{k_1}} \left(\frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \right) \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial v'_z} \right)^{k_3} \left(\frac{\vec{\partial}}{\partial v'_y} \right)^{k_2} f^{1,2} dv'_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_z \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_y = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l} (-1)^{2l+1}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \times \\
 & \times \sum_{k_1+k_2+k_3=2l+1} \frac{(2l+1)!}{k_1!k_2!k_3!} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \int_{(\infty)} f^{1,2} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial v_x'^{k_1} \partial v_y'^{k_2} \partial v_z'^{k_3}} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d^3 v' = \\
 & = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \int_{(\infty)} f^{1,2} \times \\
 & \times \sum_{k_1+k_2+k_3=2l+1} \frac{(2l+1)!}{k_1!k_2!k_3!} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial v_x'^{k_1} \partial v_y'^{k_2} \partial v_z'^{k_3}} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d^3 v', \\
 \Pi^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U \int_{\mathbb{R}^3} \left[\left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_{v'} \right)^{2l+1} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \right] f^{1,2} d^3 v'.
 \end{aligned} \tag{1.85}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial v'_\mu} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} = -\frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial v'^k_\mu} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} = (-1)^k \frac{\partial}{\partial v_\mu} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|}. \quad (1.86)$$

С учетом преобразования (1.86) выражение (1.85) примет вид

$$\begin{aligned} \Pi^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \times \\ &\times \sum_{k_1+k_2+k_3=2l+1} \frac{(-1)^{2l+1} (2l+1)!}{k_1! k_2! k_3!} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \frac{\partial^{2l+1}}{\partial v_x^{k_1} \partial v_y^{k_2} \partial v_z^{k_3}} \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} \frac{1}{|\vec{v} - \vec{v}'|} d^3 v' = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v \right)^{2l+1} \vartheta^{1,2}. \end{aligned}$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. С точки зрения теории потенциала функция $\vartheta^{1,2}$ (1.81) задает скалярный потенциал, создаваемый источниками, распределенными в пространстве скоростей с плотностью $f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Уравнение (1.82) является уравнением Пуассона

$$\operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 = f^{1,2}. \quad (1.87)$$

Согласно теореме Гельмгольца поле $\vec{D}_{1,2}^2$ можно представить как

$$\vec{D}_{1,2}^2 = -\partial_1 \vec{A}_{1,2}^2 - \nabla_v \vartheta^{1,2}, \quad (1.88)$$

где $\partial_1 = \partial_0 + \vec{v} \cdot \nabla_r$ и $\partial_0 = \partial/\partial t$,

$$\operatorname{div}_v \vec{A}_{1,2}^2 = \operatorname{div}_r \vec{A}_{1,2}^2 = 0. \quad (1.89)$$

Второе условие $\operatorname{div}_r \vec{A}_{1,2}^2 = 0$ в (1.89) является дополнительным на координатную зависимость векторного потенциала $\vec{A}_{1,2}^2$. Если существует такое поле $\vec{A}_{1,2}^2$, удовлетворяющее условиям (1.89), то представление (1.88) является корректным, т.е. $\operatorname{div}_v \left(\partial_1 \vec{A}_{1,2}^2 \right) = 0$ и уравнение (1.87) выполнено. Действительно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_v \left(\partial_1 \vec{A}_{1,2} \right) &= \partial_0 \operatorname{div}_v \vec{A}_{1,2} + \operatorname{div}_v \left[(\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{A}_{1,2} \right] = \\ &= \partial_0 \operatorname{div}_v \vec{A}_{1,2} + \operatorname{div}_r \vec{A}_{1,2} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \operatorname{div}_v \vec{A}_{1,2}, \quad (1.90) \\ \operatorname{div}_v \left(\partial_1 \vec{A}_{1,2}^2 \right) &= \partial_1 \operatorname{div}_v \vec{A}_{1,2}^2 + \operatorname{div}_r \vec{A}_{1,2}^2, \end{aligned}$$

где учтено, что

$$\frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left(v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} A_\alpha^2 \right) = \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} A_\alpha^2 + v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} A_\alpha^2 = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} A_\alpha^2 + v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} A_\alpha^2.$$

Выражение (1.90) доказывает справедливость представления (1.88) для уравнения (1.87). Так как функция $f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ удовлетворяет второму уравнению Власова, согласно работе [12] получим уравнения для полей $\vec{D}_{1,2}^1$ и $\vec{D}_{1,2}^2$:

$$f^{1,2} = \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 + \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2, \quad (1.91)$$

где

$$\operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 = 0. \quad (1.92)$$

Уравнение (1.91) является расширением исходного уравнения (1.87). Подставляя (1.91) во второе уравнение Власова, получим

$$\begin{aligned} \partial_1 f^{1,2} + \operatorname{div}_v \left[f^{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \right] &= 0, \\ \operatorname{div}_r \partial_0 \vec{D}_{1,2}^1 + \operatorname{div}_v \partial_0 \vec{D}_{1,2}^2 + \vec{v} \cdot \nabla_r \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 + \vec{v} \cdot \nabla_r \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 + \operatorname{div}_v \vec{J}_{1,2}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Учтем, что

$$\vec{v} \cdot \nabla_r \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 \mapsto v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial D_\alpha^1}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} v_\beta \frac{\partial D_\alpha^1}{\partial x_\beta} \mapsto \operatorname{div}_r \left[(\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^1 \right], \quad (1.94)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \nabla_r \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 &\mapsto v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial D_\alpha^2}{\partial v_\alpha} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left(v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} D_\alpha^2 \right) - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} D_\alpha^2 = \\ &= \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left(v_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} D_\alpha^2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} D_\alpha^2, \end{aligned} \quad (1.95)$$

$$\vec{v} \cdot \nabla_r \operatorname{div}_v \vec{D}_{1,2}^2 = \operatorname{div}_v \left[(\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^2 \right] - \operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^2.$$

Подстановка выражений (1.94) и (1.95) в уравнение (1.93) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_r \left[\partial_0 \vec{D}_{1,2}^1 + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^1 + \vec{J}_{1,2}^1 \right] + \\ + \operatorname{div}_v \left[\partial_0 \vec{D}_{1,2}^2 + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{D}_{1,2}^2 + \vec{J}_{1,2}^2 \right] &= 0, \end{aligned} \quad (1.96)$$

где $\vec{J}_{1,2}^1 \stackrel{\text{def}}{=} -\vec{D}_{1,2}^2$. Соотношение (1.96) может быть выполнено при условиях [70]:

$$\partial_1 \vec{D}_{1,2}^1 + \vec{J}_{1,2}^1 = \operatorname{curl}_r \vec{H}_{1,2}^1, \quad (1.97)$$

$$\partial_1 \vec{D}_{1,2}^2 + \vec{J}_{1,2}^2 = \operatorname{curl}_v \vec{H}_{1,2}^2, \quad (1.98)$$

где $\vec{H}_{1,2}^1$ и $\vec{H}_{1,2}^2$ — некоторые поля. В работе [69] приведены уравнения Максвелла второго ранга для дисперсионной цепочки уравнений квантовой механики, совпадающие с (1.91), (1.97) и (1.98) при условии $\vec{H}_{1,2}^1 = 0$ и $\operatorname{div}_r \vec{D}_{1,2}^1$, отличным от нуля. В случае $\vec{H}_{1,2}^1 \neq 0$ можно получить уравне-

ние на поле $\vec{H}_{1,2}^1$. Из сравнения представления (1.88) и уравнения (1.97) следует, что

$$\vec{D}_{1,2}^2 = \partial_1 \vec{D}_{1,2}^1 - \text{curl}_r \vec{H}_{1,2}^1 = -\partial_1 \vec{A}_{1,2}^2 - \nabla_v \vartheta^{1,2},$$

т. е.

$$\vec{A}_{1,2}^2 = -\vec{D}_{1,2}^1, \quad \text{div}_r \vec{D}_{1,2}^1 = -\text{div}_r \vec{A}_{1,2}^2 = 0, \quad (1.99)$$

$$\text{curl}_r \vec{H}_{1,2}^1 = \nabla_v \vartheta^{1,2}, \quad (1.100)$$

где учтено условие (1.89). Возьмем div_v от уравнения (1.100), получим

$$\text{div}_v \text{curl}_r \vec{H}_{1,2}^1 = \Delta_v \vartheta^{1,2} = -f^{1,2}, \quad \varepsilon_{\beta\alpha\lambda} \frac{\partial^2 H_\lambda^1}{\partial x_\alpha \partial v_\beta} = -f^{1,2}, \quad (1.101)$$

где $\varepsilon_{\beta\alpha\lambda}$ — символ Леви-Чивиты. Если уравнение (1.101) разрешимо, то его решение определяет поле $\vec{H}_{1,2}^1$ с точностью до некоторой вихревой функции по пространству скоростей.

Если ряд (1.80) допускает почленное дифференцирование, то из теоремы 4 следует, что потенциальная компонента $\vec{J}_{1,2}^{2(p)}$ плотности тока вероятностей (1.78) имеет вид

$$J_\mu^{2(p)} = -\frac{\partial}{\partial v_\mu} \Pi^{1,2} = -\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v \right)^{2l+1} \frac{\partial \vartheta^{1,2}}{\partial v_\mu}. \quad (1.102)$$

Теорема 5. Пусть поле тока $\vec{J}_{1,2}^2$ (1.78) представимо в виде (1.78)–(1.82), а ряд (1.102) допускает почленное интегрирование, тогда выполнено условие Власова [33] нулевого потока по пространству скоростей

$$\int_{\Sigma_\infty} \vec{J}_{1,2}^2 \cdot d\vec{\sigma}_v = 0, \quad (1.103)$$

где Σ_∞ — бесконечно удаленная поверхность.

Доказательство теоремы 5. Согласно теории потенциала асимптотика $\vartheta^{1,2}$ при $v \rightarrow \infty$ имеет вид $\vartheta^{1,2} = C/|\vec{v} - \vec{v}_*|$, где $C = C(\vec{r}, t)$ — некоторая функция, а $\vec{v}_*$ — некоторая точка из пространства скоростей. Следовательно, $\partial \vartheta^{1,2} / \partial v_\mu \sim 1/v^2$ при $v \rightarrow \infty$. Потенциал (1.80) будет иметь асимптотику

$$\begin{aligned} \Pi^{1,2} = & -\frac{1}{m} U \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v \right) \vartheta^{1,2} + \\ & + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v \right)^{2l+1} \vartheta^{1,2} \sim \frac{1}{v^2} + O \left(\frac{\hbar^2}{v^4} \right), \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} \Pi^{1,2} \sim \frac{1}{v^3} + O \left(\frac{\hbar^2}{v^5} \right). \quad (1.104)$$

Из разложения (1.78) следует, что

$$\operatorname{div}_v \vec{J}_{1,2}^2 = -\Delta_v \Pi^{1,2}, \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_\infty} \vec{J}_{1,2}^2 \cdot d\vec{\sigma}_v &= - \int_{\Sigma_\infty} \nabla_v \Pi^{1,2} \cdot d\vec{\sigma}_v = - \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \left. \frac{\partial \Pi^{1,2}}{\partial v_x} \right|_{v_x=-\infty}^{v_x=+\infty} - \\ &- \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \left. \frac{\partial \Pi^{1,2}}{\partial v_y} \right|_{v_y=-\infty}^{v_y=+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} dv_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv_y \left. \frac{\partial \Pi^{1,2}}{\partial v_z} \right|_{v_z=-\infty}^{v_z=+\infty} = 0, \end{aligned} \quad (1.106)$$

где учтена асимптотика (1.104). Аналогичный результат получается при использовании функции распределения $f^{1,2}$, удовлетворяющей условию Власова. Например, для первого члена ряда (1.77) при условии почленного интегрирования получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Delta_v \Pi^{1,2} d^3v &= \frac{1}{m} U \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v) f^{1,2} d^3v + \dots = \\ &= \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial v_x} f^{1,2} d^3v + \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial y} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial v_y} f^{1,2} d^3v + \\ &+ \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial z} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\partial}{\partial v_z} f^{1,2} d^3v + \dots = 0. \end{aligned}$$

Выражение (1.106) доказывает теорему 5.

Заметим, что при получении цепочки уравнений Власова предполагается выполненным условие быстрого спада на ноль функции распределения $f^{1,2}$ на бесконечно удаленной поверхности Σ_∞ , гарантирующее выполнение равенства (1.103). В рассматриваемом случае (1.77) в правой части вместо $f^{1,2}$ изначально стоит функция Вигнера, которая не обязана удовлетворять условию Власова. Поэтому выполнение теоремы 5 гарантирует быстрый спад функции Вигнера на бесконечности.

1.5. Мнозначность и «квантовая» неопределенность. Представление (1.102) позволяет построить потенциальную компоненту $\vec{J}_\mu^{2(p)}$ плотности тока $\vec{J}_{1,2}^2$. Вихревая компонента $\vec{\Upsilon}_{1,2}$ (1.78) остается неизвестной, так как уравнение (1.77) содержит информацию только о скалярных источниках поля. С математической точки зрения есть две проблемы. Первая заключается в отсутствии информации о вихревой компоненте $\vec{\Upsilon}_{1,2}$ поля (1.78). Соотношение (1.77) содержит информацию только о скалярных источниках поля $\vec{J}_{1,2}^2$. Если допустить, что существует способ или уравнение, из которого можно найти вихревое поле $\vec{\Upsilon}_{1,2}$,

то возникает вторая проблема, связанная с неоднозначностью решения задачи Гельмгольца (1.78). Например, к потенциалу $\Pi^{1,2}$ можно добавить произвольную гармоническую функцию $u^{1,2}$:

$$\Pi^{1,2} \mapsto \Pi^{1,2} + u^{1,2}, \text{ где } \Delta_v u^{1,2} = 0. \quad (1.107)$$

Добавление поля $\nabla_v u^{1,2}$ в разложение (1.78) не изменит выражения для $\operatorname{div}_v \tilde{J}_{1,2}^2$ и $\operatorname{curl}_v \tilde{J}_{1,2}^2$. Постановка задачи о восстановлении поля $\tilde{J}_{1,2}^2$ по div и curl имеет три варианта:

- 1) внутренняя задача (в ограниченной области Ω_i с гладкой границей Γ_i и условием на ней);
- 2) внешняя задача (в неограниченной области с вырезом $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega_{\text{cut}}$ и граничным условием на Γ_e);
- 3) задача для всего пространства $\mathbb{R}^3$ (предполагается выполненным условие Власова на бесконечности).

Все три варианта при условии существования решения имеют единственное решение. В вариантах 1 и 2 единственность решения определяется граничными условиями на границах $\Gamma_{e,i}$, которые определяют выбор функции $u^{1,2}$. На границе $\Gamma_{e,i}$ может быть задано условие Дирихле, Неймана или условие смешанного типа.

Заметим, что потенциал $u^{1,2}$ является решением уравнения эллиптического типа (1.107). Таким образом, значения функции $u^{1,2}$ внутри области $\Omega_{e,i}$ определяются значениями в каждой точке на границе $\Gamma_{e,i}$. Если хотя бы в одной точке на границе $\Gamma_{e,i}$ изменить значение потенциала $u^{1,2}$ (или его нормальной производной), то поле $\nabla_v u^{1,2}$ внутри области $\Omega_{e,i}$ будет другим. *Такая математическая связь схожа со свойством нелокальности физической системы.*

Согласно принципу максимума для гармонических функций потенциал $u^{1,2}$ принимает свое максимальное и минимальное значение на границе $\Gamma_{e,i}$. Если гипотетически можно локализовать физическую систему в достаточно большой области, на границе которой значения потенциала $u^{1,2}$ стремятся к нулю (условие Власова), то согласно теореме Лиувилля функция $u^{1,2}$ будет стремиться к постоянной величине. С формальной точки зрения неопределенность, вызванная полем $\nabla_v u^{1,2}$, исчезнет. Описанная ситуация соответствует третьему варианту постановки задачи Гельмгольца для всего пространства.

Замечание 2. Таким образом, при переходе от квантового описания к классическому возникает неопределенность в построении поля $\tilde{J}_{1,2}^2$, вызванная отсутствием информации о вихревой компоненте $\tilde{\mathbf{T}}_{1,2}$ и граничных условий для первого и второго вариантов постановки (которые связаны с нелокальностью системы). Несмотря на возможные разные виды аппроксимаций средней кинематической $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$, решение уравнения Власова–Моэля останется неизменным, так как оно зависит только от скалярных источников поля (1.77), которые однозначно определены.

Помимо метода Гельмгольца, изложенного в п. 1.4, можно рассмотреть построение поля $J_\mu^{2(p)}$ по выражению (1.77) из «физических» соображений. Сначала получим упрощенный вариант для представления поля $\tilde{J}_{1,2}^2$. Выражение (1.102) требует знания потенциала $\vartheta^{1,2}$, который ищется путем интегрирования по всему пространству скоростей (1.81). Рассмотрим аппроксимацию $\tilde{J}_{1,2}^2$ следующего вида.

Определение 1. Аппроксимацию среднего поля ускорений $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$ вида

$$f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \left(\overleftarrow{\nabla}_r \cdot \overrightarrow{\nabla}_v \right)^{2l} f^{1,2} \quad (1.108)$$

будем называть аппроксимацией Власова–Моэля для произвольного аналитического потенциала $U(\vec{r}, t)$.

Теорема 6. Если ряд (1.108) допускает почленное интегрирование и дифференцирование, то подстановка аппроксимации (1.108) во второе уравнение Власова (1.72) дает уравнение Моэля (1.68) для функции Вигнера $f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = m^3 W(\vec{r}, \vec{p}, t)$, при этом

$$\langle \dot{v}_\mu \rangle_1 = \frac{1}{f_1} \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} d^3 v = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_\mu}. \quad (1.109)$$

Доказательство теоремы 6. Вычислим $\text{div}_v \left[f^{1,2} \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \right]$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} \right] &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \left(\overleftarrow{\nabla}_r \cdot \overrightarrow{\nabla}_v \right)^{2l} \frac{\partial f^{1,2}}{\partial v_\mu} = \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U \left(\overleftarrow{\nabla}_r \cdot \overrightarrow{\nabla}_v \right)^{2l+1} f^{1,2}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

С учетом (1.110) второе уравнение Власова примет вид

$$\partial_1 f^{1,2} + \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} \right] = 0, \quad (1.111)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \nabla_r W - \nabla_r U \cdot \nabla_p W = \\ = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} U \left(\overleftarrow{\nabla}_r \cdot \overrightarrow{\nabla}_p \right)^{2l+1} W = 0. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Проинтегрируем аппроксимацию (1.108) по пространству скоростей, получим

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} d^3v &= f^1 \langle \dot{v}_\mu \rangle_1 = \frac{-1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2} d^3v + \\
&+ \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \int_{\mathbb{R}^3} (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v)^{2l} f^{1,2} d^3v = \\
&= \frac{-1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} f^1 + \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{l+1} (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \times \\
&\times \sum_{k_1+k_2+k_3=2l} \frac{\overset{\leftarrow}{\partial}^{2l}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2} \partial z^{k_3}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{\partial}^{2l} f^{1,2}}{\partial v_x^{k_1} \partial v_y^{k_2} \partial v_z^{k_3}} d^3v = \frac{-1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} f^1, \quad (1.113)
\end{aligned}$$

где учтены соотношения (1.75) и условия Власова на бесконечности для функции распределения. Теорема 6 доказана.

Замечание 3. Аппроксимация (1.108) имеет ряд отличий от аппроксимации (1.102). Во-первых, с математической точки зрения выражение (1.108) проще, чем (1.102), так как не требует нахождения дополнительного потенциала $\vartheta^{1,2}$ (1.81). Во-вторых, (1.108) может содержать вихревые компоненты поля $\vec{J}_{1,2}^2$:

$$\text{curl}_v \vec{J}_{1,2}^2 = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{m^{2l+1} (2l+1)!} U (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v)^{2l} (\vec{\nabla}_r \times \vec{\nabla}_v) f^{1,2}. \quad (1.114)$$

В-третьих, с физической точки зрения первый член ряда аппроксимации (1.108) имеет наглядную интерпретацию в виде аналога второго закона Ньютона:

$$\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} + \frac{1}{f^{1,2}} \frac{\hbar^2}{4!m^3} \frac{\partial^3 U}{\partial x_\mu \partial x_\lambda \partial x_\nu} \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_\lambda \partial v_\nu} - \dots \quad (1.115)$$

В классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) при ограниченности производных от функций U и $f^{1,2}$ аппроксимация (1.115) переходит в аналог второго закона Ньютона $m \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2} = -\nabla_r U$. Схожий результат получается согласно теореме 6 при усреднении (1.108) по пространству скоростей (1.109). Средний поток ускорений $\langle \dot{v}_\mu \rangle_1$ соответствует внешней силе в уравнении движения (1.73).

Переход от выражения (1.77) к аппроксимации (1.108) в силу разложения Гельмгольца (1.78) не является единственным. Рассмотрим аналогии аппроксимации (1.108). Запишем выражение (1.77), группируя слагаемые при одинаковых степенях $\hbar$, например, для первых двух степеней $\hbar^0$ и $\hbar^2$ получим:

при $\hbar^0$

$$U (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v) f^{1,2} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial f^{1,2}}{\partial v_x} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial f^{1,2}}{\partial v_y} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial f^{1,2}}{\partial v_z}, \quad (1.116)$$

при $\hbar^2$

$$\begin{aligned}
 U(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v)^3 f^{1,2} = & \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x^3} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_y^3} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_z^3} \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} + \\
 & + 3 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x \partial v_y^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} + 3 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x \partial v_z^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} + 2 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x \partial v_y \partial v_z} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} + \\
 & + 3 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x^2 \partial v_y} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_y \partial v_z^2} \frac{\partial^3 U}{\partial y \partial z^2} + 2 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x \partial v_y \partial v_z} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} + \\
 & + 3 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x^2 \partial v_z} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial z} + 3 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_y^2 \partial v_z} \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial z} + 2 \frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_x \partial v_y \partial v_z} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z}. \quad (1.117)
 \end{aligned}$$

Согласно выражению (1.77) каждое из слагаемых (1.116), (1.117) соответствует фрагменту выражения $\frac{\partial}{\partial v_\mu} [f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}]$. Потенциал U не зависит от скорости $\vec{v}$, поэтому для выражения (1.116) естественным видится соответствие

$$\frac{\partial}{\partial v_\mu} [f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}] \mapsto \frac{\partial U}{\partial x_\mu} \frac{\partial f^{1,2}}{\partial v_\mu} \Rightarrow \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} \mapsto \frac{\partial U}{\partial x_\mu}. \quad (1.118)$$

Соответствие (1.118) присутствует в аппроксимации (1.108)–(1.115) и с физической точки зрения является естественным (см. замечание 2). Для слагаемых (1.117) существует несколько вариантов построения соответствий. Действительно, для первых трех слагаемых в выражении (1.117) логичным видится соответствие вида

$$f^{1,2} \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} \mapsto \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_y^2} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_z^2} \frac{\partial^3 U}{\partial z^3}. \quad (1.119)$$

Для оставшихся слагаемых $\frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_\lambda^2 \partial v_\mu}$, $\frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_\lambda \partial v_\mu^2}$ и $\frac{\partial^3 f^{1,2}}{\partial v_\mu \partial v_\lambda \partial v_\nu}$ в выражении (1.117) возникают варианты выноса производной по скорости $\partial/\partial v_\mu$. Числовые коэффициенты при производных дают дополнительную степень свободы в составлении соответствий. Каждая последующая группа слагаемых с множителем $\hbar^{2l}$ будет содержать все большее и большее количество вариантов соответствий производных. Таким образом, существует бесконечное множество вариантов построения аппроксимации для поля $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$. Заметим, что для полиномиального потенциала (1.70) смешанные производные $\frac{\partial^n U}{\partial x_\mu \partial x_\lambda \dots}$ отсутствуют, что приводит к определенности при выборе соответствий (1.118), (1.119).

С физической точки зрения только первое слагаемое (1.118) имеет определенность в виде аналога второго закона Ньютона, задающего классическую траекторию, связанную с уравнением движения (1.73). Последующие слагаемые в ряде (1.77) с множителями $\hbar^{2l}$ вносят неодно-

значность/неопределенность в виде выражения для $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$. Формально представление для поля $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$ можно записать как второй закон Ньютона:

$$m \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} = F_\mu^{1,2} = -\frac{\partial U}{\partial x_\mu} + O_\mu(\hbar^2), \quad (1.120)$$

где слагаемое $O_\mu(\hbar^2)$ может иметь различный вид в зависимости от комбинаций слагаемых типа (1.117) и т. д. Все такие комбинации имеют порядок по постоянной Планка $\hbar^{2l}$, $l > 0$. Если уравнение (1.120) интерпретировать как уравнение движения, то слагаемое $O_\mu(\hbar^2)$ можно рассматривать как неопределенную силу, действующую на частицу и отклоняющую ее от классической траектории, удовлетворяющей уравнению $m \langle \ddot{v} \rangle_{1,2} = -\nabla_r U$. Сила $O_\mu(\hbar^2)$ вносит «неопределенность» в координаты и скорости траектории на масштабах $\hbar^{2l}$, $l > 0$.

Создается впечатление, что в классическом приближении при $\hbar \rightarrow 0$ неопределенность $O_\mu(\hbar^2)$ в уравнении (1.120) исчезает, но это не всегда так. Рассмотрим подробнее выражение $O_\mu(\hbar^2)$, состоящее из слагаемых вида

$$O_\mu(\hbar^2) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{4^l (2l+1)!} \frac{\hbar^{2l}}{W} \frac{\partial^{2l} W}{\partial p_\lambda \dots} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x_\nu \dots}, \quad (1.121)$$

которое записано относительно функции Вигнера. Производная от функции Вигнера (1.69) порядка $2l$ по импульсным переменным имеет вид

$$\underbrace{\frac{\partial^{2l} W}{\partial p_\lambda \dots}}_{2l} = \frac{(-1)^l}{\hbar^{2l}} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \langle \dots \rangle e^{-i \frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} \underbrace{s_\lambda \dots}_{2l} d^3 s, \quad (1.122)$$

где компоненты s_λ , $\lambda = 1, \dots, 3$, вектора $\vec{s}$ соответствуют координатам x_s, y_s, z_s . Подставляя (1.122) в представление (1.121) и выделяя нулевой порядок малости по $\hbar$, получим

$$O_\mu(\hbar^2) = \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{(-1)^l}{4^l (2l+1)!} \frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x_\nu \dots} \kappa + \dots, \quad (1.123)$$

где κ — некоторая функция координат и импульса с размерностью m^{2l} (см. (1.69), (1.122)). Для некоторого вида функции Вигнера (см. п. 1.6) может получиться так, что функция κ не будет зависеть от постоянной Планка $\hbar$. Таким образом, выражение (1.123) для «поправочной» силы O_μ не будет содержать в явном виде коэффициенты $\hbar^{2l}$ и классический предельный переход при $\hbar \rightarrow 0$ в общем случае не приведет к исчезновению слагаемого O_μ . В зависимости от вида потенциала U члены ряда (1.123) внесут сравнимый с $-\frac{\partial U}{\partial x_\mu}$ вклад в правую часть уравнения (1.120). Например, слагаемые $U \sim r^{\pm n}$ ($n \in \mathbb{N}$, так как U — аналитическая функция) при подстановке в ряд (1.123) присутствуют

в виде слагаемых $\frac{\partial^{2l+1}U}{\partial x_\nu \dots}$, т. е.: $r^{n-3}, r^{n-5}, \dots, 1$ или $r^{-n-3}, r^{-n-5}, \dots$. На микромасштабах $r < 1$ основной вклад в O_μ дают слагаемые $1, r$ или $r^{-n-3}, r^{-n-5}, \dots$. Такие слагаемые сравнимы с классической силой $-\frac{\partial U}{\partial x_\mu}$ и приведут к существенному изменению траектории на микромасштабе. На макромасштабах $r \gg 1$ основной вклад в выражение O_μ вносят слагаемые r^{n-3} , которые по сравнению с классической силой $-\frac{\partial U}{\partial x_\mu} \sim r^{n-1}$ малы. Следовательно, на макромасштабах траектории, определяемые уравнением (1.120), приближены к классическим.

1.6. Точное решение уравнения Шрёдингера. В качестве примера рассмотрим квантовую систему, описываемую функцией плотности вероятностей [70, 71]:

$$f^1(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \exp \left[-\frac{r^2 \sin^2 \theta + z^2}{2\sigma_r^2} \right], \quad (1.124)$$

$$\langle \vec{v} \rangle_1(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2m} \nabla_r \Phi = \frac{\hbar}{m} \nabla_r \varphi = \frac{\hbar}{m} \nabla_r \phi = \frac{\hbar}{m\rho} \vec{e}_\phi = \frac{\hbar}{mr \sin \theta} \vec{e}_\phi, \quad (1.125)$$

где $\rho = r \sin \theta$, координаты (ρ, ϕ, z) соответствуют цилиндрической системе координат, а (r, θ, ϕ) — сферической системе координат. Функции (1.124), (1.125) являются решениями первого уравнения Власова (1.76). Функция (1.124) удовлетворяет условию нормировки $\int f^1 d^3r = 1$. Первому уравнению Власова (1.76) соответствует уравнение Шрёдингера (1.126) с уравнением Гамильтона–Якоби (1.127) [56, 57]:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q\vec{A})^2 \Psi + U\Psi, \quad f^1 = |\Psi|^2, \quad \arg \Psi = \varphi, \quad (1.126)$$

$$\langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{\hbar}{2m} \nabla_r \Phi - \frac{q}{m} \vec{A}, \quad \Phi(\vec{r}, t) \stackrel{\text{def}}{=} i \text{Ln} \left(\frac{\Psi}{\Psi^*} \right) = 2\varphi(\vec{r}, t) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$-\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{m}{2} |\langle \vec{v} \rangle_1|^2 + V \stackrel{\text{def}}{=} H, \quad V = U + Q, \quad Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_r |\Psi|}{|\Psi|},$$

$$\hat{\pi}_1 \langle \vec{v} \rangle_1 = (\partial_t + \langle \vec{v} \rangle_1 \cdot \nabla_r) \langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{q}{m} (\vec{E} + \langle \vec{v} \rangle_1 \times \vec{B}) = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (1.127)$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{q} \nabla_r V, \quad \vec{B} = \text{curl}_r \vec{A},$$

где Q — квантовый потенциал из теории «волны-пилота» де Бройля–Бома [72, 73]; $\hat{p} = -i\hbar \nabla_r$ — оператор импульса; $\vec{A}$ — векторный потенциал. Уравнение движения $\hat{\pi}_1 \langle \vec{v} \rangle_1 = \vec{F}/m$ заряженной частицы в электромагнитных полях $\vec{E}$, $\vec{B}$ непосредственно следует из уравнения Гамильтона–Якоби (1.27).

Теорема 7. Волновая функция

$$\Psi(\rho, \phi, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 + z^2}{4\sigma_r^2} + i\phi - i\frac{E}{\hbar}t\right), \quad E = \frac{3\hbar^2}{4m\sigma_r^2}, \quad (1.128)$$

является решением уравнения Шрёдингера (1.126) с потенциалом

$$U(\rho, \phi, z) = \frac{\hbar^2}{8m\sigma_r^4} \left(\rho^2 + z^2 - 4\frac{\sigma_r^4}{\rho^2}\right), \quad (1.129)$$

при этом квантовый потенциал (1.127) имеет вид

$$Q = \frac{\hbar^2}{4m\sigma_r^2} \left(3 - \frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}\right). \quad (1.130)$$

Доказательство теоремы 7. Вид решения (1.128) непосредственно следует из выражений (1.124) и (1.125) на основе подхода, изложенного в работе [71]. Выражение для потенциала U можно получить двумя способами. Первый способ — непосредственно из уравнения Шрёдингера при подстановке в него волновой функции (1.128). Второй способ — из уравнения Гамильтона–Якоби (1.127). Не ограничивая общности, воспользуемся первым способом:

$$\Psi_t = -i\frac{E}{\hbar}\Psi, \quad \Delta_r\Psi = \left(-\frac{3}{2\sigma_r^2} + \frac{\rho^2}{4\sigma_r^4} - \frac{1}{\rho^2} + \frac{z^2}{4\sigma_r^4}\right)\Psi. \quad (1.131)$$

Подставляя выражения (1.131) в уравнение Шрёдингера, получим

$$U = E - \frac{3\hbar^2}{4m\sigma_r^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\rho^2}{4\sigma_r^4} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\rho^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{z^2}{4\sigma_r^4}. \quad (1.132)$$

С учетом значения энергии E (1.128) выражение (1.132) переходит в (1.129). Для нахождения квантового потенциала Q вычислим $\Delta_r|\Psi|$:

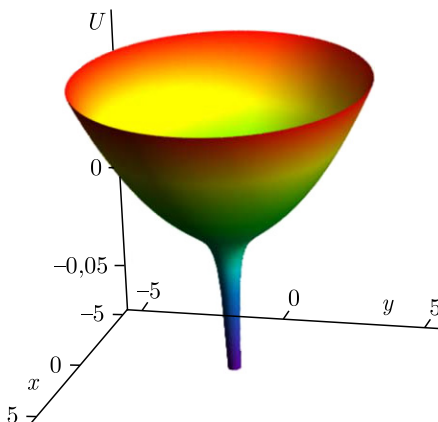
$$|\Psi| = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 + z^2}{4\sigma_r^2}\right), \quad \Delta_r|\Psi| = \left(\frac{\rho^2 + z^2}{4\sigma_r^4} - \frac{3}{2\sigma_r^2}\right)|\Psi|. \quad (1.133)$$

Из выражения (1.133) следует справедливость представления (1.130). Заметим, что выражения (1.125), (1.129) и (1.130) удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби (1.127):

$$E = \frac{m}{2} \frac{\hbar^2}{m^2 \rho^2} + \frac{\hbar^2}{4m\sigma_r^2} \left(3 - \frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}\right) + \frac{\hbar^2}{8m\sigma_r^4} \left(\rho^2 + z^2 - 4\frac{\sigma_r^4}{\rho^2}\right). \quad (1.134)$$

Теорема 7 полностью доказана.

Замечание 4. На рис. 7 приведен график потенциала U (1.129) при $z = 0$. Потенциал U имеет форму «квадратичной воронки». В окрестности оси OZ имеется полюс второго порядка $U \sim 1/\rho^2$, а на бесконечности — квадратичная зависимость $U \sim r^2$, соответствующая гармоническому ос-

Рис. 7. График потенциала $U(\rho, \phi, 0)$

циллатору. Полюс потенциала U на оси OZ возникает из-за вихревого поля $\langle \vec{v} \rangle_1$ (1.125). Скалярный потенциал Φ не является гладкой функцией, поэтому $\text{curl}_r \langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{\hbar}{2m} \text{curl}_r \nabla_r \Phi \neq 0$. Свойства расширенной формы вихревого поля (1.125) подробно рассмотрены в работе [71].

Наличие полюса у потенциала U приводит к ненулевым производным $\frac{\partial^{2l+1} U}{\partial x_\lambda \dots \partial x_\mu}$, $l > 0$, в аппроксимации среднего потока ускорений $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$ (1.114), (1.116). Следовательно, добавочная сила $O_\mu(\hbar^2)$ в уравнении движения (1.119) будет отлична от нуля.

Замечание 5. Решение уравнения Шрёдингера (1.128) соответствует основному состоянию квантовой системы $s = 0$. Решением f^1 первого уравнения Власова (1.76) с векторным полем (1.125) является любая функция: $f^1(\vec{r}, t) = F(r)$. Действительно,

$$\text{div}_r [f^1 \langle \vec{v} \rangle_1] = F \text{div}_r \langle \vec{v} \rangle_1 + \langle \vec{v} \rangle_1 \cdot \nabla_r F = \langle \vec{v} \rangle_1 \cdot \nabla_r F = \frac{\hbar}{m\rho} \frac{\partial F}{\partial r} \vec{e}_\phi \cdot \vec{e}_r = 0,$$

где $\nabla_r r = \vec{e}_r$. Например, $f_s^1(r) = c_s e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} H_s^2(\eta r)$, где c_s, η — постоянные величины, а H_s — полиномы Эрмита. Функции плотности вероятностей $f_s^1(r)$ будут соответствовать квантовым состояниям с номерами s .

Построение аппроксимации $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$ требует знания функции Вигнера для рассматриваемой квантовой системы. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. Функция Вигнера W и ее производные $\frac{\partial^2 W}{\partial p_\lambda \partial p_\mu}$, соответствующие волновой функции Ψ (1.128), могут быть представлены в виде

$$G(\rho, z, \vec{p}) = \frac{\rho^2}{2\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{\Lambda(\rho, \bar{\rho}_s, \phi, \bar{\phi}_s, \vec{p})}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2 \frac{\bar{\rho}_s^2}{2\sigma_r^2}} \bar{\rho}_s d\bar{\rho}_s, \quad (1.135)$$

где

$$\Lambda(\rho, \bar{\rho}_s, \phi, \bar{\phi}_s, \vec{p}) = \\ = \xi(\rho, \bar{\rho}_s, \phi + \bar{\phi}_s) (1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s) e^{-i(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s) \varsigma(\rho, \bar{\rho}_s)}, \quad (1.136)$$

$$\xi(\rho, \bar{\rho}_s, \phi) = \begin{cases} 1 & \text{при } G = W, \\ -\varsigma^2 \cos^2 \phi & \text{при } G = \frac{\partial^2 W}{\partial p_x^2}, \\ -\varsigma^2 \sin^2 \phi & \text{при } G = \frac{\partial^2 W}{\partial p_y^2}, \\ -\frac{1}{2} \varsigma^2 \sin 2\phi & \text{при } G = \frac{\partial^2 W}{\partial p_x \partial p_y}, \end{cases} \quad \varsigma(\rho, \bar{\rho}_s) = 2 \frac{\rho \bar{\rho}_s}{\hbar}, \quad (1.137)$$

$$k_1(\bar{\rho}_s) = \frac{2\bar{\rho}_s}{1 - \bar{\rho}_s^2}, \quad k_2(\bar{\rho}_s) = \frac{2\bar{\rho}_s}{1 + \bar{\rho}_s^2}, \quad k_1^2 = \frac{k_2^2}{1 - k_2^2}, \quad k_2^2 = \frac{k_1^2}{1 + k_1^2}. \quad (1.138)$$

Доказательство теоремы 8. Получим выражение для функции Вигнера. Преобразуем подынтегральное выражение (1.69), получим

$$\Psi^*(\vec{r}_-, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\sigma_r^2} |\vec{r}_-|^2 - i\phi_- + i\frac{E}{\hbar} t\right), \\ \Psi(\vec{r}_+, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4\sigma_r^2} |\vec{r}_+|^2 + i\phi_+ - i\frac{E}{\hbar} t\right), \quad (1.139) \\ \Psi^*(\vec{r}_-, t) \Psi(\vec{r}_+, t) = \frac{e^{i(\phi_+ - \phi_-)}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} e^{-\frac{1}{4\sigma_r^2} (|\vec{r}_-|^2 + |\vec{r}_+|^2)} = \\ = \frac{e^{i(\phi_+ - \phi_-)}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} e^{-\frac{1}{2\sigma_r^2} (r^2 + \frac{z^2}{4})}.$$

Азимутальные углы $\phi_\pm$ в выражении (1.139) удовлетворяют соотношениям

$$\sin \phi_\pm = \frac{2y \pm y_s}{\sqrt{(2x \pm x_s)^2 + (2y \pm y_s)^2}} = \frac{\sin \phi \pm \bar{\rho}_s \sin \phi_s}{\sqrt{1 + \bar{\rho}_s^2 \pm 2\bar{\rho}_s \cos(\phi - \phi_s)}}, \\ \cos \phi_\pm = \frac{2x \pm x_s}{\sqrt{(2x \pm x_s)^2 + (2y \pm y_s)^2}} = \frac{\cos \phi \pm \bar{\rho}_s \cos \phi_s}{\sqrt{1 + \bar{\rho}_s^2 \pm 2\bar{\rho}_s \cos(\phi - \phi_s)}}, \quad (1.140)$$

где $\bar{\rho}_s = \rho_s/(2\rho)$ и учтено, что

$$\begin{aligned}
 (2x \pm x_s)^2 + (2y \pm y_s)^2 &= (2\rho \cos \phi \pm \rho_s \cos \phi_s)^2 + (2\rho \sin \phi \pm \rho_s \sin \phi_s)^2 = \\
 &= 4\rho^2 (\cos \phi \pm \bar{\rho}_s \cos \phi_s)^2 + 4\rho^2 (\sin \phi \pm \bar{\rho}_s \sin \phi_s)^2 = \\
 &= 4\rho^2 [1 + \bar{\rho}_s^2 \pm 2\bar{\rho}_s (\cos \phi \cos \phi_s + \sin \phi \sin \phi_s)] = \\
 &= 4\rho^2 [1 + \bar{\rho}_s^2 \pm 2\bar{\rho}_s \cos(\phi - \phi_s)].
 \end{aligned} \tag{1.141}$$

Используя представления (1.140), преобразуем выражение $e^{i(\phi_+ - \phi_-)}$:

$$e^{i(\phi_+ - \phi_-)} = \cos(\phi_+ - \phi_-) + i \sin(\phi_+ - \phi_-), \tag{1.142}$$

$$\begin{aligned}
 \cos(\phi_+ - \phi_-) &= \cos \phi_+ \cos \phi_- + \sin \phi_+ \sin \phi_- = \\
 &= \frac{\cos^2 \phi - \bar{\rho}_s^2 \cos^2 \phi_s}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}} + \frac{\sin^2 \phi - \bar{\rho}_s^2 \sin^2 \phi_s}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}}, \\
 \cos(\phi_+ - \phi_-) &= \frac{1 - \bar{\rho}_s^2}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}},
 \end{aligned} \tag{1.143}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(\phi_+ - \phi_-) &= \sin \phi_+ \cos \phi_- - \cos \phi_+ \sin \phi_- = \\
 &= \frac{(\sin \phi + \bar{\rho}_s \sin \phi_s)(\cos \phi - \bar{\rho}_s \cos \phi_s) - (\cos \phi + \bar{\rho}_s \cos \phi_s)(\sin \phi - \bar{\rho}_s \sin \phi_s)}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}} = \\
 &= \frac{\sin \phi \cos \phi + \bar{\rho}_s \sin \phi_s \cos \phi - \bar{\rho}_s \sin \phi \cos \phi_s - \bar{\rho}_s^2 \sin \phi_s \cos \phi_s}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}} - \\
 &- \frac{\cos \phi \sin \phi - \bar{\rho}_s \cos \phi \sin \phi_s + \bar{\rho}_s \cos \phi_s \sin \phi - \bar{\rho}_s^2 \cos \phi_s \sin \phi_s}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}} = \\
 &= 2\bar{\rho}_s \frac{\sin \phi_s \cos \phi - \cos \phi_s \sin \phi}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}}, \\
 \sin(\phi_+ - \phi_-) &= \frac{2\bar{\rho}_s \sin(\phi_s - \phi)}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}}.
 \end{aligned} \tag{1.144}$$

Подставим выражения (1.143) и (1.144) в представление (1.142), получим

$$\begin{aligned}
 e^{i(\phi_+ - \phi_-)} &= \frac{1 - \bar{\rho}_s^2 + i2\bar{\rho}_s \sin(\phi_s - \phi)}{\sqrt{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}} = \\
 &= \frac{k_2}{k_1} \frac{1 + ik_1 \sin(\phi_s - \phi)}{\sqrt{1 - k_2^2 \cos^2(\phi - \phi_s)}},
 \end{aligned} \tag{1.145}$$

где $k_1 = \frac{2\bar{\rho}_s}{1 - \bar{\rho}_s^2}$, $k_2 = \frac{2\bar{\rho}_s}{1 + \bar{\rho}_s^2}$. Используя цилиндрическую систему координат, преобразуем подынтегральное выражение $e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{s}\cdot\vec{p}}$ в функции Вигнера:

$$\vec{p} \cdot \vec{s} = p_x x_s + p_y y_s + p_z z_s = p_x \rho_s \cos \phi_s + p_y \rho_s \sin \phi_s + p_z z_s, \quad (1.146)$$

$$p_x = p_\rho \cos \phi - p_\phi \sin \phi, \quad p_y = p_\rho \sin \phi + p_\phi \cos \phi. \quad (1.147)$$

Подставим (1.147) в (1.146), получим

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{s} &= \rho_s (p_\rho \cos \phi - p_\phi \sin \phi) \cos \phi_s + \rho_s (p_\rho \sin \phi + p_\phi \cos \phi) \sin \phi_s + p_z z_s = \\ &= \rho_s p_\rho (\cos \phi \cos \phi_s + \sin \phi \sin \phi_s) + \rho_s p_\phi (\sin \phi_s \cos \phi - \cos \phi_s \sin \phi) + p_z z_s, \\ \vec{p} \cdot \vec{s} &= \rho_s p_\rho \cos(\phi - \phi_s) + \rho_s p_\phi \sin(\phi_s - \phi) + p_z z_s. \end{aligned} \quad (1.148)$$

С учетом выражений (1.139), (1.145) и (1.148) функция Вигнера примет вид

$$\begin{aligned} W(\vec{r}, \vec{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} I(\rho, \vec{p}), \\ I(\rho, \vec{p}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{k_2}{k_1} \frac{1 + ik_1 \sin(\phi_s - \phi)}{\sqrt{1 - k_2^2 \cos^2(\phi_s - \phi)}} \times \\ &\times e^{-\frac{z_s^2}{8\sigma_r^2}} e^{-\frac{i}{\hbar}(\rho_s p_\rho \cos(\phi_s - \phi) + \rho_s p_\phi \sin(\phi_s - \phi) + p_z z_s)} d^3 s. \end{aligned} \quad (1.149)$$

Заметим, что интеграл $I(\rho, \vec{p})$ не зависит от ϕ , так как интегрирование производится по полному периоду тригонометрических функций. Вычислим интеграл $I(\rho, \vec{p})$ из выражения (1.149):

$$\begin{aligned} I(\rho, \vec{p}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z_s^2}{8\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} p_z z_s} dz_s \int_0^{2\pi} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 - k_2^2 \cos^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s \times \\ &\times \int_0^{+\infty} \frac{k_2}{k_1} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \rho_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} \rho_s d\rho_s. \end{aligned} \quad (1.150)$$

Интеграл вдоль оси OZ можно найти в явном виде:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z_s^2}{8\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} p_z z_s} dz_s &= e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{z_s}{2\sqrt{2}\sigma_r} + \frac{i}{\hbar} \sqrt{2}\sigma_r p_z\right)^2} dz_s = \\ &= 2\sqrt{2\pi}\sigma_r e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2}. \end{aligned} \quad (1.151)$$

Преобразуем подынтегральное выражение во втором интеграле

$$\begin{aligned} \frac{k_2}{k_1} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 - k_2^2 \cos^2 \bar{\phi}_s}} &= \frac{k_2}{k_1} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 - k_2^2 + k_2^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} = \\ &= \frac{k_2}{k_1 \sqrt{1 - k_2^2}} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} = \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}}, \end{aligned} \quad (1.152)$$

где учтено, что

$$\frac{k_2^2}{1 - k_2^2} = \frac{4\bar{\rho}_s^2}{(1 + \bar{\rho}_s^2)^2 - 4\bar{\rho}_s^2} = \frac{4\bar{\rho}_s^2}{1 - 2\bar{\rho}_s^2 + \bar{\rho}_s^4} = \frac{4\bar{\rho}_s^2}{(1 - \bar{\rho}_s^2)^2} = k_1^2. \quad (1.153)$$

Подставляя выражения (1.152) и (1.151) в интеграл (1.150), получим

$$\begin{aligned} I(\rho, \vec{p}) = & 8\sqrt{2\pi} \sigma_r \rho^2 e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s \times \\ & \times \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2 \bar{\rho}_s^2}{2\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} 2\rho \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} \bar{\rho}_s d\bar{\rho}_s, \end{aligned} \quad (1.154)$$

где сделана замена $2\rho \bar{\rho}_s = \rho_s$, так как $k_1 = k_1(\bar{\rho}_s)$. Подстановка интеграла (1.154) в выражение для функции Вигнера (1.154) дает выражение (1.135):

$$\begin{aligned} W(\vec{r}, \vec{p}) = & \frac{\rho^2}{2\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s \times \\ & \times \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2 \bar{\rho}_s^2}{2\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} 2\rho \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} \bar{\rho}_s d\bar{\rho}_s. \end{aligned} \quad (1.155)$$

Из выражений (1.147) следует, что

$$p_\rho = p_x \cos \phi + p_y \sin \phi, \quad p_\phi = -p_x \sin \phi + p_y \cos \phi, \quad (1.156)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_x} e^{-i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} = \\ = -i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s (\cos \phi \cos \bar{\phi}_s - \sin \phi \sin \bar{\phi}_s) e^{-i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} = \\ = -i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s \cos(\phi + \bar{\phi}_s) e^{-i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} = \\ = -\frac{i}{\hbar} 2\rho \bar{\rho}_s \cos \phi_s e^{-i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)}, \end{aligned} \quad (1.157)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} e^{-i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} = \\ = -\frac{4\rho^2}{\hbar^2} \bar{\rho}_s^2 \cos^2 \phi_s e^{-i\frac{2\rho}{\hbar} \bar{\rho}_s (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)}, \end{aligned} \quad (1.158)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p_y} e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} &= \\
&= -i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(\sin \phi \cos \bar{\phi}_s + \cos \phi \sin \bar{\phi}_s) e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} = \\
&= -i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s \sin(\phi + \bar{\phi}_s) e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} = \\
&= -\frac{i}{\hbar}2\rho\bar{p}_s \sin \phi_s e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)}, \quad (1.159)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial p_y^2} e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} &= \\
&= -\frac{4\rho^2}{\hbar^2}\bar{p}_s^2 \sin^2 \phi_s e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)}, \quad (1.160)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial p_x \partial p_y} e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)} &= \\
&= -\frac{2\rho^2}{\hbar^2}\bar{p}_s^2 \sin 2\phi_s e^{-i\frac{2\rho}{\hbar}\bar{p}_s(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s)}. \quad (1.161)
\end{aligned}$$

Учитывая выражения (1.158), (1.160) и (1.161) при дифференцировании функции Вигнера $\frac{\partial^2 W}{\partial p_x^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial p_y^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial p_x \partial p_y}$, получим справедливость представлений (1.137). Теорема 8 доказана.

Замечание 6. Интеграл (1.135) не может быть взят в квадратурах, так как даже в частном случае $p_\rho = p_\phi = 0$ выражается через полный эллиптический интеграл первого рода $K(k)$. Действительно, функция Вигнера (1.135) при условии $p_\rho = p_\phi = 0$ принимает вид

$$W(\vec{r}, p_z) = \frac{\rho^2}{2\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \int_0^{2\pi} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2 \bar{p}_s^2}{2\sigma_r^2}} \bar{p}_s d\bar{p}_s. \quad (1.162)$$

Вычислим интеграл по углу $\bar{\phi}_s$, получим

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s = \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{d\bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} + ik_1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s = 4K(ik_1), \quad (1.163)
\end{aligned}$$

где учтено, что второй интеграл равен нулю. Действительно, согласно (1.152)

$$\frac{ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} = \frac{ik_2 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 - k_2^2 \cos^2 \bar{\phi}_s}}, \quad (1.164)$$

$$ik_1 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s = i \int_0^{2\pi} \frac{k_2 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 - k_2^2 \cos^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s = 0, \quad (1.165)$$

где $0 \leq k_2 < 1$ и подынтегральная функция не имеет полюсов. В результате функция Вигнера примет вид

$$W(\vec{r}, p_z) = \frac{2\rho^2}{\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \int_0^{+\infty} K(k_1) e^{-\frac{\rho^2 \bar{\rho}_s^2}{2\sigma_r^2}} \bar{\rho}_s d\bar{\rho}_s, \quad (1.166)$$

где $K(k)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра первого рода

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}.$$

Подынтегральное выражение (1.135) можно переписать в компактной форме, удобной для численных расчетов:

$$\frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} e^{-i(p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s) \varsigma(\rho, \bar{\rho}_s)} = e^{i\chi(\rho, p_\rho, p_\phi, \bar{\rho}_s, \bar{\phi}_s)}, \quad (1.167)$$

где

$$\chi(\rho, p_\rho, p_\phi, \bar{\rho}_s, \bar{\phi}_s) = \arctg(k_1 \sin \bar{\phi}_s) - (p_\rho \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \sin \bar{\phi}_s) \varsigma(\rho, \bar{\rho}_s).$$

Заметим, что усреднение импульса по функции Вигнера (1.135)–(1.137) приводит к исходному выражению для потока скорости (1.125). Действительно, найдем среднее значение импульса $\langle \vec{p} \rangle_1$ путем усреднения по функции Вигнера. Перепишем выражение для функции Вигнера в декартовой системе координат, получим

$$W(\rho, z, \vec{p}) = \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_\rho \rho_s \cos \bar{\phi}_s + p_\phi \rho_s \sin \bar{\phi}_s)}}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} d\bar{\phi}_s \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} \rho_s d\rho_s =$$

$$= \frac{e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s) e^{-\frac{i}{\hbar}(p_x x_s + p_y y_s)}}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s, \quad (1.168)$$

где $\bar{\phi}_s = \phi_s - \phi$. Найдем $\langle p_x \rangle_1$:

$$\begin{aligned} f^1 \langle p_x \rangle_1 &= \frac{e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} p_x e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s)}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y. \end{aligned} \quad (1.169)$$

Некоторые интегралы в выражении (1.169) могут быть взяты в явном виде:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z &= \sqrt{2\pi} \frac{\hbar}{2\sigma_r}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = 2\pi \delta\left(\frac{y_s}{\hbar}\right) = 2\pi \hbar \delta(y_s), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} p_x e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x &= \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_x e^{-i\bar{p}_x x_s} d\bar{p}_x = i\sqrt{2\pi} \sqrt{2\pi} \hbar^2 \delta'(x_s). \end{aligned} \quad (1.170)$$

Подставляя (1.170) в (1.169), получим

$$\begin{aligned} f^1 \langle p_x \rangle_1 &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^3 \hbar \sigma_r^3} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} p_x dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s) e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s}}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \delta(y_s) dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^3 \hbar \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} p_x e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - ik_1(x_s) \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s, \\ f^1 \langle p_x \rangle_1 &= i\hbar \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x_s) \frac{1 - ik_1(x_s) \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s, \end{aligned} \quad (1.171)$$

где $k_1(x_s) = \frac{4\rho|x_s|}{4\rho^2 - x_s^2}$. Преобразуем оставшийся интеграл:

$$\begin{aligned}
 i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x_s) \frac{1 - ik_1 \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s = \\
 = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta'(x_s)}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s + \sin \phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta'(x_s) k_1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s = \\
 = -i \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} \Big|_{x_s=0} - \sin \phi \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{k_1 e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} \Big|_{x_s=0} = -\frac{\sin \phi}{\rho},
 \end{aligned} \tag{1.172}$$

где учтено, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta'(x - a) dx = -F'(a) \tag{1.173}$$

и

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_s} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} \Big|_{x_s=0} = \\
 = -e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{x_s}{4\sigma_r^2 \sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} - e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{k_1 k_1' \sin^2 \phi}{(1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \Big|_{x_s=0} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_s} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{k_1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} \Big|_{x_s=0} = \\
 = e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{4\sigma_r^2 k_1' - x_s k_1}{4\sigma_r^2 \sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} - e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{k_1 k_1' \sin^2 \phi}{(1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \Big|_{x_s=0} = k_1' = \frac{1}{\rho}.
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (1.124) и (1.72) в (1.171), получим

$$\begin{aligned}
 f^1 \langle p_x \rangle_1 = \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \langle p_x \rangle_1 = -\hbar \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}} \sin \phi}{4\pi^2 \sigma_r^3 \rho}, \\
 \langle p_x \rangle_1 = m \langle v_x \rangle_1 = -2\pi \sqrt{2\pi} \hbar \frac{\sqrt{2\pi} \sin \phi}{4\pi^2 \rho} = -\hbar \frac{\sin \phi}{\rho}, \\
 \langle v_x \rangle_1 = -\frac{\hbar \sin \phi}{m \rho}.
 \end{aligned} \tag{1.174}$$

Аналогичные выкладки можно проделать для среднего поля $\langle p_y \rangle_1$:

$$\begin{aligned}
 f^1 \langle p_y \rangle_1 &= \frac{e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \times \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s)}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} p_y e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^3 \hbar \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s)}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta(x_s) dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} p_y e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y, \\
 f^1 \langle p_y \rangle_1 &= \frac{i\hbar\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta'(y_s) \frac{(1 + ik_1(y_s) \cos \phi)}{\sqrt{1 + k_1^2(y_s) \cos^2 \phi}} dy_s,
 \end{aligned} \tag{1.175}$$

где

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x = 2\pi \hbar \delta(x_s), \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} p_y e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = i2\pi \hbar^2 \delta'(y_s), \quad k_1(y_s) = \frac{4\rho |y_s|}{4\rho^2 - y_s^2}.
 \end{aligned}$$

Интеграл (1.175) вычисляется аналогично интегралу (1.171) по формулам (1.173):

$$\begin{aligned}
 i \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(y_s) e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{(1 + ik_1 \cos \phi)}{\sqrt{1 + k_1^2 \cos^2 \phi}} dy_s &= \\
 &= i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta'(y_s)}{\sqrt{1 + k_1^2 \cos^2 \phi}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} dy_s - \cos \phi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\delta'(y_s) k_1}{\sqrt{1 + k_1^2 \cos^2 \phi}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} dy_s = \\
 &= -i \frac{\partial}{\partial y_s} \left. \frac{e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2 \cos^2 \phi}} \right|_{y_s=0} + \cos \phi \frac{\partial}{\partial y_s} \left. \frac{k_1 e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2 \cos^2 \phi}} \right|_{y_s=0} = \frac{\cos \phi}{\rho},
 \end{aligned} \tag{1.176}$$

где учтено, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_s} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{1}{\sqrt{1+k_1^2 \cos^2 \phi}} \Big|_{y_s=0} &= \\ &= -e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{y_s}{4\sigma_r^2 \sqrt{1+k_1^2 \cos^2 \phi}} - e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{k_1 k_1' \cos^2 \phi}{(1+k_1^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \Big|_{y_s=0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_s} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{k_1}{\sqrt{1+k_1^2 \cos^2 \phi}} \Big|_{y_s=0} &= \\ &= e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{4\sigma_r^2 k_1' - y_s k_1}{4\sigma_r^2 \sqrt{1+k_1^2 \cos^2 \phi}} - e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{k_1 k_1' \cos^2 \phi}{(1+k_1^2 \cos^2 \phi)^{3/2}} \Big|_{y_s=0} = k_1' = \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

Подставляя выражения (1.124) и (1.176) в (1.175), получим

$$\frac{e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \langle p_y \rangle_1 = \hbar \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2+z^2}{2\sigma_r^2}} \cos \phi}{4\pi^2 \sigma_r^3} \frac{1}{\rho}, \quad \langle v_y \rangle_1 = \frac{\hbar \cos \phi}{m \rho}. \quad (1.177)$$

Так как функция Вигнера (1.68) является четной по переменной p_z , получим

$$\langle v_z \rangle_1 = 0. \quad (1.178)$$

Переходя в цилиндрическую систему координат (1.156) и учитывая выражения (1.174), (1.177) и (1.178), приходим к выражению (1.125):

$$\langle p_\rho \rangle_1 = \langle p_x \rangle_1 \cos \phi + \langle p_y \rangle_1 \sin \phi = -\hbar \frac{\sin \phi}{\rho} \cos \phi + \hbar \frac{\cos \phi}{\rho} \sin \phi = 0, \quad (1.179)$$

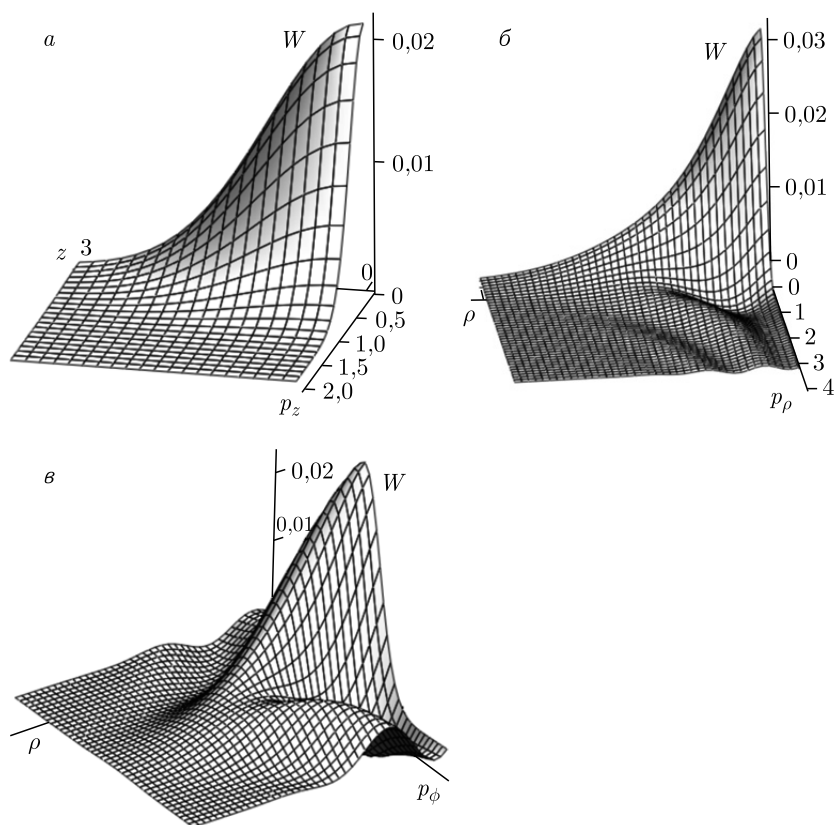
$$\langle p_\phi \rangle_1 = -\langle p_x \rangle_1 \sin \phi + \langle p_y \rangle_1 \cos \phi = \hbar \frac{\sin^2 \phi}{\rho} + \hbar \frac{\cos^2 \phi}{\rho} = \frac{\hbar}{\rho},$$

т. е.

$$\langle \vec{p} \rangle_1 = m \langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{1}{f^1(\rho, z)} \int_{\mathbb{R}^3} W(\rho, z, \vec{p}) \vec{p} d^3 p = \frac{\hbar}{\rho} \vec{e}_\phi. \quad (1.180)$$

Несмотря на то, что функция Вигнера (1.135)–(1.137) неизвестна в явном виде, интеграл (1.180) может быть вычислен непосредственно.

Функция Вигнера (1.135)–(1.137) имеет азимутальную (ϕ) симметрию и определена в 6D-фазовом пространстве. На рис. 8 показаны распределения W в основных фазовых плоскостях. На рис. 8, а приведено распределение в плоскости (z, p_z) при $p_\rho = p_\phi = 0$ и $\rho = \sigma_r/2$. Как следует из выражения (1.166), в плоскости (z, p_z) функция Вигнера должна иметь распределение Гаусса, которое показано на рис. 8, а. На рис. 8, б представлено распределение в плоскости (ρ, p_ρ) при $z = 0$, $p_\phi = p_z = 0$,

Рис. 8. Фазовые портреты функции Вигнера $W(\vec{r}, \vec{p})$

а на рис. 8, б — в плоскости (ρ, p_ϕ) при $z = 0$, $p_\rho = p_z = 0$. В соответствии с обобщением теоремы Хадсона для 3D-распределений волновых функций [74] квазиплотности вероятностей на рис. 8, б, в имеют области отрицательных значений.

Выражения (1.125), (1.29) и (1.130) удовлетворяют уравнению Гамильтона–Якоби (1.27):

$$E = \frac{m}{2} |\langle \vec{v} \rangle_1|^2 + U + Q = \text{const.} \quad (1.181)$$

Уравнение (1.181) задает семейство концентрических окружностей (уравнений движения) на гиперповерхности потенциала (1.129) (см. рис. 7). Дифференцированием уравнения (1.181) по координате получим уравнение движения (1.73), в котором $m \langle \ddot{\vec{v}} \rangle_1 = -\nabla_r U$.

Теорема 9. Пусть квантовая система описывается функцией Вигнера (1.135)–(1.137), тогда справедливо уравнение движения (1.73), в котором тензор давления (1.74) имеет вид

$$P_{\mu\lambda} = \frac{1}{m^2} \int_{\mathbb{R}^3} W(p_\mu - \langle p_\mu \rangle_1) (p_\lambda - \langle p_\lambda \rangle_1) d^3p = f^1(\vec{r}) \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma_r^2} \delta_{\mu\lambda}, \quad (1.182)$$

$$\langle \dot{v}_\mu \rangle_1 = \frac{1}{f^1} \int_{\mathbb{R}^3} W \langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2} d^3p = -\frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_\mu}, \quad \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle_1 = -\frac{\hbar^2}{m^2 \rho^3} \vec{e}_\rho, \quad (1.183)$$

при этом сила квантового давления связана с квантовым потенциалом как

$$-\frac{\partial Q}{\partial x_\mu} = \frac{m}{f^1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} = \frac{\hbar^2 x_\mu}{4m\sigma_r^4}. \quad (1.184)$$

Доказательство теоремы 9. Преобразуем выражение для тензора давления $P_{\mu\lambda}$, получим

$$\begin{aligned} m^2 P_{\mu\lambda} &= \int_{\mathbb{R}^3} W(p_\mu - \langle p_\mu \rangle_1) (p_\lambda - \langle p_\lambda \rangle_1) d^3p = \int_{\mathbb{R}^3} p_\mu p_\lambda W d^3p - \langle p_\lambda \rangle_1 \times \\ &\times \int_{\mathbb{R}^3} p_\mu W d^3p - \langle p_\mu \rangle_1 \int_{\mathbb{R}^3} p_\lambda W d^3p + \langle p_\mu \rangle_1 \langle p_\lambda \rangle_1 \int_{\mathbb{R}^3} W d^3p = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} p_\mu p_\lambda W d^3p - f^1 \langle p_\lambda \rangle_1 \langle p_\mu \rangle_1, \end{aligned} \quad (1.185)$$

$$m^2 P_{\mu\lambda} = f^1 (\langle p_\mu p_\lambda \rangle_1 - \langle p_\lambda \rangle_1 \langle p_\mu \rangle_1).$$

Найдем выражение для $\langle p_x^2 \rangle_1$:

$$\begin{aligned} f^1 \langle p_x^2 \rangle_1 &= \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} p_x^2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^3 \hbar \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} p_x^2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta(y_s) dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s = \end{aligned} \quad (1.186)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\hbar^2 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 - ik_1(x_s) \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta''(x_s) dx_s, \\
f^1 \langle p_x^2 \rangle_1 &= -\frac{\hbar^2 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{1 - ik_1(x_s) \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \Big|_{x_s=0},
\end{aligned}$$

где $\bar{\phi}_s = \phi_s - \phi = -\phi$ и учтено

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_x^2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x = \hbar^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{p}_x^2 e^{-i\bar{p}_x x_s} d\bar{p}_x = -2\pi \hbar^3 \delta''(x_s), \quad (1.187)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \delta''(x - a) dx = F''(a). \quad (1.188)$$

Вычислим производные в выражении (1.186):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{1 - ik_1(x_s) \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} &= \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} - \\
&- i \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{k_1 \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}}, \quad (1.189)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_s} \frac{e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} = -e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{x_s (1 + k_1^2 \sin^2 \phi) + 4\sigma_r^2 k_1 k_1' \sin^2 \phi}{4\sigma_r^2 (1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2}},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} &= \frac{e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}}}{16\sigma_r^4} \frac{x_s^2 - 4\sigma_r^2}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} - \\
&- e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \sin^2 \phi \frac{(k_1'^2 + k_1 k_1'') (1 + k_1^2 \sin^2 \phi) - 3k_1^2 k_1'^2 \sin^2 \phi}{(1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{5/2}}. \quad (1.190)
\end{aligned}$$

Выражение (1.54) при $x_s = 0$ принимает вид

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} \right|_{x_s=0} = -\frac{1}{4\sigma_r^2} - k_1'^2 \sin^2 \phi = -\frac{1}{4\sigma_r^2} - \frac{\sin^2 \phi}{\rho^2}, \quad (1.191)$$

где учтено выражение (1.173) для k' . Найдем второе слагаемое из выражения (1.53), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{k_1 \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} = \\ = e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \sin \phi \left[\frac{4\sigma_r^2 k_1' - x_s k_1}{4\sigma_r^2 \sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} - \frac{k_1^2 k_1' \sin^2 \phi}{(1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \right], \quad (1.192) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{k_1 \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} = \\ = -\frac{x_s}{4\sigma_r^2} \sin \phi e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \left[\frac{4\sigma_r^2 k_1' - x_s k_1}{4\sigma_r^2 \sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} - \frac{k_1^2 k_1' \sin^2 \phi}{(1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} \right] + \\ + e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \sin \phi \frac{(4\sigma_r^2 k_1'' - k_1 - x_s k_1')(1 + k_1^2 \sin^2 \phi) - (4\sigma_r^2 k_1' - x_s k_1) k_1 k_1' \sin^2 \phi -}{4\sigma_r^2 (1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2}} - \\ - e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \sin^3 \phi \frac{(2k_1 k_1'^2 + k_1^2 k_1'')(1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{3/2} - 3k_1'^2 k_1^3 (1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \sin^2 \phi}{(1 + k_1^2 \sin^2 \phi)^3}. \quad (1.193) \end{aligned}$$

Выражение (1.193) при $x_s = 0$ принимает вид

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \frac{k_1 \sin \phi}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \right|_{x_s=0} = \left. \frac{\partial^2 k_1}{\partial x_s^2} \right|_{x_s=0} \sin \phi = 0, \quad (1.194)$$

где

$$\frac{\partial^2 k_1}{\partial x_s^2} = 4\rho \frac{\partial}{\partial x_s} \frac{4\rho^2 + x_s^2}{(4\rho^2 - x_s^2)^2} = 8\rho \frac{12\rho^2 + x_s^2}{(4\rho^2 - x_s^2)^3} x_s.$$

Подставляя выражения (1.191) и (1.194) в (1.189), а затем в (1.186), получим представление для $\langle p_x^2 \rangle_1$:

$$\begin{aligned} f^1 \langle p_x^2 \rangle_1 = \frac{\hbar^2 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \left(\frac{1}{4\sigma_r^2} + \frac{\sin^2 \phi}{\rho^2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle p_x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2} \left(1 + \frac{4\sigma_r^2}{\rho^2} \sin^2 \phi \right). \quad (1.195) \end{aligned}$$

Учитывая (1.195) согласно (1.185), получим выражение для P_{xx} :

$$P_{xx} = \frac{f^1}{m^2} \left(\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 \right) = \frac{f^1}{m^2} \left[\frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2} \left(1 + \frac{4\sigma_r^2}{\rho^2} \sin^2 \phi \right) - \frac{\hbar^2}{\rho^2} \sin^2 \phi \right] = f^1 \frac{\hbar^2}{4m^2 \sigma_r^2}. \quad (1.196)$$

Проведем аналогичные выкладки для нахождения компонент P_{yy} и P_{zz} . Вычислим $\langle p_y^2 \rangle_1$:

$$\begin{aligned} f^1 \langle p_y^2 \rangle_1 &= \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s)}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} p_y^2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^3 \hbar \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} p_y^2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} dy_s \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \delta(x_s) e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s = \\ &= -\frac{\hbar^2 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + ik_1(y_s) \cos \phi}{\sqrt{1 + k_1^2(y_s) \cos^2 \phi}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta''(y_s) dy_s, \\ f^1 \langle p_y^2 \rangle_1 &= -\frac{\hbar^2 \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} \frac{1 + ik_1(y_s) \cos \phi}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \cos^2 \phi}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \Big|_{y_s=0}, \end{aligned} \quad (1.197)$$

где $\bar{\phi}_s = \phi_s - \phi = \frac{\pi}{2} - \phi$ и учтено $\int_{-\infty}^{+\infty} p_y^2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = -2\pi \hbar^3 \delta''(y_s)$. Найдем производные в выражении (1.197). По аналогии с преобразованиями (1.189)–(1.194) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2(y_s) \cos^2 \phi}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \Big|_{y_s=0} &= -\frac{1}{4\sigma_r^2} - \left(\frac{\partial k_1}{\partial y_s} \Big|_{y_s=0} \right)^2 \cos^2 \phi = \\ &= -\frac{1}{4\sigma_r^2} - \frac{\cos^2 \phi}{\rho^2}, \quad (1.198) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} \frac{k_1 \cos \phi}{\sqrt{1 + k_1^2 \cos^2 \phi}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \right|_{y_s=0} = \left. \frac{\partial^2 k_1}{\partial y_s^2} \right|_{y_s=0} \cos \phi = 0. \quad (1.199)$$

Подставляя производные (1.198) и (1.63) в выражение (1.197), находим $\langle p_y^2 \rangle_1$ и P_{yy} :

$$\langle p_y^2 \rangle_1 = \frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2} \left(1 + \frac{4\sigma_r^2}{\rho^2} \cos^2 \phi \right), \quad (1.200)$$

$$\begin{aligned} P_{yy} &= \frac{f^1}{m^2} \left(\langle p_y^2 \rangle_1 - \langle p_y \rangle_1^2 \right) = \\ &= \frac{f^1}{m^2} \left(\frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2} \left(1 + \frac{4\sigma_r^2}{\rho^2} \cos^2 \phi \right) - \frac{\hbar^2}{\rho^2} \cos^2 \phi \right) = f^1 \frac{\hbar^2}{4m^2 \sigma_r^2}. \end{aligned} \quad (1.201)$$

Найдем выражение для $\langle p_z^2 \rangle_1$:

$$\begin{aligned} f^1 \langle p_z^2 \rangle_1 &= \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} p_z^2 e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = \\ &= \sqrt{2\pi} \hbar^2 \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{16\pi^2 \sigma_r^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s)}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta(y_s) dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta(x_s) dx_s = \\ &= \sqrt{2\pi} \hbar^2 \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{16\pi^2 \sigma_r^5} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - ik_1(x_s) \sin \phi)}{\sqrt{1 + k_1^2(x_s) \sin^2 \phi}} e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta(x_s) dx_s, \\ f^1 \langle p_z^2 \rangle_1 &= \frac{\sqrt{2\pi} \hbar^2}{16\pi^2 \sigma_r^5} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}, \end{aligned} \quad (1.202)$$

где учтено, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_z^2 e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z = \sqrt{2\pi} \frac{\hbar^3}{8\sigma_r^3}.$$

Из (1.202) получаем выражения для $\langle p_z^2 \rangle_1$ и P_{zz} :

$$\langle p_z^2 \rangle_1 = \frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2}, \quad P_{zz} = \frac{1}{m^2} f^1 \left(\langle p_z^2 \rangle_1 - \langle p_z \rangle_1^2 \right) = f^1 \frac{\hbar^2}{4m^2 \sigma_r^2}, \quad (1.203)$$

где согласно (1.125) $\langle p_z \rangle_1 = 0$. Найдем смешанные величины $\langle p_\mu p_\lambda \rangle_1$, $\mu \neq \lambda$. Так как $\langle p_z \rangle_1 = 0$,

$$\langle p_x p_z \rangle_1 = \langle p_y p_z \rangle_1 = 0,$$

отсюда

$$\begin{aligned} P_{xz} &= \frac{1}{m^2} f^1 (\langle p_x p_z \rangle_1 - \langle p_x \rangle_1 \langle p_z \rangle_1) = 0, \\ P_{yz} &= \frac{1}{m^2} f^1 (\langle p_y p_z \rangle_1 - \langle p_y \rangle_1 \langle p_z \rangle_1) = 0. \end{aligned} \quad (1.204)$$

Таким образом, остается найти $\langle p_x p_y \rangle_1$. Используя результаты (1.170) и (1.175), получим

$$\begin{aligned} f^1 \langle p_x p_y \rangle_1 &= \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{8\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} dp_z \int_{-\infty}^{+\infty} p_x e^{-\frac{i}{\hbar} p_x x_s} dp_x \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s \int_{-\infty}^{+\infty} p_y e^{-\frac{i}{\hbar} p_y y_s} dp_y = \\ &= -\hbar^2 \sqrt{2\pi} \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + ik_1 \sin \bar{\phi}_s}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}} \delta'(y_s) dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x_s) e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s = \end{aligned} \quad (1.205)$$

$$\begin{aligned} &= -\hbar^2 \sqrt{2\pi} \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{y_s^2}{8\sigma_r^2}}}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \delta'(y_s) dy_s \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x_s) e^{-\frac{x_s^2}{8\sigma_r^2}} dx_s, \\ f^1 \langle p_x p_y \rangle_1 &= -\hbar^2 \sqrt{2\pi} \frac{e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2}}}{4\pi^2 \sigma_r^3} \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial y_s} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \Big|_{x_s=y_s=0}, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'_y(y-b) dy \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y) \delta'_x(x-a) dx = \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'_y(y-b) \frac{\partial F}{\partial x}(a, y) dy = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a, b). \end{aligned}$$

Преобразуем выражение для производной (1.205) в точке $x_s = y_s = 0$ к виду

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial y_s} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \Big|_{x_s=y_s=0} = \\ &= e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial y_s} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \Big|_{x_s=y_s=0} = \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial y_s} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \Big|_{x_s=y_s=0}. \end{aligned} \quad (1.206)$$

Производя непосредственное дифференцирование в выражении (1.206), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s \partial y_s} e^{-\frac{\rho_s^2}{8\sigma_r^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + k_1^2 \sin^2 \bar{\phi}_s}} \Big|_{x_s=y_s=0} = \frac{\sin \phi \cos \phi}{\rho^2}. \quad (1.207)$$

При подстановке (1.207) в (1.205) находим выражения для $\langle p_x p_y \rangle_1$ и P_{xy} :

$$\langle p_x p_y \rangle_1 = -\frac{\hbar^2}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi, \quad (1.208)$$

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \frac{f^1}{m^2} (\langle p_x p_y \rangle_1 - \langle p_x \rangle_1 \langle p_y \rangle_1) = \\ &= \frac{f^1}{m^2} \left(-\frac{\hbar^2}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi + \frac{\hbar^2}{\rho^2} \sin \phi \cos \phi \right) = 0. \end{aligned} \quad (1.209)$$

Полученные выражения (1.196), (1.200), (1.203), (1.204) и (1.209) доказывают справедливость утверждения (1.182) теоремы 9. Выражение (1.183) для центростремительного ускорения непосредственно следует из дифференцирования стационарного поля скоростей $\langle \vec{v} \rangle_1$ (1.125), т. е. $\frac{d}{dt} \langle v_\mu \rangle_1 = \langle v_\lambda \rangle_1 \frac{\partial}{\partial x_\lambda} \langle v_\mu \rangle_1$. Связь между квантовым потенциалом Q (1.128) и тензором давления $P_{\mu\lambda}$ (1.184) определяется соотношением

$$\begin{aligned} -\frac{m}{f^1} \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x_\lambda} &= -\frac{1}{mf^1} \frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2} \delta_{\mu\lambda} \frac{\partial f^1}{\partial x_\lambda} = \\ &= \frac{1}{mf^1} \frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2} \delta_{\mu\lambda} \frac{x_\lambda}{\sigma_r^2} f^1 = \frac{\hbar^2 x_\mu}{4m\sigma_r^4} = \frac{\partial Q}{\partial x_\mu}, \end{aligned} \quad (1.210)$$

где $\frac{\partial f^1}{\partial x_\lambda} = -\frac{x_\lambda}{\sigma_r^2} f^1$. Теорема 9 полностью доказана.

Замечание 7. Согласно выражению (1.125) скорость потока вероятностей $\langle \vec{v} \rangle_1$ направлена по касательным к окружностям (1.181). Величина $\frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle_1$ (1.183) является центростремительным ускорением. Тензор давления $P_{\mu\lambda}$ задает ковариационную матрицу компонент импульсов $\text{cov}(p_\mu, p_\lambda)$, имеющую диагональный вид (1.182). Из диагонального вида тензора $P_{\mu\lambda}$ следует, что для рассматриваемой квантовой системы компоненты импульсов p_μ являются независимыми случайными величинами.

Для демонстрации теоретических результатов, изложенных в п. 1.5, возьмем первые два слагаемых разложения (1.115). Первое слагаемое в разложении (1.115)–(1.120), соответствующее «классической» силе, имеет вид

$$\nabla_r U = \frac{\hbar^2}{4m\sigma_r^4} \left[\rho \left(1 + 4 \frac{\sigma_r^4}{\rho^4} \right) \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \right]. \quad (1.211)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (1.120) можно оценить как

$$\frac{\partial^3 U}{\partial x_\nu \dots} \sim \frac{\hbar^2}{m} \frac{1}{\rho^5}, \quad (1.122)$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} &= \frac{12\hbar^2}{m\rho^5} \cos 2\phi \cos \phi, & \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} &= -\frac{12\hbar^2}{m\rho^5} \sin \phi \cos 2\phi, \\ \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} &= -\frac{4\hbar^2}{m\rho^5} \cos \phi (3 \cos 2\phi - 2), & \frac{\partial^3 U}{\partial y \partial x^2} &= \frac{4\hbar^2}{m\rho^5} \sin \phi (3 \cos 2\phi + 2), \\ \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} = 0. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Выражение для функции Вигнера и ее производных второго порядка приведено в теореме 8. Из выражений (1.175) и (1.176) видно, что характерным пространственным размером физической системы является величина σ_r , равная среднеквадратичному отклонению для плотности вероятностей (1.124). Величина σ_r — это свободный параметр в решении (1.128)–(1.130). В качестве примера рассмотрим квантовую систему, в которой

$$\sigma_r^2 = \frac{3}{2} r_0^2, \quad E = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2}, \quad (1.214)$$

где r_0 , E — соответственно радиус и энергия первой боровской орбиты в атоме водорода. При $\rho < \sigma_r$ (микромасштаб) оба вклада — (1.175) и (1.176) — оказывают существенное влияние на траекторию, удовлетворяющую уравнению движения (1.120). На макромасштабе при $\rho > \sigma_r$ вклад (1.176) уменьшается и уравнение (1.120) переходит в классическое уравнение Ньютона.

Численные расчеты решений уравнения (1.120) проведем для трех вариантов аппроксимации (1.115) среднего ускорения $\langle \ddot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$.

1-й вариант:

$$U \left(\overleftarrow{\nabla}_r \cdot \overrightarrow{\nabla}_v \right)^3 f^{1,2} \mapsto \left(\frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) + 3 \left(\frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_y^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \right), \quad (1.215)$$

2-й вариант:

$$U \left(\overleftarrow{\nabla}_r \cdot \overrightarrow{\nabla}_v \right)^3 f^{1,2} \mapsto \left(\frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x^2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right) + 3 \left(\frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x \partial v_y} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} \right), \quad (1.216)$$

3-й вариант:

$$\frac{\partial U}{\partial x_\mu} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_v \right)^2 f^{1,2} \mapsto \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x^2} \right) + \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_y^2} \right) + \left(\frac{\partial^3 U}{\partial y^3} \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_y^2} \right) + \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x \partial v_y} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x^2} \right) + \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2} \frac{\partial^2 f^{1,2}}{\partial v_x^2} \right). \quad (1.217)$$

Третий вариант (1.181) соответствует аппроксимации Власова–Моэля (1.108). Аппроксимации (1.179)–(1.181) записаны только для движения в плоскости $Z = 0$, так как производные третьего порядка от потенциала U с участием переменной z равны нулю (1.177).

На рис. 9, *а* показана классическая траектория с начальными условиями $x = \sigma_r/2$, $y = z = 0$ и $p_x = p_z = 0$, $p_y = 3\sqrt{2mE}$. Стрелки на траектории указывают направление движения частицы. Координатный масштаб $(\bar{x}, \bar{y})$ отложен в единицах σ_r . На рис. 9, *б* помимо классической траектории (красный цвет, 1) показаны три траектории (синий, 2, зеленый, 3 и черный цвет, 4), соответствующие аппроксимациям (1.179)–(1.181). На рис. 9, *б* видно, что траектории имеют существенное различие между собой, которое с течением времени начинает увеличиваться. Наиболее близкой к классической траектории (красный цвет, 1) является траектория с аппроксимацией Власова–Моэля (1.181) (черный цвет, 4).

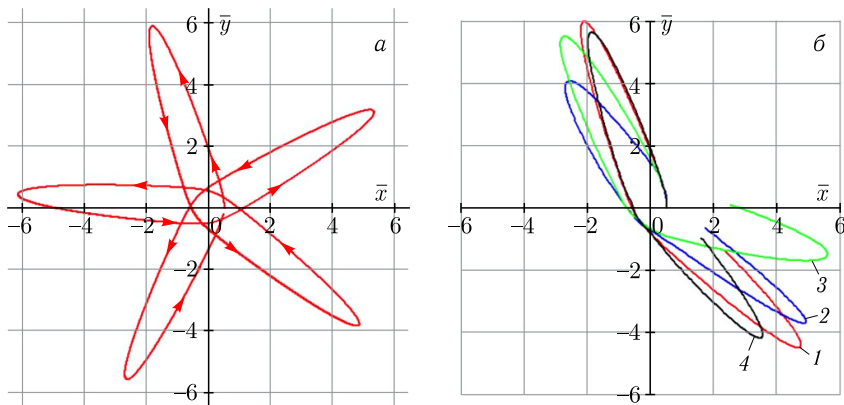


Рис. 9 (цветной в электронной версии). Траектории частиц на микромасштабе

Заметим, что траектории на рис. 9 проходят через области микро- и макромасштабов. В начальный момент времени движение начинается на микромасштабе ($\rho = \sigma_r/2$), где разница в аппроксимациях (1.179)–(1.181) является существенной. Указанная разница начинает проявлять свое влияние почти в самом начале как расщепление траекторий (см. рис. 9, б). Аналогичная ситуация показана на рис. 10, а для меньшего начального импульса $p_y = 1,641\sqrt{2mE}$.

На рис. 10 приведена иллюстрация эффекта перехода от микромасштаба к макромасштабу. На рис. 10, а стартовый радиус $\rho = \sigma_r/2$, на рис. 10, б $\rho = 2,15\sigma_r$, а на рис. 10, в $\rho = 2,5\sigma_r$. Видно, что при увеличении стартового радиуса все три траектории (1.179)–(1.181) стремятся к классической траектории. Действительно, при большом стартовом радиусе (см. рис. 10, в) влияние слагаемых O_μ становится малым и основной вклад в правую часть уравнения (1.120) вносит сила $-\nabla_r U$ (классическая траектория).

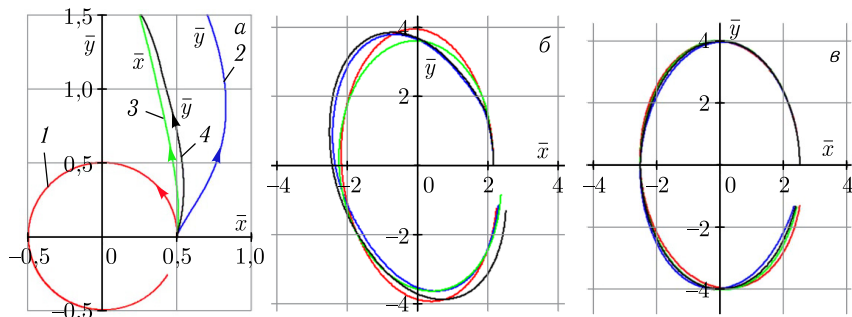


Рис. 10 (цветной в электронной версии). Переход от микромасштаба к макромасштабу

Все четыре траектории на рис. 10, в полностью находятся в области макромасштаба. На рис. 10, б графики траекторий соответствуют переходному масштабу между микро- и макромасштабами. На рис. 10, а уже в начальный момент времени есть существенная разница между траекториями, а на рис. 10, в разница между траекториями появляется только через четверть периода. На рис. 10, б существенная разница между траекториями возникает приблизительно на одной восьмой периода.

Все приведенные расчеты выполнены с одним и тем же значением постоянной Планка ($\hbar = \text{const}$), т.е. нигде не осуществлялся классический переход ($\hbar \rightarrow 0$). Вклад дополнительной силы O_μ определялся только микро- и макромасштабом области, в которой считалась траектория. Результаты численного моделирования полностью соответствуют теоретическому предсказанию, сделанному в п. 1.5.

Замечание 8. Функция Вигнера имеет фазовые области отрицательных и положительных значений (см. рис. 8), на границе этих областей

слагаемое O_μ имеет полюсы (1.121). Наличие полюсов приводит к бесконечным энергетическим барьерам [75], вблизи которых частицы могут «отражаться», резко меняя траекторию своего движения.

Величина параметра σ_r определяет пространственную область, в которой траектория частицы является неопределенной (см. рис. 9, 10). С точки зрения функции плотности распределения вероятностей $f^1 = |\Psi|^2$ параметр σ_r является среднеквадратичным отклонением. Приведенные в данном пункте расчеты были выполнены при $\sigma_r \sim r_0$ (1.178). Размер области неопределенности был порядка радиуса первой боровской орбиты. Энергия частицы при этом мала: $E = (3\hbar^2)/(4m\sigma_r^2)$. Такая физическая система на микромасштабе близка к квантовой системе. Если считать, что минимальная энергия классической системы равна энергии массы покоя $E = mc^2$, то

$$\sigma_r = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\hbar}{mc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_C, \quad (1.218)$$

где λ_C — приведенная комптоновская длина волны частицы. Таким образом, максимальная неопределенность центра масс классической частицы будет пропорциональна ее комптоновской длине волны.

Замечание 9. Волновая функция Ψ может быть представлена как конформное отображение некоторой комплексной области $\Psi = \exp(Z/2)$, где $Z = S + i\Phi$, а $S = \ln(\Psi\Psi^*)$ и $i\Phi = \ln(\Psi/\Psi^*)$ [69, 70]. Функция S связана с плотностью вероятностей f^1 , а Φ — со скалярным потенциалом векторного поля скоростей $\langle \vec{v} \rangle_1$ (1.125). Существует бесконечное множество траекторий, по которым точки одного комплексного множества при отображении Ψ могут перейти в точки другого комплексного множества. Для квантовой механики при отображении важна плотность «точек» $f^1 = |\Psi|^2$. Фаза волновой функции $\varphi = \Phi/2$ при отображении определяет среднее векторное поле потока вероятностей $\langle \vec{v} \rangle_1$.

Векторное поле $\langle \vec{v} \rangle_1$ не содержит информации о движении каждой точки множества, оно является усреднением по пространству скоростей (1.75). Аналогичная картина наблюдается в гидрогазодинамике, когда средняя скорость среды $\langle \vec{v} \rangle_1 = 0$, но каждая молекула/точка движется.

На микромасштабе в газе/жидкости невозможно определить траекторию в точке $\vec{r}_0$, для этого необходимо произвести усреднение по малому объему вокруг точки $\vec{r}_0$ и получить $\langle \vec{v} \rangle_1(\vec{r}_0)$ (1.75). Схожая картина на микромасштабе наблюдается на рис. 9 и 10, а, когда отсутствует полная информация о поле ускорения $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$. В некотором смысле для уравнения Шрёдингера полная информация о поле $\langle \dot{v}_\mu \rangle_{1,2}$ является излишней, так как квантовая механика работает не с траекторией, а с плотностью вероятностей f^1 .

Уравнение Шрёдингера может дать только полную информацию о среднем поле $\langle \vec{v} \rangle_1 = \hbar/(2m)\nabla_r\Phi - (e/m)\vec{A}$, где $\vec{A}$ — векторный потен-

циал магнитного поля $\vec{B} = \text{curl}_r \vec{A}$. Схожая ситуация наблюдается на макромасштабе в гидродинамике, в которой можно оперировать со средней скоростью течения среды $\langle \vec{v} \rangle_1$.

Таким образом, благодаря математическому формализму Вигнера–Власова проявляется схожесть интерпретаций физических процессов, протекающих в классических и квантовых системах.

2. СИСТЕМЫ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

2.1. Свойства функции Вигнера и Вейля–Стратоновича. Рассмотрим второе уравнение Власова (1.72) относительно функции $f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Оно имеет широкое применение в статистической физике, астрофизике, физике плазмы и ускорительной физике [76–82]. Уравнение (1.72) можно переписать как полную производную по времени вдоль фазовой траектории [83]:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_{1,2} S^{1,2} &= -Q_{1,2}^2, \quad Q_{1,2}^2 = \text{div}_v \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}, \quad S^{1,2} = \ln f^{1,2}, \\ \hat{\pi}_{1,2} &= \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla_r + \langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2} \cdot \nabla_v, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $Q_{1,2}^2$ — источники диссипации. Для обрыва цепочки уравнений Власова на втором уравнении (2.1) необходимо ввести динамическую аппроксимацию для векторного поля потока ускорений $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$. А. А. Власов предложил две феноменологические аппроксимации, используемые в физике плазмы, ускорительной физике и статистической физике:

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = -\frac{1}{m} \nabla_r U(\vec{r}, t), \quad (2.2)$$

$$\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{q}{m} \left[\vec{E}_c(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right], \quad (2.3)$$

где поле $\vec{E}_c$ отличается от поля $\vec{E}$ в уравнении движения (1.127) отсутствием квантового давления $-\nabla_r Q$. Согласно (1.75) поле $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ определено в фазовом пространстве и помимо координаты $\vec{r}$ может зависеть от скорости $\vec{v}$ (импульса $\vec{p} = m\vec{v}$). Из двух аппроксимаций (2.2)–(2.3) зависимость от скорости $\vec{v}$ содержится только в (2.3) в виде силы Лоренца. Обе аппроксимации (2.2), (2.3) не содержат источников диссипаций, т. е. $Q_{1,2}^2 = 0$. Отсутствие источников диссипаций переводит второе уравнение Власова (2.1) в уравнение Лиувилля $\hat{\pi}_{1,2} S^{1,2} = 0$ с постоянством плотности вероятностей $f^{1,2} = \text{const}$ вдоль фазовой траектории. Отметим, что существует большое количество работ [85–90], в которых в явном или неявном виде рассматривается аппроксимация $\langle \dot{\vec{v}} \rangle_{1,2}$ с ненулевыми источниками диссипаций $Q_{1,2}^2 \neq 0$.

В отсутствие магнитного поля аппроксимация (2.3) переходит в (2.2) и аппроксимацию (1.108) при классическом пределе $\hbar \rightarrow 0$. При усреднении аппроксимации (2.2) по пространству скоростей происходит совпадение с выражением (1.109). Таким образом, для систем только с электри-

ческим взаимодействием аппроксимация Власова–Моэля (1.108) является квантовым обобщением классической аппроксимации Власова (2.2).

Интересным видится построение квантового обобщения аппроксимации Власова–Моэля для систем с электромагнитным взаимодействием, которые в классическом случае согласуются с аппроксимацией Власова (2.3). Существуют два возможных пути. В первом случае можно построить аналог эволюционного уравнения Моэля (1.68) для функции Вигнера (1.69) с учетом электромагнитного взаимодействия. Такой подход был ранее исследован в работах [27–30], при этом оказалось, что функция Вигнера (1.69) не является калибровочно-инвариантной. Второй путь связан с построением новой функции Вигнера f_w на основе преобразования Вейля–Стратоновича

$$f_w(\vec{r}, \vec{P}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \vec{s} \left[\vec{P} + \frac{q}{2} \int_{-1}^1 \vec{A} \left(\vec{r} + \tau \frac{\vec{s}}{2}, t \right) d\tau \right] \right\} \times \\ \times \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) d^3s, \quad (2.4)$$

где $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$ и $\rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) = \Psi^*(\vec{r}_-, t) \Psi(\vec{r}_+, t)$, $\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \pm \vec{s}/2$. Для построения аппроксимации Власова–Моэля с учетом электромагнитного поля необходимо получить уравнения эволюции для функций (1.69) и (2.4). Известные из публикаций уравнения эволюции довольно сложны и отличаются от второго уравнения Власова. Поэтому необходимо вывести другую формулировку, аналогичную второму уравнению Власова (1.72).

Прежде всего представляется важным сравнение функций Вигнера (1.69) и (2.4) на точных модельных решениях для квантовых систем с электромагнитным взаимодействием и предпочтительно с неоднородными полями. Такое сравнение может выявить особенности каждой функции. Например, функция (1.69) проще функции (2.4). В то же время функция (2.4) калибровочно-инвариантна, но насколько это может быть критически важно для вычисления средних кинематических величин, остается открытым вопросом. Существует теорема Хадсона, которая может быть полезна для функции (1.69), но неясно, верна ли эта теорема и для (2.4).

Наличие электромагнитной аппроксимации Власова–Моэля позволит ответить на следующие вопросы. Каково влияние магнитного поля на квантовое давление? Сохранятся ли квантовые поправки после усреднения новой аппроксимации по пространству скоростей?

Аппроксимация Власова–Моэля для электромагнитных систем позволит найти средние источники диссипаций и оценить эволюцию H^n -функций Больцмана:

$$\hat{\pi}_0[H^1] = -\langle Q_1^1 \rangle_0, \quad \hat{\pi}_0[H^{1,2}] = -\langle Q_{1,2}^2 \rangle_0, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
H^{1,2}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) S^{1,2}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v = \langle S^{1,2} \rangle_0(t), \\
H^1(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} f^1(\vec{r}, t) S^1(\vec{r}, t) d^3 r = \langle S^1 \rangle_0(t),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $Q_1^1 = \text{div}_r \langle \vec{v} \rangle_1$, $S^1 = \ln f^1$, $\hat{\pi}_0 = d/dt$. Напомним, что наиболее известной H -функцией Больцмана является $H^{1,2}$ -функция, связанная с энтропией системы, а также связанная с ней теорема. Из уравнений (2.5) следует, что изменение H^n -функций Больцмана описывается средними источниками диссипаций. Для остальных уравнений из цепочки Власова существуют аналогичные эволюционные уравнения (2.5) [85].

Анализ свойств функций Вигнера (1.69) и (2.4) проведем с использованием точных модельных решений уравнения Шрёдингера для квантовых систем с электромагнитным полем. Ранее [71] был построен класс точных решений (Ψ - модель) уравнения Шрёдингера (1.126), скалярный потенциал которых имел вид

$$\varphi = k\phi + n\theta + c_0 t, \quad n, k \in \mathbb{Z} \quad (\text{или } n, k \in \mathbb{R}), \tag{2.7}$$

где ϕ, θ — азимутальный и полярный угол соответственно в сферической системе координат, а $c_0 = -E/\hbar$ — постоянная величина. Заметим, что фаза (2.7) не является непрерывной функцией, следовательно, потенциальное поле $\nabla_r \Phi$ в разложении Гельмгольца для $\langle \vec{v} \rangle_1$ (1.126) будет содержать вихревую компоненту $(k/(r \sin \theta)) \vec{e}_\phi$, так как $\text{curl}_r \nabla_r \Phi \neq \vec{0}$:

$$\langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{\hbar}{m} \nabla_r \varphi = \frac{\hbar}{m} \left(\frac{k}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi + \frac{n}{r} \vec{e}_\theta \right), \quad \vec{A} = \vec{\theta}, \tag{2.8}$$

или

$$\langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{\hbar}{m} \nabla_r \varphi' - \frac{q}{m} \vec{A}', \quad \varphi' = n\theta - \frac{E}{\hbar} t, \quad \vec{A}' = -\frac{\hbar k}{qr \sin \theta} \vec{e}_\phi. \tag{2.9}$$

Таким образом, в рамках Ψ -модели поле $\langle \vec{v} \rangle_1$ может быть представлено двумя способами. В первом случае есть только негладкий скалярный потенциал φ (2.8), который приводит к вихревому полю. Во втором случае (2.9) используется гладкий скалярный потенциал φ' и негладкий вихревой векторный потенциал $\vec{A}'$. Подставляя векторный потенциал (2.9) в (1.127), получаем выражение для магнитной индукции

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= -\frac{m}{q} \text{curl}_r \langle \vec{v} \rangle_1 = \text{curl}_r \vec{A}', \\
\vec{B} &= -\frac{q_m^{(\text{Wb})}}{2\pi} \delta'(\rho) \vec{e}_z, \quad q_m^{(\text{Wb})} q = 2\pi \hbar k, \quad \rho = r \sin \theta,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\delta'(\rho)$ — обобщенная производная δ -функции Дирака, а $q_m^{(\text{Wb})}$ соответствует магнитному заряду, удовлетворяющему правилу квантования [27].

Заметим, что магнитное поле (2.10) удовлетворяет уравнению Максвелла $\text{div}_r \vec{B} = 0$. Собственный магнитный момент квантовой системы имеет вид $\vec{\mu}_s = \mu_B k \vec{e}_z$, который соответствует собственному моменту электрона со спином $s = \pm 1/2$ при $k = \pm 1$. Согласно Ψ -модели решение уравнения Шрёдингера имеет вид

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} F_0 \left(r, \phi + \frac{k}{n} \left[\text{ctg} \theta - \text{ctg} \left(\theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \right], \theta + \frac{2\alpha n}{r^2} t \right) \times e^{i(n\theta - \frac{E}{\hbar} t)}, \quad (2.11)$$

$$f(r, \phi, \theta, t)|_{t=0} = \frac{F_0(r, \phi, \theta)}{\sin \theta} = f_0(r, \phi, \theta), \quad (2.12)$$

где F_0 — некоторая функция, определяющая класс решений Ψ -модели. Функция F_0 (2.11) является постоянной вдоль характеристических кривых, показанных на рис. 11. Характеристические кривые на рис. 11 приведены для трех различных радиусов с параметрами $k = 1$, $n = 4$. Рассмотрим частный случай разложения (2.7) с параметрами $n = 0$, $k = 1$ для стационарной функции F_0 :

$$f^1(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \exp \left(-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2} \right), \quad (2.13)$$

$$\langle \vec{p}_c \rangle_1 = m \langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{\hbar}{2} \nabla_r \Phi = \hbar \nabla_r \varphi = \hbar \nabla_r \phi = -q \vec{A}_1 = \frac{\hbar}{\rho} \vec{e}_\phi, \quad (2.14)$$

где $\vec{A}_1 = \vec{A}'$. Поле $\langle \vec{v} \rangle_1$ может быть представлено двумя способами (2.8), (2.9): с негладкой функцией скалярного потенциала $\varphi = \phi - Et/\hbar$ ($\vec{A} = \vec{\theta}$) или с гладкой функцией скалярного потенциала $\varphi' = -Et/\hbar$ и негладким векторным потенциалом $\vec{A}_1 = -\hbar \vec{e}_\phi / q\rho$. Постоянная величина σ_r является свободным параметром. Функция (2.13) удовлетворяет условию нормировки $\int f^1 d^3r = 1$ и первому уравнению Власова. С математической точки зрения решение (2.13), (2.14) первого уравнения Власова (1.76) соответствует «двум квантовым системам», или двум математическим моделям. Конечно, с физической точки зрения обе математические модели соответствуют одной квантовой системе. Первая квантовая система (математическая модель) имеет только электрическое взаимодействие $\langle \vec{p}_c \rangle_1 = \hbar \nabla_r \varphi$,

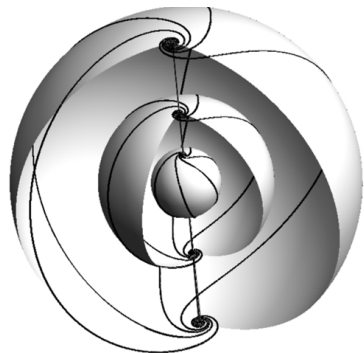


Рис. 11. Характеристические кривые

а вторая имеет электромагнитное взаимодействие $\langle \vec{p}_c \rangle_1 = -q\vec{A}_1$. Как будет видно далее, обе системы связаны калибровочной инвариантностью и для них будет выполнено сравнение функции Вигнера (1.69) и Вейля–Стратоновича (2.4). Справедлива следующая теорема.

Теорема 10. *Волновые функции*

$$\Psi_E(\rho, \phi, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{\rho^2 + z^2}{4\sigma_r^2} + i\phi - i\frac{E}{\hbar}t\right), \quad (2.15)$$

$$\Psi_{EM}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma_r^2} - i\frac{E}{\hbar}t\right) \quad (2.16)$$

являются точными решениями уравнений Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_E}{\partial t} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \Psi_E + U_1 \Psi_E, \quad (2.17)$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{EM}}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q\vec{A}_1)^2 \Psi_{EM} + U_1 \Psi_{EM}, \quad (2.18)$$

где

$$U_1(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{8m\sigma_r^4} \left(r^2 - \frac{4\sigma_r^4}{r^2 \sin^2 \theta} \right), \quad q\vec{A}_1(\vec{r}) = -\frac{\hbar}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi, \quad E = \frac{3\hbar^2}{4m\sigma_r^2}, \quad (2.19)$$

при этом для обеих систем — (2.15) и (2.16) — выполнено уравнение Гамильтона–Якоби (1.127)

$$-\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2m} |\langle \vec{p}_c \rangle_1|^2 + V, \quad V = U + Q, \quad (2.20)$$

где квантовый потенциал имеет вид

$$Q(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{4m\sigma_r^2} \left(3 - \frac{r^2}{2\sigma_r^2} \right). \quad (2.21)$$

Доказательство теоремы 10. Для доказательства теоремы можно воспользоваться методом, изложенным в работах [55, 56], или произвести непосредственную подстановку. Не ограничивая общности, воспользуемся вторым способом. Для электромагнитного случая (2.16), (2.15) получаем

$$U = E + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_r |\Psi|}{|\Psi|} - \frac{q^2}{2m} |\vec{A}_1|^2 - i\hbar \frac{q}{m |\Psi|} \vec{A}_1 \cdot \nabla_r |\Psi|, \quad (2.22)$$

$$U_1 = E - Q - \frac{\hbar^2}{2m\rho^2}, \quad (2.23)$$

где учтено, что $Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_r |\Psi|}{|\Psi|}$, $\vec{A}_1 = -\frac{\hbar}{q\rho} \vec{e}_\phi$, $\operatorname{div}_r \vec{A}_1 = 0$ и $\varphi = -\frac{E}{\hbar} t$. Выражение для квантового потенциала имеет вид

$$\Delta_r |\Psi| = \frac{N}{2\sigma_r^2} e^{-\frac{\rho^2}{4\sigma_r^2} - \frac{z^2}{4\sigma_r^2}} \left(\frac{\rho^2}{2\sigma_r^2} - 2 \right) + \frac{N}{2\sigma_r^2} e^{-\frac{\rho^2}{4\sigma_r^2} - \frac{z^2}{4\sigma_r^2}} \left(\frac{z^2}{2\sigma_r^2} - 1 \right), \quad (2.24)$$

$$Q = -\frac{\hbar^2}{4m\sigma_r^2} \left(\frac{\rho^2}{2\sigma_r^2} - 3 + \frac{z^2}{2\sigma_r^2} \right),$$

где $N^{-1} = (2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}$. Для случая только с электрическим взаимодействием можно воспользоваться доказательством теоремы 7. Теорема 10 доказана.

Заметим, что при отсутствии магнитного поля решение $\Psi_{\text{ЕМ}}$ соответствует волновой функции основного состояния гармонического осциллятора с квадратичным потенциалом $U_1 \sim r^2$.

Построим решение уравнения Шрёдингера (2.18) с модифицированным полем (2.14):

$$\langle \vec{p}_c \rangle_1 = m \langle \vec{v} \rangle_1 = -q \vec{A}_2 = \frac{\hbar \eta}{2\sigma_r^2} \rho \vec{e}_\phi, \quad (2.25)$$

где $\eta \in \mathbb{R}$ — некоторый коэффициент. Векторный потенциал $\vec{A}_2$ в (2.15) определяет однородное магнитное поле $\vec{B}$, которое при $\eta = k \in \mathbb{Z}$ имеет вид (сравните с (2.10))

$$\vec{B}_2 = -\frac{q_m^{(\text{Wb})}}{2\pi\sigma_r^2} \eta \vec{e}_z. \quad (2.26)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 11. Волновая функция (2.16) является точным решением уравнения Шрёдингера (2.18) с векторным потенциалом (2.25), квантовым потенциалом (2.21) и потенциальной энергией U_2 :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_{\text{ЕМ}}}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p} - q \vec{A}_2 \right)^2 \Psi_{\text{ЕМ}} + U_2 \Psi_{\text{ЕМ}}, \quad (2.27)$$

$$U_2(\vec{r}) = \frac{\hbar^2}{8m\sigma_r^4} \left[(1 - \eta^2) \rho^2 + z^2 \right].$$

Доказательство теоремы 11. Используя выражение (2.22), получаем

$$U_2 = E - Q - \frac{\hbar^2 \eta^2 \rho^2}{8m\sigma_r^4} + \frac{i\hbar^2 \eta \rho}{2\sigma_r^2 m} \vec{e}_\phi \left(-\frac{\rho}{2\sigma_r^2} \vec{e}_\rho - \frac{z}{2\sigma_r^2} \vec{e}_z \right). \quad (2.28)$$

Так как вид волновой функции не изменился, квантовый потенциал (2.24) останется тем же. Подставляя (2.24) в (2.28), приходим к (2.27). Теорема 11 доказана.

В отличие от потенциальной энергии U_1 (2.19) выражение для U_2 (2.27) не имеет полюса на оси OZ . При $\eta = 1$ выражение (2.27)

не зависит от полярного радиуса ρ . Квантовая система (2.16) «удерживается» в радиальном направлении $\vec{e}_\rho$ за счет магнитного поля (2.26). Коэффициент $1 - \eta^2$ в выражении (2.27) отрицателен при $\eta > 1$.

Расширение квантовой системы (2.16) с потенциалом U_2 в радиальном направлении $\vec{e}_\rho$ компенсируется усилением внешнего магнитного поля (2.26). Аналогичная ситуация возникает при $0 < \eta < 1$, когда избыточное удержание потенциалом (2.27) компенсируется ослаблением внешнего магнитного поля (2.26). Таким образом, любое изменение коэффициента η не влияет на баланс между потенциальной энергией (2.27) и векторным потенциалом (2.25), которые поддерживают квантовую систему в равновесии, а волновую функцию (2.16) неизменной. Квантовое давление (2.21) остается неизменным при любом значении η .

Докажем следующую теорему о функции Вигнера (1.69), которая будет использована для анализа свойств функций Вигнера (1.69) и (2.4) на решениях (2.15), (2.16) с потенциалами (2.19) и (2.27).

Теорема 12. Если векторное поле скорости потока вероятностей $\langle \vec{v} \rangle_1$ является потенциальным и согласно теореме Гельмгольца представимо в виде

$$\langle \vec{v} \rangle_1 = \frac{\hbar}{2m} \nabla_r \Phi, \quad (2.29)$$

то функция $f^{1,2}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ может иметь вид

$$f^{1,2}(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{r}_+, t) \Psi^*(\vec{r}_-, t) e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} d^3 s, \quad (2.30)$$

где $\vec{r}_\pm = \vec{r} \pm \vec{s}/2$.

Доказательство теоремы 12. Используя разложение Гельмгольца для векторного поля $\langle \vec{p} \rangle_1 = m \langle \vec{v} \rangle_1$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \rangle_1 &= -\alpha m \nabla_r \Phi = -\frac{i\hbar}{2} \nabla_r \ln \left(\frac{\Psi}{\Psi^*} \right) = -\frac{i\hbar}{2} \left(\frac{\nabla_r \Psi}{\Psi} - \frac{\nabla_r \Psi^*}{\Psi^*} \right), \\ |\Psi|^2 \langle \vec{p} \rangle_1 &= -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla_r \Psi - \Psi \nabla_r \Psi^*) = \int_{\mathbb{R}^3} f^{1,2}(\vec{r}, \vec{p}, t) \vec{p} d^3 p. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Преобразуем выражение (2.31), приведя его левую часть к интегральному виду. Сделаем замену переменных $\vec{r}_\pm = \vec{r} \pm \vec{s}/2$ и заметим, что

$$\begin{aligned} \nabla_s [\Psi^*(\vec{r}_-, t) \Psi(\vec{r}_+, t)] &= \\ &= \frac{1}{2} [\Psi^*(\vec{r}_-, t) \nabla_{r_+} \Psi(\vec{r}_+, t) - \Psi(\vec{r}_+, t) \nabla_{r_-} \Psi^*(\vec{r}_-, t)]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Выражение (2.32) преобразуется в выражение (2.31) при $s = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 \langle \vec{p} \rangle_1 &= -i\hbar \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{s}) \nabla_s [\Psi(\vec{r}_+, t) \Psi^*(\vec{r}_-, t)] d^3 s = \\ &= \frac{-i\hbar}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} d^3 p \int_{\mathbb{R}^3} \nabla_s [\Psi(\vec{r}_+, t) \Psi^*(\vec{r}_-, t)] d^3 s = \\ &= \frac{-i\hbar}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 p \left\{ e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} \Psi(\vec{r}_+, t) \Psi^*(\vec{r}_-, t) \Big|_{\pm\infty} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{r}_+, t) \Psi^*(\vec{r}_-, t) \nabla_s e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} d^3 s \right\}, \quad (2.33) \end{aligned}$$

$$|\Psi|^2 \langle \vec{p} \rangle_1 = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{p} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{r}_+, t) \Psi^*(\vec{r}_-, t) e^{-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{\hbar}} d^3 s \right] d^3 p.$$

Сравнивая выражения (2.31) и (2.33), получаем (2.30). Теорема 12 доказана.

Вид функции (2.30) полностью совпадает с известной функцией Вигнера (1.69) для когерентного состояния. Следует отметить, что функция Вигнера изначально была найдена феноменологическим способом. Здесь она получена на основе разложения Гельмгольца (2.29) из теоремы 12.

Знание выражений для волновых функций (2.15), (2.16) позволяет найти функции Вигнера. Волновой функции Ψ_E соответствует функция Вигнера (1.69), выражение для которой было получено выше — (1.135) и (1.167) —

$$\begin{aligned} W_E(\rho, z, \vec{p}) &= \\ &= \frac{\rho^2}{2\pi^4 \hbar^3 \sigma_r^2} e^{-\frac{\rho^2 + z^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \int_0^{2\pi} d\vec{\phi}_s \int_0^{+\infty} e^{-\rho^2 \frac{\rho_s'^2}{2\sigma_r^2} + i\chi(\rho, p_\rho, p_\phi, \vec{p}_s, \vec{\phi}_s)} \vec{p}_s d\vec{p}_s, \quad (2.34) \end{aligned}$$

которое удовлетворяет уравнению Моэля (1.68).

Для волновой функции Ψ_{EM} можно найти две функции квазиплотности вероятностей: функцию Вигнера W_{EM} (1.69) и калибровочно-инвариантную функцию Вейля–Стратоновича f_w (2.4). Функция W_{EM} может быть найдена в явном виде, действительно,

$$\begin{aligned} (2\pi\hbar)^3 (2\pi)^{3/2} \sigma_r^3 W_{EM} &= e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{s^2}{8\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{p}} d^3 s = \\ &= 8(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3 e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p^2}, \quad (2.35) \end{aligned}$$

$$W_{\text{ЕМ}}(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p^2\right). \quad (2.36)$$

Заметим, что функция $W_{\text{ЕМ}}$ не удовлетворяет уравнению Моэля (1.68), так как она соответствует электромагнитному уравнению Шрёдингера (2.18). В п. 2.2 построен аналог уравнения Моэля с электромагнитным взаимодействием.

Для построения функции f_w потребуется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть векторный потенциал имеет вид $q\vec{A}_1(\vec{r}) = -\frac{\hbar}{r \sin\theta} \vec{e}_\phi$ (2.19), тогда выражение для функции Вейля–Стратоновича f_w (2.4) системы (2.16) представимо как

$$f_w(\vec{r}, \vec{P}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{s^2}{8\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{P}} e^{i(\phi_+ - \phi_-)} d^3s, \quad (2.37)$$

где $\phi_\pm = \arctg \frac{y_\pm y_s/2}{x_\pm x_s/2}$, $\vec{s} = \{x_s, y_s, z_s\}$.

Доказательство леммы 2. Подставим выражение (2.16) в функцию (2.4), получим

$$(2\pi\hbar)^3 (2\pi)^{3/2} \sigma_r^3 f_w(\vec{r}, \vec{P}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{1}{4\sigma_r^2} \left[\left(\vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \right)^2 + \left(\vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right)^2 \right]} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{P}'} d^3s = e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{s^2}{8\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{P}'} d^3s, \quad (2.38)$$

где $\vec{P}' = \vec{P} + \frac{q}{2} \int_{-1}^1 \vec{A}\left(\vec{r} + \tau \frac{\vec{s}}{2}\right) d\tau$. Вычислим интеграл $\frac{\vec{s}}{2} q \int_{-1}^1 \vec{A}\left(\vec{r} + \tau \frac{\vec{s}}{2}\right) d\tau$ с полем (1.19):

$$\begin{aligned} \frac{\vec{s}}{2} q \int_{-1}^1 \vec{A}\left(\vec{r} + \tau \frac{\vec{s}}{2}\right) d\tau &= q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}') d\vec{r}' = \\ &= -\hbar \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \frac{1}{\rho'} \vec{e}_\phi d\vec{r}' = -\hbar \int_{\phi_-}^{\phi_+} d\phi' = -\hbar(\phi_+ - \phi_-), \end{aligned} \quad (2.39)$$

где $d\vec{r}' = \{d\rho', \rho' d\phi', dz'\}$, $\vec{r}_\pm = \vec{r} \pm \frac{\vec{s}}{2}$ и $\tg\phi_\pm = \frac{y \pm y_s/2}{x \pm x_s/2}$. При вычислении интеграла (2.39) предполагается интегрирование по контуру вне полюса $\rho = 0$. Из (2.39) следует, что

$$\vec{s} \cdot \vec{P}' = \vec{s} \cdot \vec{P} - \hbar(\phi_+ - \phi_-). \quad (2.40)$$

Лемма 2 доказана.

Используя лемму 2, докажем следующую теорему.

Теорема 13. *Функция Вейля–Стратоновича f_w для квантовой системы (2.18), (2.19) с электромагнитным взаимодействием совпадает с функцией Вигнера W_E (2.34) для квантовой системы (2.17), (2.19) с электрическим взаимодействием, т. е.*

$$f_w(\vec{r}, \vec{P}) = W_E(\rho, z, \vec{P}). \quad (2.41)$$

Доказательство теоремы 13. Запишем подынтегральное выражение (1.69) функции Вигнера $W_E(\vec{r}, \vec{p})$ для волновой функции (2.15), получим

$$\Psi_E^*(\vec{r}_-, t) \Psi_E(\vec{r}_+, t) = \frac{e^{i(\phi_+ - \phi_-)} - \frac{1}{2\sigma_r^2}(r^2 + \frac{z^2}{4})}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3}. \quad (2.42)$$

Азимутальные углы $\phi_{\pm}$ в соответствии с $\phi_{\pm} = \arctg \frac{y \pm y_s/2}{x \pm x_s/2}$ допускают представление

$$\begin{aligned} \sin \phi_{\pm} &= \frac{2y \pm y_s}{\sqrt{(2x \pm x_s)^2 + (2y \pm y_s)^2}} = \frac{\sin \phi \pm \rho'_s \sin \phi_s}{\sqrt{1 + \rho_s'^2 \pm 2\rho'_s \cos(\phi - \phi_s)}}, \\ \cos \phi_{\pm} &= \frac{2x \pm x_s}{\sqrt{(2x \pm x_s)^2 + (2y \pm y_s)^2}} = \frac{\cos \phi \pm \rho'_s \cos \phi_s}{\sqrt{1 + \rho_s'^2 \pm 2\rho'_s \cos(\phi - \phi_s)}}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

где $\rho'_s = \frac{\rho_s}{2\rho}$. При подстановке (2.42) в интеграл (2.4) получим выражение (2.41) (с заменой $\vec{p} \mapsto \vec{P}$) для функции $f_w(\vec{r}, \vec{P})$. Теорема 13 доказана.

Замечание 10. С физической точки зрения утверждение (2.41) теоремы 13 показывает «эквивалентность» двух квантовых систем (2.15) и (2.16), обладающих одинаковой функцией квазиплотности вероятностей (2.19). Данный результат является ожидаемым, так как обе системы получены из одних и тех же начальных распределений (2.13) и (2.14) в рамках формализма Вигнера–Власова. Разница между распределениями f_w и W_E состоит в замене канонического импульса $\vec{p}$ на кинетический импульс $\vec{P}$.

С математической точки зрения волновые функции (2.15), (2.16) и соответствующие уравнения Шрёдингера (2.17), (2.18) взаимосвязаны калибровочной инвариантностью. В действительности верно следующее:

$$\Psi_{EM}(\vec{r}, t) = \Psi_E(\vec{r}, t) \exp(-i\phi), \quad (2.44)$$

где

$$-\nabla_r \phi = -\frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_{\phi} = \frac{q}{\hbar} \vec{A}_1(\vec{r}), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (2.45)$$

Таким образом, для «квантовых систем» (или математических моделей), упомянутых ранее, можно сказать следующее. Первая «электро-

магнитная квантовая система» с потенциалами U_1/q , $\vec{A}_1(\vec{r})$ инвариантна относительно второй «системы, содержащей только электрическое поле» $U_1 - (\partial\phi/\partial t) = U_1$. Здесь следует еще раз отметить, что с физического точки зрения рассматривается только одна квантовая система, волновые функции которой удовлетворяют калибровочному преобразованию (2.44). Поскольку функция f_w обладает калибровочной инвариантностью, она имеет одинаковый вид (2.37) и (2.41) для обоих представлений (2.15) и (2.16).

Следствие 1. *Функция Вейля–Стратоновича для квантовой системы с электромагнитным взаимодействием f_w (2.4) имеет области отрицательных значений для волновой функции с распределением Гаусса (2.16).*

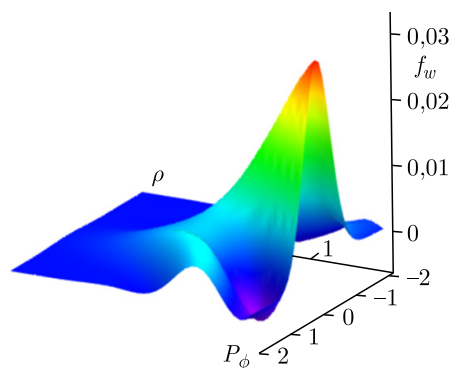


Рис. 12. Области отрицательных значений f_w

Как известно, функция Вигнера (1.69) является квази-плотностью вероятностей квантовой системы, так как имеет области отрицательных значений. Согласно теореме Хадсона и ее обобщению для 3D-систем только для волновой функции с распределением Гаусса функция Вигнера (1.69) является положительной. Выражение (2.34) для функции $f_w(\vec{r}, \vec{P}) = W_E(\rho, z, \vec{P})$ получено по волновой функции (2.16)

в виде распределения Гаусса, но функция f_w имеет области отрицательных значений (рис. 12). Области отрицательных значений функции W_E описаны в п. 1.6. На рис. 12 приведено распределение функции f_w в плоскости (ρ, P_ϕ) при $z = 0$, $P_\rho = P_z = 0$.

Следствие 2. *Волновая функция (2.15) является решением электромагнитного уравнения Шрёдингера*

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - q\vec{A}_3)^2 \Psi + U_1 \Psi, \quad q\vec{A}_3(\vec{r}) = \frac{\hbar}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi, \quad (2.46)$$

а связанная с ней функция Вейля–Стратоновича f_w положительна во всей фазовой области и имеет вид

$$f_w(r, P) = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2\right). \quad (2.47)$$

Доказательство следствия 2. Вычислим выражение (2.4) для функции (2.15), получим

$$f_w(\vec{r}, \vec{P}, t) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}}}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{s^2}{8\sigma_r^2} - \frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{P}} d^3 s = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2}, \quad (2.48)$$

где учтены выражения (2.15), (2.46), (2.39), (2.42). Проверим, что волновая функция (2.15) удовлетворяет уравнению Шрёдингера (2.46). Действительно, воспользуемся выражением (2.22) для потенциала U_1 , в котором знак векторного потенциала (2.46) не имеет значения. Квантовый потенциал получается из выражения (2.24). Следствие 2 доказано.

Заметим, что магнитное поле квантовой системы (2.46) отличается от магнитного поля системы (2.19) только знаком.

Следствие 2 является аналогом теоремы Хадсона для функции Вейля–Стратоновича f_w . В отличие от обычной функции Вигнера W (1.69), которая положительна только для распределения Гаусса, функция f_w (2.4) положительна для электромагнитной системы (2.46), описываемой негауссовой волновой функцией (2.15). Согласно следствию 1 функция f_w имеет отрицательные области для гауссовой волновой функции.

Если функцию f_w можно представить в виде функции Вигнера W_{new} , то очевидно, что вопрос о положительности функции f_w сводится к вопросу о положительности функции W_{new} со следующим выражением под знаком интеграла:

$$W_{\text{new}}(\vec{r}, \vec{P}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{P}} \rho_{\text{new}}(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) d^3 s = f_w(\vec{r}, \vec{P}, t), \quad (2.49)$$

$$\rho_{\text{new}}(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) = \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) \exp \left[-i \frac{q}{\hbar} \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}' \right], \quad (2.50)$$

$$\rho_{\text{new}}(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) = \Psi_{\text{new}}^*(\vec{r}_-, t) \Psi_{\text{new}}(\vec{r}_+, t),$$

$$\rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) = \Psi^*(\vec{r}_-, t) \Psi(\vec{r}_+, t),$$

где интегрирование в (2.50) производится вдоль прямой, соединяющей точки $\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \pm \vec{s}/2$. Согласно теореме Хадсона и ее обобщению на трехмерный случай величина (2.50) должна иметь вид распределения Гаусса. Поскольку положительная функция Вигнера (1.69) имеет тот же вид, что и (2.47), выражение $\rho_{\text{new}}(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t)$ также должно подчиняться распределению Гаусса (преобразование фурье-функции Гаусса само является функцией Гаусса). Выражения (2.15) и (2.47) сводятся к распределению Гаусса (следствие 2). Напомним, что квантовая система (2.46) является частным случаем Ψ -модели.

Вычислим средние значения импульсов $\langle \vec{p} \rangle_1$ и $\langle \vec{P} \rangle_1$ по функциям f_w и $W_{\text{ЕМ}}$. В п. 1.6 было найдено $\langle \vec{p} \rangle_1$ по функции W_E (1.180):

$$\langle \vec{p} \rangle_1(\vec{r}) = \frac{1}{|\Psi_E|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{p} W_E(\vec{r}, \vec{p}) d^3 p = -q \vec{A}_1(\vec{r}) = \langle \vec{p}_c \rangle_1(\vec{r}). \quad (2.51)$$

Из (2.51) и теоремы 13 (2.41) следует, что

$$\langle \vec{P} \rangle_1(\vec{r}) = \frac{1}{|\Psi_{\text{ЕМ}}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{P} f_w(\vec{r}, \vec{P}) d^3 P = \frac{1}{|\Psi_E|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{P} W_E(\vec{r}, \vec{P}) d^3 P = \langle \vec{p}_c \rangle_1(\vec{r}). \quad (2.52)$$

В работах [40, 41] кинетический импульс $\vec{P}$ представляется как $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$, следовательно, $\langle \vec{P} \rangle_1 = \langle \vec{p} \rangle_1 - q\vec{A} = -q\vec{A}$, отсюда $\langle \vec{p} \rangle_1 = 0$. Аналогичный результат $\langle \vec{p} \rangle_1 = 0$ получается при усреднении по функции $W_{\text{ЕМ}}$:

$$\langle \vec{p} \rangle_1(\vec{r}) = \frac{1}{|\Psi_{\text{ЕМ}}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{p} W_{\text{ЕМ}}(\vec{r}, \vec{p}) d^3 p = 0. \quad (2.53)$$

Следовательно, для системы с электромагнитным взаимодействием средний кинетический импульс определяется величиной $\langle \vec{P} \rangle_1$, а для системы только с электрическим взаимодействием — $\langle \vec{p} \rangle_1$, и оба этих значения совпадают с точным значением $\langle \vec{p}_c \rangle_1$ (2.14). У электромагнитной системы (2.16) вихревое поле (2.14) вызвано векторным потенциалом $\langle \vec{P} \rangle_1 = -q\vec{A}_1$, а потенциальная часть является безвихревой ($\langle \vec{p} \rangle_1 = 0$). У системы (2.15) магнитное поле отсутствует: $\vec{A} = \vec{\theta}$, поэтому вихревое поле (2.14) определяется потенциальной частью $\nabla_r \varphi$ (фазой волновой функции), т. е. $\langle \vec{p} \rangle_1 = \frac{\hbar}{\rho} \vec{e}_\phi$.

Заметим, что усреднение $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$ по функции $W_{\text{ЕМ}}$ дает корректный результат:

$$\begin{aligned} \langle \vec{P} \rangle_1(\vec{r}) &= \\ &= \frac{1}{|\Psi_{\text{ЕМ}}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{P} W_{\text{ЕМ}}(\vec{r}, \vec{p}) d^3 p = \frac{1}{|\Psi_{\text{ЕМ}}|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{p} W_{\text{ЕМ}}(\vec{r}, \vec{p}) d^3 p - q\vec{A}_1 = -q\vec{A}_1. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Вычислим энергию основного состояния E (2.19). Для обеих функций f_w и $W_{\text{ЕМ}}$ будем усреднять выражение $\mathcal{E}(\vec{r}, \vec{P}) = \frac{P^2}{2m} + U_1(\vec{r})$. Произведем непосредственные вычисления. Начнем с усреднения по функции $W_{\text{ЕМ}}$, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{W_{\text{EM}}} \rangle_0 &= \frac{1}{2m (\pi \hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} d^3 r \int_{\mathbb{R}^3} \left(p^2 - 2q\vec{p} \cdot \vec{A}_1 + q^2 |\vec{A}_1|^2 \right) e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} p^2} d^3 p + \\ &+ \frac{(2\pi)^{3/2}}{(\pi \hbar)^3} \frac{\hbar^3}{8\sigma_r^3} \frac{\hbar^2}{8m\sigma_r^4} \int_{\mathbb{R}^3} \left(r^2 - \frac{4\sigma_r^4}{r^2 \sin^2 \theta} \right) e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} d^3 r = I_{\text{EM}}^{(T)} + I_{\text{EM}}^{(U)}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Найдем по отдельности интегралы $I_{\text{EM}}^{(T)}$ и $I_{\text{EM}}^{(U)}$. Для кинетического интеграла $I_{\text{EM}}^{(T)}$ получим

$$I_{\text{EM}}^{(T)} = \frac{3\hbar^2}{8m\sigma_r^2} + \frac{\hbar^2}{2m\sigma_r^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin \theta}. \quad (2.56)$$

Интеграл $I_{\text{EM}}^{(U)}$, соответствующий потенциальной энергии, примет вид

$$I_{\text{EM}}^{(U)} = \frac{3\hbar^2}{8m\sigma_r^2} - \frac{\hbar^2}{2m\sigma_r^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin \theta}. \quad (2.57)$$

Подставляя выражения (2.56) и (2.57) в (2.55), получим

$$\langle \mathcal{E}_{W_{\text{EM}}} \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{P^2}{2m} + U \right) W_{\text{EM}} d^3 r d^3 p = \frac{3\hbar^2}{4m\sigma_r^2}. \quad (2.58)$$

Произведем усреднение по функции f_w :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E}_{f_w} \rangle_0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{P^2}{2m} + U \right) f_w d^3 r d^3 P = \\ &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} d^3 r \int_{\mathbb{R}^3} P^2 f_w d^3 P + \int_{\mathbb{R}^3} U d^3 r \int_{\mathbb{R}^3} f_w d^3 P = I_{f_w}^{(T)} + I_{f_w}^{(U)}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Для вычисления интеграла $I_{f_w}^{(T)}$ воспользуемся результатом теоремы 9, в которой найдены диагональные элементы тензора давления (1.182) для распределения W_E (1.135). Согласно теореме 13 справедлив переход $f_w(\vec{r}, \vec{P}) = W_E(\rho, z, \vec{P})$, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^3} (P_\alpha - \langle P_\alpha \rangle_1)^2 f_w d^3 P = f^1(\vec{r}) \frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2}, \quad (2.60)$$

отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} P_\alpha^2 f_w d^3 P &= \int_{\mathbb{R}^3} (P_\alpha - \langle P_\alpha \rangle_1)^2 f_w d^3 P + f^1(\vec{r}) |\langle P_\alpha \rangle_1|^2 = \\ &= f^1(\vec{r}) \left[\frac{\hbar^2}{4\sigma_r^2} + q^2 A_\alpha^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.61)$$

С учетом выражения (2.61) интеграл $I_{f_w}^{(T)}$ примет вид

$$\begin{aligned}
 I_{f_w}^{(T)} &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \int_{\mathbb{R}^3} P^2 f_w d^3P = \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r \int_{\mathbb{R}^3} P^2 f_w d^3P = \\
 &= \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} f^1(\vec{r}) \left(\frac{3\hbar^2}{4\sigma_r^2} + q^2 |\vec{A}_1|^2 \right) d^3r = \\
 &= \frac{1}{2m} \frac{3\hbar^2}{4\sigma_r^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin \theta} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2}} dr, \\
 I_{f_w}^{(T)} &= \frac{3\hbar^2}{8m\sigma_r^2} + \frac{\hbar^2}{2m\sigma_r^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin \theta}.
 \end{aligned} \tag{2.62}$$

Выражение для интеграла $I_{f_w}^{(U)}$ полностью совпадает с $I_{\text{ЕМ}}^{(U)}$. Действительно,

$$I_{f_w}^{(U)} = \frac{\hbar^2}{8m\sigma_r^4} \int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{r}) \left(r^2 - \frac{4\sigma_r^4}{r^2 \sin^2 \theta} \right) d^3r = I_{\text{ЕМ}}^{(U)}. \tag{2.63}$$

Подставляя (2.62) и (2.63) в выражение (2.59), получим

$$\langle \mathcal{E}_{f_w} \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{P^2}{2m} + U \right) f_w d^3r d^3P = \frac{3\hbar^2}{4m\sigma_r^2}. \tag{2.64}$$

Окончательно из выражений (2.58) и (2.64) следует равенство энергий

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{E}_{W_{\text{ЕМ}}} \rangle_0 &= \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + U_1 \right] W_{\text{ЕМ}}(\vec{r}, \vec{p}) d^3r d^3p = \\
 &= \langle \mathcal{E}_{f_w} \rangle_0 = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{P^2}{2m} + U_1 \right) f_w(\vec{r}, \vec{P}) d^3r d^3P = E = \frac{3\hbar^2}{4m\sigma_r^2}.
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Из выражения (2.65) следует, что энергия $\mathcal{E}$, усредненная $\langle \mathcal{E} \rangle_0$ по обеим функциям f_w и $W_{\text{ЕМ}}$, имеет одно и то же значение, совпадающее с энергией квантовой системы E (2.19) в основном состоянии.

Следует отметить, что результаты (2.52)–(2.54) можно распространить на общий случай функций $f_w(\vec{r}, \vec{P})$ и $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$. Сформулируем следующую лемму.

Лемма 3. Среднее поле кинетического импульса $\langle \vec{P} \rangle_1$, вычисленное с помощью функций квазиплотности вероятностей — $f_w(\vec{r}, \vec{P}, t)$ или

$W(\vec{r}, \vec{p}, t)$, может быть представлено в виде разложения Гельмгольца (1.126):

$$\langle \vec{P} \rangle_1(\vec{r}, t) = \frac{1}{|\Psi|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{P} f_w(\vec{r}, \vec{P}, t) d^3 P = \frac{1}{|\Psi|^2} \int_{\mathbb{R}^3} \vec{P} W(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 p = \frac{\hbar}{2} \nabla_r \Phi - q \vec{A} \quad (2.66)$$

или

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = |\Psi|^2 \langle \vec{P} \rangle_1 = -\frac{i\hbar}{2} (\Psi^* \nabla_r \Psi - \Psi \nabla_r \Psi^*) - q \Psi^* \vec{A} \Psi, \quad (2.67)$$

где $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$.

Доказательство леммы 3. Учитывая выражение (2.31) и представление

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{P}} \vec{P} d^3 P = i\hbar \nabla_s \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{P}} d^3 P = i\hbar (2\pi\hbar)^3 \nabla_s \delta(\vec{s}),$$

получим

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 \langle \vec{P} \rangle_{1,2} &= i\hbar \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}') d\vec{r}'\right) \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) \nabla_s \delta(\vec{s}) d^3 s = \\ &= -i\hbar \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\vec{s}) \nabla_s \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}') d\vec{r}'\right) \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) \right] d^3 s, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где интеграл $\int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}') d\vec{r}'$ вычисляется вдоль прямой, соединяющей точки $\vec{r}_{\pm}$. Преобразуем подынтегральное выражение (2.68):

$$\begin{aligned} \nabla_s \left[\exp\left(-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}'\right) \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) \right] &= \\ &= \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) \nabla_s e^{-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}'} + e^{-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}'} \nabla_s \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) = \\ &= -\frac{i}{2\hbar} q \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) e^{-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}'} \nabla_s \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}' + \\ &+ \frac{1}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}_-}^{\vec{r}_+} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}'} \left[\Psi^*(\vec{r}_-, t) \nabla_{r_+} \Psi(\vec{r}_+, t) - \Psi(\vec{r}_+, t) \nabla_{r_-} \Psi^*(\vec{r}_-, t) \right]. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Подставляя (2.69) в (2.68), получим

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 \langle \vec{P} \rangle_1 &= -\frac{\hbar}{2\hbar} q \left[\vec{A}(\vec{r}, t) + \vec{A}(\vec{r}, t) \right] \rho(\vec{r}, \vec{r}, t) e^{-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}'} - \\ &\quad - \frac{i\hbar}{2} e^{-\frac{i}{\hbar} q \int_{\vec{r}}^{\vec{r}'} \vec{A}(\vec{r}', t) d\vec{r}'} [\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla_r \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \nabla_r \Psi^*(\vec{r}, t)], \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$|\Psi|^2 \langle \vec{P} \rangle_1 = \frac{i}{\hbar} q \vec{A} |\Psi|^2 - \frac{i\hbar}{2} [\Psi^* \nabla_r \Psi - \Psi \nabla_r \Psi^*]$$

или

$$\langle \vec{P} \rangle_1 = -\frac{i\hbar}{2} \nabla_r \ln \frac{\Psi}{\Psi^*} - q \vec{A}. \quad (2.71)$$

Аналогично для функции W получаем

$$\begin{aligned} |\Psi|^2 \langle \vec{p} \rangle_1 &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \vec{p}} \vec{p} d^3 p \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\vec{r}_+, \vec{r}_-, t) d^3 s = \\ &= -\frac{i\hbar}{2} [\Psi^*(\vec{r}, t) \nabla_r \Psi(\vec{r}, t) - \Psi(\vec{r}, t) \nabla_r \Psi^*(\vec{r}, t)], \quad (2.72) \\ \langle \vec{p} \rangle_1 &= -\frac{i\hbar}{2} \left[\frac{\nabla_r \Psi}{\Psi} - \frac{\nabla_r \Psi^*}{\Psi^*} \right], \quad \langle \vec{P} \rangle_1 = \langle \vec{p} \rangle_1 - q \vec{A}. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Сравним импульсные представления для квантовых систем (2.15), (2.16) и (2.27). Известно, что для функции Вигнера (1.69) справедливы следующие выражения:

$$\int_{\mathbb{R}^3} W(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 p = |\Psi(\vec{r}, t)|^2, \quad \int_{\mathbb{R}^3} W(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 r = \left| \tilde{\Psi}(\vec{p}, t) \right|^2, \quad (2.73)$$

где $\tilde{\Psi}$ — импульсное представление волновой функции ($\tilde{\Psi} = \mathcal{F}[\Psi]$ — преобразование Фурье волновой функции Ψ). Будут ли справедливы выражения (2.73) для функции $f_w(\vec{r}, \vec{P})$?

Следствие 3. Для квантовых систем (2.16) и (2.25), (2.27) функция $f_w(\vec{r}, \vec{P})$ обладает следующими свойствами:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_w(\vec{r}, \vec{P}, t) d^3 P = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \quad (2.74)$$

для произвольного векторного потенциала $\vec{A}$. Плотность вероятностей импульса для $\vec{A}_1$ (2.19) и $\vec{A}_2$ (2.25) соответственно имеет следующий вид:

$$F_w(\vec{P}) = \int_{\mathbb{R}^3} f_w(\vec{r}, \vec{P}) d^3 r,$$

$$F_w^1(\vec{P}) = \left| \tilde{\Psi}_E \right|^2 = \frac{32\sigma_r^5}{\pi(2\pi)^{3/2}\hbar^5} P_\rho^2 e^{-2\frac{\sigma_r^2}{\hbar^2} P_z^2} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{\sigma_r^2}{\hbar^2} P_\rho^2 \cos^2 \phi} \cos^2 \phi d\phi \right)^2, \quad (2.75)$$

$$F_w^2(\vec{P}) = \frac{2\sigma_r^2 e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2}}{\pi^2 \hbar^3 (1+\eta^2)} \left[\sigma_r \sqrt{2\pi} - \frac{4\sigma_r^2 \eta P_\rho}{\hbar \sqrt{1+\eta^2}} \int_0^{\pi/2} e^{\frac{2\sigma_r^2 \eta^2 P_\rho^2 \sin^2 \phi}{\hbar^2 (1+\eta^2)}} \times \right. \\ \left. \times \operatorname{erf} \left(-\frac{\sigma_r \sqrt{2} \eta P_\rho}{\hbar \sqrt{1+\eta^2}} \sin \phi \right) \sin \phi d\phi \right], \quad (2.76)$$

при этом

$$F_w(\vec{P}) \neq \left| \tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}(\vec{P}) \right|^2 = \left(\frac{\sigma_r \sqrt{2\pi}}{\pi \hbar} \right)^3 e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2} = F(\vec{P}). \quad (2.77)$$

Доказательство следствия 3. Справедливость условия (2.74) напрямую следует из непосредственного интегрирования по пространству импульсов:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_w(\vec{r}, \vec{P}, t) d^3 P = \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}_-, t) \Psi(\vec{r}_+, t) e^{-\frac{iq}{2\hbar} \int_{-1}^1 \vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{r} + \vec{s} \frac{\tau}{2}, t) d\tau} d^3 s \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\frac{\vec{P} \cdot \vec{s}}{\hbar}} d^3 P = \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(s) \Psi^*(\vec{r}_-, t) \Psi(\vec{r}_+, t) e^{-\frac{iq}{2\hbar} \int_{-1}^1 \vec{s} \cdot \vec{A}(\vec{r} + \vec{s} \frac{\tau}{2}, t) d\tau} d^3 s = |\Psi(\vec{r}, t)|^2. \quad (2.78)$$

Для векторного потенциала $\vec{A}_1$ выполнено условие (2.39), следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_w(\vec{r}, \vec{P}) d^3 r = \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{\text{ЕМ}}(\vec{r}_+, t) e^{i\phi} e^{-i\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}_+}{\hbar}} d^3 r_+ \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{\text{ЕМ}}^*(\vec{r}_-, t) e^{-i\phi} e^{i\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}_-}{\hbar}} d^3 r_- = \\ = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_E(\vec{r}_+, t) e^{-i\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}_+}{\hbar}} d^3 r_+ \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_E^*(\vec{r}_-, t) e^{i\frac{\vec{P} \cdot \vec{r}_-}{\hbar}} d^3 r_- = \\ = \tilde{\Psi}_E(\vec{P}, t) \tilde{\Psi}_E^*(\vec{P}, t) = \left| \tilde{\Psi}_E \right|^2, \quad (2.79)$$

где учтено условие калибровки (2.44). Найдем импульсную волновую функцию $\tilde{\Psi}_E$

$$\begin{aligned} (2\pi\hbar)^{3/2} \tilde{\Psi}_E(\vec{p}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_E(\vec{r}, t) e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d^3r = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \Psi_{\text{EM}}(\vec{r}, t) e^{i\phi} e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d^3r = \frac{e^{-i\frac{E}{\hbar}t} I(\vec{p})}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}}, \quad (2.80) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(\vec{p}) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{r^2}{4\sigma_r^2}} e^{i\phi} e^{-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}} d^3r = 2\sigma_r \sqrt{\pi} e^{-\frac{\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} e^{i\phi_p} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \times \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} e^{-[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi']^2} \rho \cos \phi' d\rho, \quad (2.81) \end{aligned}$$

где учтено, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{\rho p_\rho}{\hbar} \cos(\phi - \phi_p)} \sin \phi d\phi &= \sin \phi_p \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{\rho p_\rho}{\hbar} \cos \phi'} \cos \phi' d\phi', \\ \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{\rho p_\rho}{\hbar} \cos(\phi - \phi_p)} \cos \phi d\phi &= \cos \phi_p \int_0^{2\pi} e^{-i\frac{\rho p_\rho}{\hbar} \cos \phi'} \cos \phi' d\phi'. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл в выражении (2.81), разбив промежуток интегрирования на два интервала $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \int_0^{+\infty} e^{-[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi']^2} \rho \cos \phi' d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \int_0^{+\infty} e^{-[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi']^2} \rho \cos \phi' d\rho + \\ &\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \int_0^{-\infty} e^{-[\frac{\rho'}{2\sigma_r} - i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi']^2} \rho' \cos \phi' d\rho', \end{aligned}$$

где $\rho = -\rho'$,

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \int_0^{+\infty} e^{-[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi']^2} \rho \cos \phi' d\rho +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\pi/2}^0 e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi''} d\phi' \int_0^{-\infty} e^{-\left[\frac{\rho'}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi'\right]^2} \rho' \cos \phi'' d\rho' = \\
& = \int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \int_0^{+\infty} e^{-\left[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi'\right]^2} \rho \cos \phi' d\rho + \quad (2.82) \\
& + \int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi''} d\phi'' \int_{-\infty}^0 e^{-\left[\frac{\rho'}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi''\right]^2} \rho' \cos \phi'' d\rho', \\
I_1 & = \int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi'\right]^2} \rho \cos \phi' d\rho
\end{aligned}$$

с заменой $\phi'' = \pi - \phi'$. Аналогично для I_2 получаем

$$\begin{aligned}
I_2 & = \int_{-\pi}^0 e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} d\phi' \int_0^{+\infty} e^{-\left[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi'\right]^2} \rho \cos \phi' d\rho = \\
& = \int_0^{\pi} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi''} d\phi'' \int_0^{+\infty} e^{-\left[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi''\right]^2} \rho \cos \phi'' d\rho, \quad (2.83)
\end{aligned}$$

где $\phi'' = -\phi'$. Подставляя (2.82) и (2.83) в (2.81), приходим к выражению

$$I = -ie^{i\phi_p} \frac{16\pi\sigma_r^4}{\hbar} p_\rho e^{-\frac{\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} \cos^2 \phi' d\phi', \quad (2.84)$$

в котором учтено свойство среднего значения распределения Гаусса:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{\rho}{2\sigma_r} + i\sigma_r \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi'\right]^2} \rho d\rho = -i4\sqrt{\pi} \sigma_r^3 \frac{p_\rho}{\hbar} \cos \phi'.$$

Для выражений (2.84) и (2.80) получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_E(p, t) & = -ie^{i\phi_p} \frac{16\pi\sigma_r^4}{\hbar} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \frac{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}{(2\pi)^{3/4} \sigma_r^{3/2}} p_\rho e^{-\frac{\sigma_r^2}{\hbar^2} p_z^2} \times \\
& \times \int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{p_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} \cos^2 \phi' d\phi',
\end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_w d^3 P = |\tilde{\Psi}_E|^2 = \frac{32\sigma_r^5}{\pi(2\pi)^{3/2} \hbar^5} P_\rho^2 e^{-2\frac{\sigma_r^2}{\hbar^2} P_z^2} \times \\ \times \left(\int_0^{\pi/2} e^{-\sigma_r^2 \frac{P_\rho^2}{\hbar^2} \cos^2 \phi'} \cos^2 \phi' d\phi' \right)^2. \quad (2.85)$$

Заметим, что импульсное представление $\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}$ имеет форму распределения Гаусса

$$|\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}|^2 = \left(\frac{\sigma_r \sqrt{2\pi}}{\pi \hbar} \right)^3 e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2} \quad (2.86)$$

и не совпадает с распределением (2.85). Для векторного потенциала $\vec{A}_2$ справедливо следующее выражение:

$$\frac{q}{2} \int_{-1}^1 \vec{s} \cdot \vec{A}_2 \left(\vec{r} + \tau \frac{\vec{s}}{2} \right) d\tau = q\vec{s} \cdot \vec{A}_2(\vec{r}). \quad (2.87)$$

Используя выражение (2.87), найдем функцию $f_w(\vec{r}, \vec{P})$, соответствующую волновой функции $\Psi_{\text{ЕМ}}$:

$$(2\pi\hbar)^3 f_w(\vec{r}, \vec{P}) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} [\vec{P} + q\vec{A}_2(\vec{r})]^2}}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-\frac{1}{2\sigma_r^2} \left(\frac{\vec{s}}{2} + i2\frac{\sigma_r^2}{\hbar} [\vec{P} + q\vec{A}_2(\vec{r})] \right)^2} d^3 s, \quad (2.88)$$

$$f_w(\vec{r}, \vec{P}) = \frac{1}{(\pi\hbar)^3} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_r^2} - \frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} [\vec{P} + q\vec{A}_2(\vec{r})]^2}.$$

Для импульсного представления получаем

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_w(\vec{r}, \vec{P}) d^3 r = \frac{\sigma_r \sqrt{2\pi}}{(\pi\hbar)^3} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2} \int_0^{2\pi} d\phi' \times \\ \times \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{1}{2\sigma_r^2} + \frac{2q^2\sigma_r^2 c_0^2}{\hbar^2} \right) \rho'^2 - \frac{4qc_0\sigma_r^2}{\hbar^2} P_\rho \sin(\phi' - \phi_P) \rho'} \rho' d\rho' = \\ = \frac{\sigma_r \sqrt{2\pi}}{(\pi\hbar)^3 c_1^2} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2} \int_0^{2\pi} e^{\frac{c_2^2}{2\sigma_r^2 c_1^2} P_\rho^2 \sin^2 \phi''} d\phi'' \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_r^2} (\rho'' + \frac{c_2}{c_1} P_\rho \sin \phi'')^2} \rho'' d\rho'', \quad (2.89)$$

где

$$c_0 = -\frac{\hbar\eta}{2q\sigma_r^2}, \quad c_1^2 = 1 + \frac{4q^2\sigma_r^4 c_0^2}{\hbar^2}, \quad c_2 = \frac{4qc_0\sigma_r^4}{\hbar^2}, \quad \rho'' = c_1\rho'. \quad (2.90)$$

Вычислим следующий интеграл:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma_r^2}(\rho''+\lambda)^2} \rho'' d\rho'' = \sigma_r^2 e^{-\frac{\lambda^2}{2\sigma_r^2}} - \lambda \sigma_r \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda}{\sigma_r \sqrt{2}}\right), \quad (2.91)$$

где $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Подставляя (2.91) в (2.89), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f_w(\vec{r}, \vec{P}) d^3 r &= \frac{\sigma_r \sqrt{2\pi}}{(\pi \hbar)^3 c_1^2} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2} \int_0^{2\pi} e^{\frac{c_2^2 P_\rho^2 \sin^2 \phi''}{2\sigma_r^2 c_1^2}} d\phi'' \times \\ &\times \left(\sigma_r^2 e^{-\frac{c_2^2 P_\rho^2 \sin^2 \phi''}{2c_1^2 \sigma_r^2}} - \frac{c_2 \sigma_r}{c_1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{c_2 P_\rho \sin \phi''}{c_1 \sigma_r \sqrt{2}}\right) P_\rho \sin \phi'' \right) = \\ &= \frac{\sigma_r^3 (2\pi)^{3/2}}{(\pi \hbar)^3 c_1^2} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2} + \frac{4\sigma_r^2 c_2}{\pi^2 \hbar^3 c_1^3} e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2} P_\rho \times \\ &\times \int_0^{\pi/2} e^{\frac{c_2^2 P_\rho^2 \sin^2 \phi''}{2\sigma_r^2 c_1^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{c_2 P_\rho \sin \phi''}{c_1 \sigma_r \sqrt{2}}\right) \sin \phi'' d\phi''. \quad (2.92) \end{aligned}$$

Свойство периодичности подынтегральной функции позволяет переписать интеграл (2.92):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\frac{c_2^2}{2\sigma_r^2 c_1^2} P_\rho^2 \sin^2 \phi''} \operatorname{erfc}\left(\frac{c_2 P_\rho \sin \phi''}{c_1 \sigma_r \sqrt{2}}\right) \sin \phi'' d\phi'' &= \\ &= -4 \int_0^{\pi/2} e^{\frac{c_2^2}{2\sigma_r^2 c_1^2} P_\rho^2 \sin^2 \phi''} \operatorname{erf}\left(\frac{c_2 P_\rho \sin \phi''}{c_1 \sigma_r \sqrt{2}}\right) \sin \phi'' d\phi''. \end{aligned}$$

Преобразуем коэффициенты $c_1^2 = 1 + \eta^2$, $\frac{c_2}{c_1} = -\frac{2\sigma_r^2 \eta}{\hbar \sqrt{1 + \eta^2}}$ (2.90). В результате выражение (2.92) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f_w d^3 r &= \frac{2\sigma_r^2 e^{-\frac{2\sigma_r^2}{\hbar^2} P^2}}{\pi^2 \hbar^3 (1 + \eta^2)} \left[\sigma_r \sqrt{2\pi} - \right. \\ &\left. - \frac{4\sigma_r^2 \eta}{\hbar \sqrt{1 + \eta^2}} P_\rho \int_0^{\pi/2} e^{\frac{2\sigma_r^2 \eta^2 P_\rho^2 \sin^2 \phi}{\hbar^2 (1 + \eta^2)}} \operatorname{erf}\left(-\frac{\sigma_r \eta \sqrt{2}}{\hbar \sqrt{1 + \eta^2}} P_\rho \sin \phi\right) \sin \phi d\phi \right]. \end{aligned}$$

Следствие 3 доказано.

Таким образом, функция f_w удовлетворяет (2.74) и в общем случае выполнено условие $\int_{\mathbb{R}^3} f_w d^3r \neq |\tilde{\Psi}|^2$.

Волновая функция $\Psi_{\text{ЕМ}}$ (2.16) одинакова для обеих квантовых систем с векторными потенциалами $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$. Импульсное представление $\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}$ (2.77) волновой функции (2.16) также одинаково для обеих квантовых систем. Следовательно, плотность вероятностей $|\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}|^2$ (2.77) одинакова для обеих систем. Такая же плотность вероятностей получается из функции Вигнера W (1.69) согласно (2.73).

Функция Вигнера (1.69) не содержит явной зависимости от векторного потенциала $\vec{A}$ и определяется только волновой функцией. Если волновая функция $\Psi_{\text{ЕМ}}$ одинакова, то и функция W одинакова для двух систем.

Заметим, что квантовые системы, рассматриваемые в следствии 3, не являются калибровочно-инвариантными. Поэтому им соответствуют разные функции f_w и разные распределения импульсов (2.75), (2.76). В то же время система с потенциалами $\vec{A} = \vec{\theta}$, U_1/q калибровочно-инвариантна системе с потенциалами $\vec{A}_1$, U_1/q (см. (2.44), (2.45)), что подтверждается равенством (2.75) $F_w^1(\vec{P}) = |\tilde{\Psi}_E|^2$.

На рис. 13 представлены плотности распределения импульса (2.75) и $|\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}|^2$ в плоскости $P_z = 0$. На рис. 13, а показано распределение (2.75) системы с векторным потенциалом $\vec{A}_1$, а на рис. 13, б — $|\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}|^2$ -распределение. Из сравнения распределений на рис. 13 видно их существенное различие.

На рис. 14 приведены распределения вдоль аксиальной оси P_z и радиальной оси P_ρ . Красные кривые (1, 3) соответствуют радиальному (ρ) распределению, а синие кривые (2, 4) — продольному (z) распределению. Распределение (2.76) для векторного потенциала $\vec{A}_2$ представлено

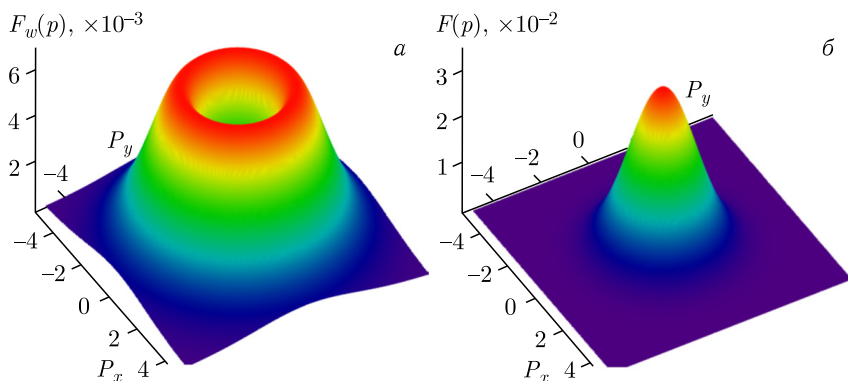


Рис. 13. Импульсное распределение для системы с потенциалом $\vec{A}_1$

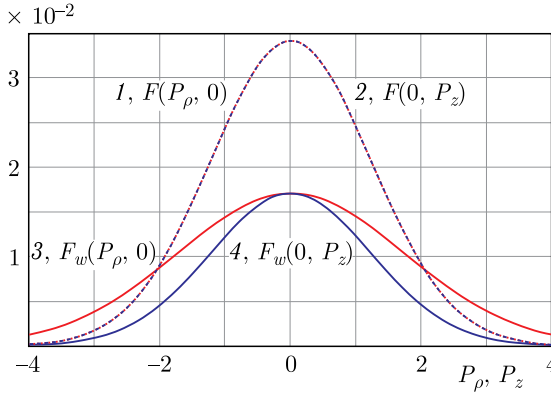


Рис. 14 (цветной в электронной версии). Импульсное распределение для системы с потенциалом $\vec{A}_2$

сплошными линиями (3, 4), а распределение $|\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}|^2$ — пунктирными линиями (1, 2). Распределение (2.77) симметрично вдоль P_ρ и P_z , поэтому красная (1) и синяя (2) пунктирные линии на рис. 14 полностью совпадают. Распределение (2.76) несимметрично, поэтому красные (3) и синие (4) сплошные линии на рис. 14 различаются. Если сравнить распределения (2.76) и (2.77) на рис. 14, то будет хорошо видно их существенное различие, что согласуется с неравенством (2.77).

Заметим, что распределение $|\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}|^2$ соответствует каноническому оператору импульса $\hat{p}$ (1.126), а распределения (2.75) и (2.76) построены по функции f_w . Может возникнуть вопрос: какое распределение является физически разумным? Функция Вигнера (1.69) получена феноменологически, но удовлетворяет соотношениям (2.73). Функция f_w (2.4) выведена на основе W , но удовлетворяет условиям (2.74), (2.77). Возможно ли, что оператор кинетического импульса $\hat{P} = \hat{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)$ обладает собственными функциями $\psi : \hat{P}\psi = \vec{\lambda}\psi$, по которым следует разложить волновую функцию $\Psi_{\text{ЕМ}}$? В результате можно ли получить функцию $\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}(\vec{P}, t)$, для которой выполнено $|\tilde{\Psi}_{\text{ЕМ}}|^2 = \int f_w d^3r$? Строя функции ψ , получаем

$$\begin{aligned}\hat{P}\psi &= -i\hbar\nabla_r\psi - q\vec{A}(\vec{r}, t)\psi = \vec{\lambda}\psi, \\ \vec{\lambda} &= -i\hbar\nabla_r\ln\psi - q\vec{A}(\vec{r}, t),\end{aligned}\tag{2.93}$$

где $\vec{\lambda}$ не зависит от $\vec{r}$. Выражение (2.93) совпадает с разложением Гельмгольца (1.126). Поле $q\vec{A}(\vec{r}, t)$ является вихревым, а поле $-i\hbar\nabla_r\ln\psi$ — потенциальным. Вихревые и потенциальные поля не могут компенсировать друг друга и создать постоянное поле $\vec{\lambda}$, не зависящее от $\vec{r}$. Такая «компенсация» возможна в частных случаях для негладких потенциалов, например (2.45).

Из сравнения (2.93) и разложения Гельмгольца (1.126) следует решение

$$\vec{\lambda} = m \langle \vec{v} \rangle_1 = \langle \vec{p} \rangle_1 (\vec{r}, t), \quad \psi(\vec{r}, t) = \exp[i\varphi(\vec{r}, t)]. \quad (2.94)$$

В частном случае при $\vec{A} = \vec{\theta}$ фаза (действие) $\hbar\varphi$ может быть выбрана как

$$\hbar\varphi(\vec{r}, t) = \vec{r} \cdot \vec{p} - Et,$$

т. е. собственные функции (2.94) будут соответствовать собственным функциям $\psi = \exp\left(i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}\right)$ канонического оператора импульса $\hat{p}$.

2.2. Электромагнитная аппроксимация Власова–Моэля. В работах [37–41, 85, 89–91] получены аналоги уравнений Моэля для функций Вигнера (1.69) и Вейля–Стратоновича (2.4) с учетом электромагнитного поля. Полученные уравнения эволюции функции Вигнера имеют вид, не совпадающий с видом второго уравнения Власова (1.72). Для построения электромагнитной аппроксимации Власова–Моэля для среднего потока ускорений $\langle \vec{v} \rangle_{1,2}$ необходимо, чтобы математическая форма уравнения эволюции функции Вигнера была близка ко второму уравнению Власова.

Исходя из выражений (2.89), (2.54), (2.65) и (2.66) использование функции Вигнера (1.69) при анализе систем с электромагнитным взаимодействием имеет смысл. Кроме того, выражение для функции (1.69) существенно проще выражения (2.4).

Построим уравнение эволюции для функции (1.69), сводящееся или близкое ко второму уравнению Власова (1.72).

Теорема 14. *Функция Вигнера $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ чистого состояния для квантовых систем с электромагнитным взаимодействием (1.126) удовлетворяет эволюционному уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{1}{m} \left(\vec{p} - q \vec{\mathcal{A}} \right) \cdot \nabla_r W - (\nabla_p W \cdot \nabla_r) \left[\frac{1}{2m} \left(\vec{p} - q \vec{\mathcal{A}} \right)^2 + \vec{\mathcal{U}} \right] = 0, \quad (2.95)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{1}{m} \operatorname{div}_r \left[W \vec{\hat{P}} \right] + \operatorname{div}_p \left[-W \vec{\nabla}_r \left(\frac{1}{2m} \vec{\hat{P}}^2 + \vec{\mathcal{U}} \right) \right] = 0, \quad (2.96)$$

где

$$\vec{\hat{P}} \stackrel{\text{def}}{=} m \vec{\mathcal{V}} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p} - q \vec{\mathcal{A}}, \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} q \vec{\mathcal{U}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} (\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r)^{2l} U, \\ \vec{\mathcal{A}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} (\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p)^{2k}, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{U}}_q &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} U(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p)^{2l}, \\ \vec{\mathcal{A}} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} (\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r)^{2k} \vec{A},\end{aligned}\quad (2.99)$$

а стрелка над оператором указывает направление его действия.

Доказательство теоремы 14. Найдем частную производную по времени от функции Вигнера чистого состояния (1.69):

$$\begin{aligned}(2\pi\hbar)^3 \frac{\partial}{\partial t} W(\vec{r}, \vec{p}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi(\vec{r}'', t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(\vec{r}', t) d^3s + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi^*(\vec{r}', t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}'', t) d^3s.\end{aligned}\quad (2.100)$$

Из уравнения Шрёдингера (1.126) следует, что

$$\begin{aligned}(\hat{p} - q\vec{A})^2 \Psi &= (\hat{p} - q\vec{A})(\hat{p}\Psi - q\vec{A}\Psi) = \\ &= \hat{p}^2 \Psi - q\hat{p}(\vec{A}\Psi) - q\vec{A}\hat{p}\Psi + q^2 |\vec{A}|^2 \Psi = \\ &= -\hbar^2 \Delta_r \Psi + i\hbar q(\nabla_r, \vec{A}\Psi) + i\hbar q(\vec{A}, \nabla_r \Psi) + q^2 |\vec{A}|^2 \Psi = \\ &= -\hbar^2 \Delta_r \Psi + i\hbar q\Psi(\nabla_r, \vec{A}) + i\hbar q(\nabla_r \Psi, \vec{A}) + i\hbar q(\vec{A}, \nabla_r \Psi) + q^2 |\vec{A}|^2 \Psi, \\ (\hat{p} - q\vec{A})^2 \Psi &= -\hbar^2 \Delta_r \Psi + 2i\hbar q(\nabla_r \Psi, \vec{A}) + q^2 |\vec{A}|^2 \Psi,\end{aligned}$$

где учтено условие $\text{div}_r \vec{A} = 0$. В результате уравнение Шрёдингера примет вид

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}'', t) &= \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{r''} + i\frac{\hbar q}{m} \vec{A}(\vec{r}'', t) \cdot \nabla_{r''} + \frac{q^2}{2m} |\vec{A}(\vec{r}'', t)|^2 + U(\vec{r}'', t) \right] \Psi(\vec{r}'', t), \\ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^*(\vec{r}', t) &= \\ &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{r'} - i\frac{\hbar q}{m} \vec{A}(\vec{r}', t) \cdot \nabla_{r'} + \frac{q^2}{2m} |\vec{A}(\vec{r}', t)|^2 + U(\vec{r}', t) \right] \Psi^*(\vec{r}', t).\end{aligned}\quad (2.101)$$

Подставим уравнения (2.101) в первый и второй интеграл выражения (2.100), получим

$$(2\pi\hbar)^3 \frac{\partial}{\partial t} W = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \quad (2.102)$$

где

$$I_1 = i \frac{\hbar}{2m} \int_{(\infty)} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} [\Psi^*(\vec{r}', t) \Delta_{r''} \Psi(\vec{r}'', t) - \Psi(\vec{r}'', t) \Delta_{r'} \Psi^*(\vec{r}', t)] d^3 s, \quad (2.103)$$

$$I_2 = \frac{q}{m} \int_{(\infty)} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left[\Psi(\vec{r}'', t) \vec{A}(\vec{r}', t) \cdot \nabla_{r'} \Psi^*(\vec{r}', t) + \right. \\ \left. + \Psi^*(\vec{r}', t) \vec{A}(\vec{r}'', t) \cdot \nabla_{r''} \Psi(\vec{r}'', t) \right] d^3 s, \quad (2.104)$$

$$I_3 = i \frac{q^2}{2m\hbar} \int_{(\infty)} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) \left[|\vec{A}(\vec{r}', t)|^2 - |\vec{A}(\vec{r}'', t)|^2 \right] d^3 s, \quad (2.105)$$

$$I_4 = \frac{i}{\hbar} \int_{(\infty)} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi(\vec{r}'', t) [U(\vec{r}', t) - U(\vec{r}'', t)] \Psi^*(\vec{r}', t) d^3 s. \quad (2.106)$$

Вычислим интеграл I_4 . Преобразуем подынтегральное выражение

$$U(\vec{r}', t) - U(\vec{r}'', t) = - \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\vec{s} \cdot \nabla_r)^{2l+1}}{2^{2l} (2l+1)!} U(\vec{r}, t). \quad (2.107)$$

Сделаем преобразование:

$$e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left(i \frac{\vec{s}}{\hbar} \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l+1} U(\vec{r}, t) = - \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l+1} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} U(\vec{r}, t). \quad (2.108)$$

Подставим выражения (2.107) и (2.108) в интеграл для потенциальной энергии (2.106), получим

$$I_4 = - \frac{i}{\hbar} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2l} (2l+1)!} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi(\vec{r}'', t) \bar{\Psi}(\vec{r}', t) \times \\ \times e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \frac{\hbar^{2l+1}}{i^{2l+1}} \left(\frac{i}{\hbar} \vec{s}, \vec{\nabla}_r \right)^{2l+1} U(\vec{r}, t) d^3 s = \\ = \frac{1}{\hbar} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \hbar^{2l+1}}{2^{2l} (2l+1)!} U(\vec{r}, t) \left(\vec{\nabla}_r, \vec{\nabla}_p \right)^{2l+1} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi(\vec{r}'', t) \bar{\Psi}(\vec{r}', t) d^3 s, \\ I_4 = (2\pi\hbar)^3 \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} U(\vec{r}, t) \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2l+1} W(\vec{r}, \vec{p}, t). \quad (2.109)$$

Интеграл I_1 преобразуем как

$$I_1 = i \frac{\hbar}{m} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} (\nabla_r \cdot \nabla_s) \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) d^3 s =$$

$$= i \frac{\hbar}{m} \nabla_r \cdot \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \nabla_s \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) d^3 s, \quad (2.110)$$

где учтено $\vec{r} = \frac{\vec{r}' + \vec{r}''}{2}$, $\vec{s} = \vec{r}'' - \vec{r}'$,

$$\nabla_{r'} = \frac{1}{2} \nabla_r - \nabla_s, \quad \nabla_{r''} = \frac{1}{2} \nabla_r + \nabla_s, \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{r'} &= (\nabla_{r'}, \nabla_{r'}) = \left(\frac{1}{2} \nabla_r - \nabla_s, \frac{1}{2} \nabla_r - \nabla_s \right) = \frac{1}{4} \Delta_r - (\nabla_r, \nabla_s) + \Delta_s, \\ \Delta_{r''} &= \frac{1}{4} \Delta_r + (\nabla_r, \nabla_s) + \Delta_s, \quad \Delta_{r'} - \Delta_{r''} = -2 (\nabla_r \cdot \nabla_s). \end{aligned} \quad (2.112)$$

Преобразуем подынтегральное выражение (2.110):

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \nabla_s [\Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t)] &= \\ &= \nabla_s \left[e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) \right] + \frac{i}{\hbar} \vec{p} \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

С учетом (2.113) интеграл (2.110) примет вид

$$I_1 = -\frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla_r \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) d^3 s = - (2\pi\hbar)^3 \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla_r W. \quad (2.114)$$

Рассмотрим интеграл I_2 , воспользовавшись соотношениями (2.11):

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{q}{m} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A} (\vec{r}', t) \cdot \nabla_{r'} + \vec{A} (\vec{r}'', t) \cdot \nabla_{r''} \right] \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) d^3 s = \\ &= \frac{q}{m} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A} (\vec{r}', t) \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla_r - \nabla_s \right) + \vec{A} (\vec{r}'', t) \cdot \left(\frac{1}{2} \nabla_r + \nabla_s \right) \right] \times \\ &\quad \times \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) d^3 s, \\ I_2 &= \frac{q}{2m} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A} (\vec{r}', t) + \vec{A} (\vec{r}'', t) \right] \cdot \nabla_r \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) d^3 s + \\ &\quad + \frac{q}{m} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A} (\vec{r}'', t) - \vec{A} (\vec{r}', t) \right] \cdot \nabla_s \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) d^3 s. \end{aligned}$$

Учтем соотношения

$$\begin{aligned} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A} (\vec{r}', t) + \vec{A} (\vec{r}'', t) \right] \cdot \nabla_r \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) &= \\ &= \nabla_r \left\{ e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A} (\vec{r}', t) + \vec{A} (\vec{r}'', t) \right] \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
& e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A}(\vec{r}'', t) - \vec{A}(\vec{r}', t) \right] \cdot \nabla_s \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) = \\
& = \nabla_s \cdot \left\{ e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A}(\vec{r}'', t) - \vec{A}(\vec{r}', t) \right] \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) \right\} + \\
& + \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \left[\vec{A}(\vec{r}'', t) - \vec{A}(\vec{r}', t) \right] \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}}.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
I_2 = \frac{q}{2m} \nabla_r \cdot \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} \left[\vec{A}(\vec{r}', t) + \vec{A}(\vec{r}'', t) \right] \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) d^3s + \\
+ \frac{q}{m} \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \int_{\mathbb{R}^3} \left[\vec{A}(\vec{r}'', t) - \vec{A}(\vec{r}', t) \right] \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} d^3s = I_{21} + I_{22}.
\end{aligned} \quad (2.115)$$

Воспользуемся разложениями в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{r}', t) + \vec{A}(\vec{r}'', t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\vec{s} \cdot \nabla_r)^n}{2^n n!} \vec{A}(\vec{r}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\vec{s} \cdot \nabla_r)^n}{2^n n!} \vec{A}(\vec{r}) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[1 + (-1)^n] (\vec{s} \cdot \nabla_r)^n \vec{A}(\vec{r})}{2^n n!} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\vec{s} \cdot \nabla_r)^{2k} \vec{A}(\vec{r})}{2^{2k} (2k)!}, \quad (2.116) \\
\vec{A}(\vec{r}'', t) - \vec{A}(\vec{r}', t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} [1 - (-1)^n] \frac{(\vec{s} \cdot \nabla_r)^n}{2^n n!} \vec{A}(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\vec{s} \cdot \nabla_r)^{2k+1}}{2^{2k} (2k+1)!} \vec{A}(\vec{r}).
\end{aligned}$$

Подставим разложения (2.116) в интеграл (2.115), получим

$$\begin{aligned}
I_{21} &= \frac{q}{m} \nabla_r \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k} (2k)!} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) \times \\
&\quad \times e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} \frac{\hbar^{2k}}{i^{2k}} \left(\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \nabla_r \right)^{2k} \vec{A}(\vec{r}) d^3s = \\
&= \frac{q}{m} \nabla_r \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \hbar^{2k}}{2^{2k} (2k)!} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) \times \\
&\quad \times e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} d^3s \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k} \vec{A}(\vec{r}, t), \quad (2.117) \\
I_{21} &= (2\pi\hbar)^3 \frac{q}{m} \nabla_r \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A}(\vec{r}, t) \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} W(\vec{r}, \vec{p}, t),
\end{aligned}$$

где учтено

$$e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} \left(\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \nabla_r \right)^{2k} \vec{A}(\vec{r}, t) = e^{-i\frac{\vec{s}\cdot\vec{p}}{\hbar}} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k} \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (2.118)$$

Аналогично для интеграла I_{22} имеем

$$\begin{aligned}
 I_{22} &= \frac{q}{m\hbar} \vec{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \hbar^{2k+1}}{2^{2k} (2k+1)!} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) \times \\
 &\quad \times e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left(\frac{i}{\hbar} \vec{s} \cdot \nabla_r \right)^{2k+1} \vec{A}(\vec{r}) d^3 s = \\
 &= -\frac{q}{m} \vec{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \hbar^{2k}}{2^{2k} (2k+1)!} \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) \times \\
 &\quad \times e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} d^3 s \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k+1} \vec{A}(\vec{r}, t), \\
 I_{22} &= - (2\pi\hbar)^3 \frac{q}{m} \vec{p} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k+1)!} W(\vec{r}, \vec{p}, t) \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k+1} \vec{A}(\vec{r}, t),
 \end{aligned} \tag{2.119}$$

где учтено

$$e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left(i \frac{\vec{s}}{\hbar} \cdot \nabla_r \right)^{2k+1} \vec{A}(\vec{r}) = -e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k+1} \vec{A}(\vec{r}, t). \tag{2.120}$$

Подставляя (2.119) и (2.117) в выражение (2.115), получим

$$\begin{aligned}
 \frac{m}{q} \frac{I_2}{(2\pi\hbar)^3} &= \nabla_r \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} W - \\
 &\quad - \vec{p} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k+1)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k+1} W.
 \end{aligned} \tag{2.121}$$

Найдем интеграл I_3 , воспользовавшись разложениями (2.116):

$$\begin{aligned}
 I_3 &= -i \frac{q^2}{2m\hbar} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) \times \\
 &\quad \times \left[\vec{A}(\vec{r}'', t) - \vec{A}(\vec{r}', t) \right] \left[\vec{A}(\vec{r}', t) + \vec{A}(\vec{r}'', t) \right] d^3 s = \\
 &= -\frac{q^2}{m\hbar} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \hbar^{2l+1}}{2^{2l} (2l+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \hbar^{2k}}{2^{2k} (2k)!} \times \\
 &\quad \times \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \Psi^* (\vec{r}', t) \Psi (\vec{r}'', t) \left[\left(i \frac{\vec{s}}{\hbar} \cdot \nabla_r \right)^{2l+1} \vec{A}(\vec{r}) \right] \left(i \frac{\vec{s}}{\hbar} \cdot \nabla_r \right)^{2k} \vec{A}(\vec{r}) d^3 s = \\
 &= \frac{q^2}{m} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l \hbar^{2l}}{2^{2l} (2l+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) \left[e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k+1} \vec{A}(\vec{r}, t) \right] \left(i \frac{\vec{s}}{\hbar} \cdot \nabla_r \right)^{2k} \vec{A}(\vec{r}) d^3 s = \\
& = \frac{q^2}{m} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \times \\
& \times \int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} \left(i \frac{\vec{s}}{\hbar} \cdot \nabla_r \right)^{2k} \vec{A}(\vec{r}) d^3 s \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l+1} \vec{A}(\vec{r}, t) = \\
& = \frac{q^2}{m} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \times \\
& \times \vec{A}(\vec{r}, t) \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \Psi^*(\vec{r}', t) \Psi(\vec{r}'', t) e^{-i \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{\hbar}} d^3 s \right] \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l+1} \vec{A}(\vec{r}, t), \\
& \frac{m}{q^2} \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} I_3 = \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \times \\
& \times \vec{A}(\vec{r}, t) \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} [W(\vec{r}, \vec{p}, t)] \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l+1} \vec{A}(\vec{r}, t).
\end{aligned} \tag{2.122}$$

В результате получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \nabla_r W &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} U \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2l+1} W + \\
&+ \frac{q}{m} \nabla_r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} W - \\
&- \frac{q}{m} \vec{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k+1)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k+1} W + \\
&+ \frac{q^2}{m} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A}(\vec{r}, t) \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \times \\
&\times [W(\vec{r}, \vec{p}, t)] \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l+1} \vec{A}(\vec{r}, t). \tag{2.123}
\end{aligned}$$

Преобразуем полученное уравнение (2.123):

$$\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} \nabla_r W =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\nabla_p W \cdot \vec{\nabla}_r \right) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} U - \\
&- \frac{q}{m} \vec{p} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2l+1} W + \\
&+ \frac{q^2}{m} \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2l+1} W \times \\
&\times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k} \vec{A}, \\
\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} \nabla_r W = \\
&= \left(\nabla_p W \cdot \vec{\nabla}_r \right) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} U - \\
&- \frac{q}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} (\nabla_p W \cdot \nabla_r) \times \\
&\times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} \vec{A} + \tag{2.124} \\
&+ \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} (\nabla_p W \cdot \nabla_r) \vec{p}, \\
\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} \nabla_r W = \\
&= \left(\nabla_p W \cdot \vec{\nabla}_r \right) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} U + \\
&+ \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} (\nabla_p W \cdot \nabla_r) \times \\
&\times \left[\vec{p} - q \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} \vec{A} \right], \\
\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} \vec{\nabla}_r W =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\vec{\nabla}_p W \cdot \vec{\nabla}_r \right) \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} U - \\
&- \frac{q}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} \left(\vec{\nabla}_p W \cdot \vec{\nabla}_r \right) \times \\
&\times \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} \vec{A} = 0,
\end{aligned}$$

где оператор ∇_p действует только на функцию Вигнера. Преобразуем последний член в уравнении (2.124):

$$\begin{aligned}
&\left[p_\beta - q \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} A_\beta \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2l} \right] \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k} \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} = \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k+1)!} \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \times \\
&\times \left[p_\beta - q \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} A_\beta \right]. \quad (2.125)
\end{aligned}$$

Разобьем выражение (2.125) на два одинаковых члена:

$$\begin{aligned}
&- q \left[p_\beta - q \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} A_\beta \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2l} \right] \frac{\partial W}{\partial p_\alpha} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2k} \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} = \\
&= \frac{1}{2} \left(\nabla_p W \cdot \vec{\nabla}_r \right) \left[\vec{p} - q \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} \vec{A} \right]^2. \quad (2.126)
\end{aligned}$$

Подставляя выражение (2.126) в уравнение (2.124), получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} W + \frac{1}{m} \left\{ \vec{p} - q \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \right\} \nabla_r W - \\
&- \left(\vec{\nabla}_p W \cdot \nabla_r \right) \left\{ \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - q \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} \vec{A} \right]^2 + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} \left(\vec{\nabla}_p \cdot \vec{\nabla}_r \right)^{2l} U \right\} = 0. \quad (2.127)
\end{aligned}$$

С использованием обозначений (2.98), (2.99) операторов $q\hat{\mathcal{U}}$ и $\hat{\mathcal{A}}$ уравнение (2.127) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}W + \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}}) \cdot \nabla_r W - (\nabla_p W \cdot \nabla_r) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] = 0. \quad (2.128)$$

Приведем уравнение (2.128) к виду второго уравнения Власова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}W + \frac{1}{m}\text{div}_r \left[W (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}}) \right] - \left\{ W \text{div}_r \frac{1}{m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}}) + \right. \\ \left. + (\nabla_p W \cdot \nabla_r) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.129)$$

Преобразуем последний член в уравнении (2.129) и выполним промежуточные вычисления:

$$\begin{aligned} \text{div}_p \left\{ W \nabla_r \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] \right\} = \nabla_p W \cdot \nabla_r \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] + \\ + W \text{div}_p \left\{ \nabla_r \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Заметим, что

$$\text{div}_p \left\{ \nabla_r \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] \right\} = \frac{1}{m} \text{div}_r (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}}). \quad (2.131)$$

Подставляя (1.131) в (2.130), получим

$$\begin{aligned} \text{div}_p \left\{ W \nabla_r \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] \right\} = \\ = \nabla_p W \cdot \nabla_r \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] + W \frac{1}{m} \text{div}_r (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}}). \end{aligned} \quad (2.132)$$

С учетом (1.132) уравнение (2.129) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}W + \frac{1}{m}\text{div}_r \left[(\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}}) W \right] + \\ + \text{div}_p \left\{ -\nabla_r \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - q\vec{\hat{\mathcal{A}}})^2 + \vec{\hat{\mathcal{U}}} \right] W \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Теорема 14 доказана.

Замечание 11. Операторы (2.98) и (2.99) соответствуют скалярному и векторному потенциалу электромагнитного поля. В «классическом

пределе» при $\hbar \rightarrow 0$ ряды (2.98) и (2.99) содержат только одно — первое слагаемое, совпадающее с классическим потенциалом (U/q или $\vec{A}$). Аналогичная ситуация возникает при линейной зависимости потенциалов U/q и $\vec{A}$ от координаты $\vec{r}$ (однородное электромагнитное поле). Даже при $\hbar \neq 0$ все производные $(\nabla_r)^{2k}$, $k > 0$, в рядах (2.98), (2.99) будут равны нулю.

В общем случае, когда $\hbar \neq 0$ и потенциалы являются нелинейными, присутствуют остальные члены ряда, содержащие множитель $\hbar^{2k}$ и формально соответствующие «квантовым» вкладам (см. п. 1.6).

Выражение справа (последнее/третье слагаемое) в уравнении (2.96) можно рассматривать как оператор $\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \hat{\vec{P}}^2 + \hat{\mathcal{U}}$ электромагнитного Гамильтона, что приводит к операторному аналогу уравнения Гамильтона–Якоби (1.127).

Уравнение (2.96) имеет вид, аналогичный второму уравнению Власова (1.72), но в силу теоремы 13 удобно перейти от канонического импульса $\vec{p}$ к кинетическому импульсу $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$.

Теорема 15. Уравнение (2.95) для функции Власова $f_V(\vec{r}, \vec{p}, t) = m^3 W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial f_V}{\partial t} + \frac{1}{m} \vec{P} \cdot \nabla_r f_V + \vec{\mathcal{F}} \cdot \nabla_P f_V = 0, \quad (2.134)$$

или

$$\frac{\partial f_V}{\partial t} + \text{div}_r \left(\vec{\mathcal{V}} f_V \right) + \text{div}_P \left[q f_V \left(\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{V}} \times \vec{\mathcal{B}} + \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{A}}^{(\hbar)} \right) \right] = 0, \quad (2.135)$$

где

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}^{(\text{EM})} + \vec{\mathcal{F}}^{(\hbar)}, \quad \vec{\mathcal{F}}^{(\text{EM})} \stackrel{\text{def}}{=} q \left(\vec{\mathcal{E}} + \frac{1}{m} \vec{P} \times \vec{\mathcal{B}} \right), \quad \vec{\mathcal{F}}^{(\hbar)} \stackrel{\text{def}}{=} q \frac{d}{dt} \vec{\mathcal{A}}^{(\hbar)}, \quad (2.136)$$

$$\vec{\mathcal{A}}^{(\hbar)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} \vec{A} \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_P \right)^{2k},$$

$$\frac{d}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{\mathcal{V}} \cdot \vec{\nabla}_r, \quad \vec{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{curl}_r \vec{\mathcal{A}}, \quad \vec{\mathcal{E}} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{A}} - \frac{1}{q} \nabla_r \hat{\mathcal{U}}, \quad (2.137)$$

при этом в операторе $\hat{A}$ (2.98) производится замена ∇_p на ∇_P .

Доказательство теоремы 15. Запишем уравнение (2.95) относительно функции Власова $f_V(\vec{r}, \vec{P}, t)$. Производная от оператора $\hat{\mathcal{H}}$ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \hat{\mathcal{H}} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\frac{1}{2m} \hat{\vec{P}}^2 + \hat{\mathcal{U}} \right) = \frac{1}{m} \hat{\vec{P}}_\mu \frac{\partial \hat{\vec{P}}_\mu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}}{\partial x_\beta} = -q \frac{1}{m} \hat{\vec{P}}_\mu \frac{\partial \hat{A}_\mu}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}}{\partial x_\beta}. \quad (2.138)$$

Заметим, что согласно определению (2.98), (2.99) оператор $\hat{\vec{A}}_\mu$ содержит производную по переменной $\vec{p}$. При переходе от переменной $\vec{p}$ к переменной $\vec{P}$ вид оператора $\vec{P}$ не меняется, так как $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}$ и $\vec{\nabla}_P = \vec{\nabla}_P$. Уравнение (2.128) записано относительно функции Вигнера $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$, поэтому перепишем его для функции $W(\vec{r}, \vec{p}, t) = W(\vec{r}, \vec{P} + q\vec{A}, t) = f_V(\vec{r}, \vec{P}, t)$, где $\vec{P} = \vec{p} - q\vec{A}(\vec{r}, t)$. В результате получим выражения для частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \frac{\partial f_V}{\partial t} - q \frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial t}, \quad (2.139)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_\beta} W = \frac{\partial f_V}{\partial P_\beta}, \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} W = \frac{\partial f_V}{\partial x_\beta} - q \frac{\partial f_V}{\partial P_\alpha} \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}. \quad (2.141)$$

Подставляя выражения (2.139)–(2.141) и (2.138) в уравнение (2.95), получим

$$\frac{\partial f_V}{\partial t} + \frac{1}{m} \vec{P}_\beta \frac{\partial f_V}{\partial x_\beta} - \frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \left(\frac{q}{m} \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} \hat{\vec{P}}_\alpha - \frac{q}{m} \hat{\vec{P}}_\mu \frac{\partial \hat{\vec{A}}_\mu}{\partial x_\beta} + q \frac{\partial A_\beta}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}}{\partial x_\beta} \right) = 0. \quad (2.142)$$

Преобразуем выражение в скобках в уравнении (2.142). Согласно (2.99) векторный потенциал $\vec{A}$ можно представить в виде

$$\vec{A} = \hat{\vec{A}} - \hat{\vec{A}}^{(\hbar)}, \quad \hat{\vec{A}}^{(\hbar)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k (\hbar/2)^{2k}}{(2k)!} (\vec{\nabla}_P \cdot \vec{\nabla}_r)^{2k} \vec{A}, \quad (2.143)$$

в результате получим выражение

$$\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} \hat{\vec{P}}_\alpha - \hat{\vec{P}}_\mu \frac{\partial \hat{\vec{A}}_\mu}{\partial x_\beta} = - \left(\hat{\vec{P}} \times \hat{\vec{B}} \right)_\beta - \hat{\vec{P}}_\alpha \frac{\partial \hat{\vec{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial x_\alpha}, \quad (2.144)$$

которое учитывает, что $\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} \hat{\vec{P}}_\alpha = \hat{\vec{P}}_\alpha \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}$, поскольку оператор $\hat{\vec{P}}_\alpha$ выражается через оператор $\hat{\vec{A}}_\alpha$, в котором производится дифференцирование по переменной P_μ , а потенциал A_β не зависит от P_μ . Подставляя выражение (2.144) в уравнение (2.142), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_V}{\partial t} + \frac{1}{m} \vec{P}_\beta \frac{\partial f_V}{\partial x_\beta} + q \frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \left[\frac{1}{m} \left(\hat{\vec{P}} \times \hat{\vec{B}} \right)_\beta + \right. \\ \left. + \frac{\partial \hat{\vec{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial t} + \hat{\vec{V}}_\alpha \frac{\partial \hat{\vec{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \hat{\vec{A}}_\beta}{\partial t} - \frac{1}{q} \frac{\partial \hat{\mathcal{U}}}{\partial x_\beta} \right] = 0. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Преобразуем члены уравнения (2.145)

$$\vec{\mathcal{P}}_\beta \frac{\partial f_V}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[\left(P_\beta - q \vec{\mathcal{A}}_\beta^{(\hbar)} \right) f_V \right], \quad (2.146)$$

где принимается во внимание, что

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} \left[A_\beta \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} f_V \right] = A_\beta \left(\vec{\nabla}_r \cdot \vec{\nabla}_p \right)^{2k} \frac{\partial f_V}{\partial x_\beta},$$

поскольку $\text{div}_r \vec{A} = 0$. Аналогично для остальных членов получаем

$$\frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial P_\beta} \left(f_V \frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial x_\beta} \right), \quad (2.147)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_\beta} \left(f_V \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta}{\partial t} \right) = \frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta}{\partial t}, \quad (2.148)$$

$$\frac{\partial}{\partial P_\beta} \left(f_V \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial t}, \quad (2.149)$$

$$\frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \left(\vec{\mathcal{V}}_\alpha \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial x_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial P_\beta} \left[f_V \vec{\mathcal{V}}_\alpha \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial x_\alpha} \right], \quad (2.150)$$

где $\text{div}_r \vec{A} = 0$ и $P_\alpha \frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} = \frac{\partial}{\partial P_\beta} (P_\alpha f_V) - \delta_{\alpha\beta} f_V$. Последний член примет вид

$$\frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \left(\vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{B}} \right)_\beta = \frac{\partial}{\partial P_\beta} \left[f_V \left(\vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{B}} \right)_\beta \right], \quad (2.151)$$

где учтено, что

$$\frac{\partial f_V}{\partial P_\beta} \left(P_\alpha \vec{\mathcal{B}}_\lambda \right) = \frac{\partial}{\partial P_\beta} \left(f_V P_\alpha \vec{\mathcal{B}}_\lambda \right) - f_V \delta_{\alpha\beta} \vec{\mathcal{B}}_\lambda.$$

Подставляя выражения (2.146)–(2.151) в уравнение (2.145), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_V}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_\beta} \left(\vec{\mathcal{P}}_\beta f_V \right) + q \frac{\partial}{\partial P_\beta} \left\{ f_V \left[\frac{1}{m} \left(\vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{B}} \right)_\beta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial t} + \vec{\mathcal{V}}_\alpha \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta^{(\hbar)}}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_\beta}{\partial t} - \frac{1}{q} \frac{\partial \vec{\mathcal{U}}}{\partial x_\beta} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Теорема 15 доказана.

Сравнивая второе уравнение Власова (1.72) и уравнение (2.135), можно расширить аппроксимацию Власова–Моэля (1.108) для электромагнитной системы.

Определение 2. Будем называть аппроксимацию среднего потока ускорений в фазовом пространстве вида

$$f_V \langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2} = q f_V \left(\overleftarrow{\vec{\mathcal{E}}} + \overleftarrow{\vec{\mathcal{V}}} \times \overleftarrow{\vec{\mathcal{B}}} + \frac{\overleftarrow{d}}{dt} \overleftarrow{\vec{\mathcal{A}}}^{(\hbar)} \right) \quad (2.153)$$

аппроксимацией Власова–Моэля для квантовых систем с электромагнитным взаимодействием.

Вклады $q f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{E}}}$ и $q f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{V}}} \times \overleftarrow{\vec{\mathcal{B}}}$ представляют собой бесконечные ряды (2.137), (2.98), (2.99). Первый член ряда $q f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{E}}}$ — это классическая сила Кулона, а первый член ряда $q f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{V}}} \times \overleftarrow{\vec{\mathcal{B}}}$ — классическая сила Лоренца. Остальные члены ряда имеют коэффициенты $\hbar^{2k}$ и могут быть интерпретированы как квантовые поправки к силам Кулона и Лоренца.

Третий вклад $q f_V \frac{\overleftarrow{d}}{dt} \overleftarrow{\vec{\mathcal{A}}}^{(\hbar)}$ связан с наличием магнитного поля и имеет исключительно квантовую природу, поскольку содержит только коэффициенты $\hbar^{2k}$ при $k \in \mathbb{N}$.

В отсутствие магнитного поля ($\vec{A} = \vec{\theta}$) аппроксимация (2.153) переходит в аппроксимацию (1.108). Действительно, учитывая (2.98) и (2.137), получаем

$$f_V \langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2} = q f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{E}}} = -f_V \nabla_r \tilde{U} = - \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(-1)^l (\hbar/2)^{2l}}{(2l+1)!} f_V \left(\overleftarrow{\nabla}_P \cdot \overleftarrow{\nabla}_r \right)^{2l} \nabla_r U. \quad (2.154)$$

Теорема 16. Усреднение электромагнитной аппроксимации Власова–Моэля (2.153) по импульсному пространству $\vec{P}$ дает внешнюю силу в гидродинамическом уравнении движения (1.73) вида

$$\langle \dot{\vec{P}} \rangle_1 = q \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{q} \nabla_r U \right) + \frac{q}{m} \langle \vec{P} \rangle_1 \times \vec{B}, \quad (2.155)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{P}}} d^3 P = f_1 \langle \vec{P} \rangle_1. \quad (2.156)$$

Доказательство теоремы 16. Интегрируя электромагнитную аппроксимацию Власова–Моэля (2.153) по импульсному пространству, получаем

$$f_1 \langle \dot{\vec{P}} \rangle_1 = q \int_{\mathbb{R}^3} f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{E}}} d^3 P + q \int_{\mathbb{R}^3} f_V \overleftarrow{\vec{\mathcal{V}}} \times \overleftarrow{\vec{\mathcal{B}}} d^3 P + q \int_{\mathbb{R}^3} f_V \frac{\overleftarrow{d}}{dt} \overleftarrow{\vec{\mathcal{A}}}^{(\hbar)} d^3 P. \quad (2.157)$$

Вычислим каждый интеграл отдельно:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_V \overleftarrow{\mathcal{E}}_\beta d^3 P = f^1 \left(-\frac{\partial A_\beta}{\partial t} - \frac{1}{q} \frac{\partial U}{\partial x_\beta} \right), \quad (2.158)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_V \left(\overleftarrow{\mathcal{V}} \times \overleftarrow{\mathcal{B}} \right)_\beta d^3 P = \frac{1}{m} f^1 \langle \vec{P} \rangle_1 \times \vec{B}, \quad (2.159)$$

где $\varepsilon_{\lambda\beta\alpha}\varepsilon_{\lambda\mu\eta} = \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\eta} - \delta_{\beta\eta}\delta_{\alpha\mu}$ и

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_V P_\alpha \left(\overleftarrow{\nabla}_P \cdot \overleftarrow{\nabla}_r \right)^{2k} G_{\alpha\beta} d^3 P = 0. \quad (2.160)$$

Справедливость выражения (2.160) вытекает из следующих вычислений:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f_V P_\alpha \left(\overleftarrow{\nabla}_P \cdot \overleftarrow{\nabla}_r \right)^2 G_{\alpha\beta} d^3 P &= \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f_V P_\alpha \left(\overleftarrow{\partial}_{P_x}^2 \overleftarrow{\partial}_x^2 + \overleftarrow{\partial}_{P_y}^2 \overleftarrow{\partial}_y^2 + \overleftarrow{\partial}_{P_z}^2 \overleftarrow{\partial}_z^2 \right) G_{\alpha\beta} d^3 P + \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^3} f_V P_\alpha \left(\overleftarrow{\partial}_{P_x} \overleftarrow{\partial}_{P_y} \overleftarrow{\partial}_x \overleftarrow{\partial}_y + \overleftarrow{\partial}_{P_x} \overleftarrow{\partial}_{P_z} \overleftarrow{\partial}_x \overleftarrow{\partial}_z + \overleftarrow{\partial}_{P_y} \overleftarrow{\partial}_{P_z} \overleftarrow{\partial}_y \overleftarrow{\partial}_z \right) G_{\alpha\beta} d^3 P. \end{aligned} \quad (2.161)$$

Для членов $\overleftarrow{\partial}_{P_\lambda}^2 \overleftarrow{\partial}_\lambda^2$ из (2.161) можно получить

$$\begin{aligned} (f_V P_\alpha) \overleftarrow{\partial}_{P_\lambda}^2 \overleftarrow{\partial}_\lambda^2 G_{\alpha\beta} &= (P_\alpha \partial_{P_\lambda}^2 f_V + 2\delta_{\alpha\lambda} \partial_{P_\lambda} f_V) \overleftarrow{\partial}_\lambda^2 G_{\alpha\beta}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} (f_V P_\alpha) \overleftarrow{\partial}_{P_\lambda}^2 \overleftarrow{\partial}_\lambda^2 G_{\alpha\beta} d^3 P &= \left(P_\alpha \partial_{P_\lambda} f_V|_{\pm\infty} - \delta_{\alpha\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{P_\lambda} f_V d^3 P \right) \overleftarrow{\partial}_\lambda^2 G_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.162)$$

А для членов $\overleftarrow{\partial}_{P_\lambda} \overleftarrow{\partial}_{P_\mu} \overleftarrow{\partial}_\lambda \overleftarrow{\partial}_\mu$ из (2.161) следует

$$\begin{aligned} (f_V P_\alpha) \overleftarrow{\partial}_{P_\lambda} \overleftarrow{\partial}_{P_\mu} \overleftarrow{\partial}_\lambda \overleftarrow{\partial}_\mu G_{\alpha\beta} &= \\ &= (P_\alpha \partial_{P_\lambda} \partial_{P_\mu} f_V + \delta_{\alpha\lambda} \partial_{P_\mu} f_V + \delta_{\alpha\mu} \partial_{P_\lambda} f_V) \overleftarrow{\partial}_\lambda \overleftarrow{\partial}_\mu G_{\alpha\beta}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} (f_V P_\alpha) \overleftarrow{\partial}_{P_\lambda} \overleftarrow{\partial}_{P_\mu} \overleftarrow{\partial}_\lambda \overleftarrow{\partial}_\mu G_{\alpha\beta} d^3 P &= \\ &= \left(P_\alpha \partial_{P_\mu} f_V|_{\pm\infty} - \delta_{\alpha\lambda} \int_{\mathbb{R}^3} \partial_{P_\mu} f_V d^3 P \right) \overleftarrow{\partial}_\lambda \overleftarrow{\partial}_\mu G_{\alpha\beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.163)$$

При подстановке (2.162) и (2.163) в интеграл (2.161) получаем ноль. Аналогичный результат справедлив и для более высоких степеней: $(\overleftarrow{\nabla}_P \cdot \overrightarrow{\nabla}_r)^{2k}$. Следовательно, выражение (2.160) является верным. Для последнего члена из выражения (2.157) получаем

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_V \frac{d}{dt} \overleftarrow{\mathcal{A}}_{\beta}^{(\hbar)} d^3 P = \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}^3} f_V P_{\alpha} \frac{\partial \overleftarrow{\mathcal{A}}_{\beta}^{(\hbar)}}{\partial x_{\alpha}} d^3 P - \frac{q}{m} \int_{\mathbb{R}^3} f_V \overleftarrow{\mathcal{A}}_{\alpha}^{(\hbar)} \frac{\partial \overleftarrow{\mathcal{A}}_{\beta}^{(\hbar)}}{\partial x_{\alpha}} d^3 P = 0, \quad (2.164)$$

где учтены предыдущие вычисления. Подставляя выражения (2.158), (2.159) и (2.64) в исходный интеграл (2.157), получаем

$$\begin{aligned} f^1 \langle \dot{\vec{P}} \rangle_1 &= q f^1 \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{q} \nabla_r U \right) + \frac{q}{m} f^1 \langle \vec{P} \rangle_1 \times \vec{B}, \\ \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\dot{P}} f_V d^3 P &= \int_{\mathbb{R}^3} \vec{P} f_V d^3 P - q \int_{\mathbb{R}^3} \vec{\mathcal{A}}^{(\hbar)} f_V d^3 P = f^1 \langle \vec{P} \rangle_1. \end{aligned} \quad (2.165)$$

Теорема 16 доказана.

Замечание 12. Из выражения (2.156) следует, что усреднение уравнения (2.135) по импульсу переводит его в первое уравнение Власова (1.76):

$$\frac{\partial f^1}{\partial t} + \frac{1}{m} \operatorname{div}_r \left(f^1 \langle \vec{P} \rangle_1 \right) = 0. \quad (2.166)$$

Квантовые поправки (члены рядов (2.98), (2.99)) с коэффициентами $\hbar^{2k}$ при усреднении по импульсу P полностью исчезли из выражения (2.155), превратив его в классическое выражение для внешней электромагнитной силы.

Заметим, что уравнение (2.135) неэквивалентно второму уравнению Власова (1.72). Различие между уравнениями заключается во втором члене $\operatorname{div}_r \left(f_V \overleftarrow{\dot{P}} \right) \neq \operatorname{div}_r \left(f_2 \vec{P} \right)$. Только первый член в выражении

$$\operatorname{div}_r \left(f_V \overleftarrow{\dot{P}} \right) = \operatorname{div}_r \left(f_V \vec{P} \right) - q \operatorname{div}_r \left(f_V \overleftarrow{\mathcal{A}}^{(\hbar)} \right) \quad (2.167)$$

совпадает со вторым членом из уравнения Власова (1.72). Разница обусловлена квантовыми поправками $f_V \overleftarrow{\mathcal{A}}^{(\hbar)}$. Тем не менее аппроксимация (2.153) позволяет оборвать цепочку уравнений Власова на втором уравнении (1.72). В этом случае второе уравнение Власова (1.72) для функции $f^{1,2}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ примет вид

$$\frac{\partial f^{1,2}}{\partial t} + \frac{1}{m} \operatorname{div}_r \left(f^{1,2} \vec{P} \right) + \operatorname{div}_P \left[f^{1,2} \langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2} \right] = 0, \quad (2.168)$$

Интегрирование уравнения (2.168) по импульсному пространству $\vec{P}$ переведет его в первое уравнение Власова (1.76).

Сравним гидродинамическое уравнение (1.73) с электромагнитным уравнением (1.127) и усредненной аппроксимацией (2.155), получим соотношение

$$\frac{1}{m} \frac{\partial Q}{\partial x^k} = \frac{1}{f^1} \frac{\partial P_{k\lambda}}{\partial x^\lambda},$$

которое полностью совпадает с аналогичным соотношением в отсутствие магнитного поля. Следовательно, наличие магнитного поля не влияет на квантовое давление. Действительно, точные решения (1.88) и (1.89) имеют одинаковый квантовый потенциал (1.94), хотя в одной системе есть магнитное поле, а в другой — нет.

Несмотря на то, что внешняя сила (2.155) в уравнении движения (1.73) является классической, само уравнение описывает динамику квантовой системы, поскольку содержит квантовое давление (1.127). Квантовое давление $\nabla_r Q$ возникает как противодействие внешней силе $-\nabla_r U$, удерживающей частицу в потенциале U . В некотором смысле квантовая система представляет собой макроскопический объект (в фазовом пространстве), к которому применимо гидродинамическое описание. Отсутствие внешнего потенциала U приведет к исчезновению квантового давления и размыванию волнового пакета. Это аналог поведения газа, выпущенного из сосуда.

Отметим, что аппроксимация (2.153) не является единственно возможной для среднего потока ускорения $\langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2}$ (см. п. 1.5, 1.6). Проблема состоит в том, что уравнение эволюции (2.135) содержит информацию только о $\text{div}_P [f_V \langle \vec{P} \rangle_{1,2}]$, а согласно теореме Гельмгольца для корректного восстановления поля $\langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2}$ необходима информация о вихревой компоненте curl_P , которая отсутствует в уравнении (2.135). С физической точки зрения при построении аналогов «траекторий» квантовой системы согласно аппроксимации (2.153) возникает неопределенность.

С одной стороны, такую неоднозначность «траекторий» можно объяснить принципом неопределенности Гейзенберга. Действительно, при классическом переходе $\hbar \rightarrow 0$ члены с коэффициентами $\hbar^{2k}$ в скалярном $\hat{U}$ и векторном $\hat{A}$ потенциальных операторах (2.98), (2.99) исчезнут. Следовательно, аппроксимация (2.153) перейдет в выражение

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2} = q \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{1}{q} \nabla_r U \right) + \frac{q}{m} \vec{P} \times \vec{B}. \quad (2.169)$$

Выражение (2.169) не содержит квантовых поправок, а квантовый потенциал $Q \rightarrow 0$ при $\hbar \rightarrow 0$, т.е. уравнения движения (1.73) и (1.127) будут определять классические траектории движения без квантового давления. Отметим, что выражение (1.169) было феноменологически

введено Власовым при обрыве цепочки на втором уравнении для решения задач физики плазмы (2.3).

С другой стороны, как показано в п. 1.6, переход от квантовых систем к классическим не обязательно связан с пределом $\hbar \rightarrow 0$. При прямой подстановке функции Вигнера в приближение Власова–Моэля постоянная Планка $\hbar$ может явно не присутствовать. В результате неопределенность траектории будет связана с пространственным масштабом σ_r .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Важное отличие функции Вейля–Стратоновича f_w от функции Вигнера W заключается в том, что она принимает отрицательные значения для волновой функции $\Psi_G \sim \exp(-r^2/2\sigma_r^2)$. Отметим, что согласно теореме Хадсона и ее обобщению на трехмерный случай функция Вигнера W положительна только при Ψ_G . Таким образом, функция f_w не удовлетворяет этому условию.

Показано, что функция f_w положительна (2.47) во всей фазовой области для электромагнитной квантовой системы (2.46), описываемой негауссовой волновой функцией (2.15). В этом случае существенным является противоположный знак векторного $\vec{A}_3$ (2.37) и скалярного $\Phi \sim \phi$ потенциалов. Фактически выражения (2.45)–(2.49) и следствие 2 являются аналогом теоремы Хадсона и ее обобщением на трехмерный случай для функции Вейля–Стратоновича f_w .

Волновая функция Ψ_G является решением уравнения Шрёдингера для гармонического осциллятора с потенциалом $U_0 \sim x^2$. Подставляя потенциал U_0 в правую часть уравнения (1.68), получаем ноль. В результате уравнение Моэля переходит в классическое уравнение Лиувилля с положительным решением W_G . В рассматриваемом в данной работе примере потенциал U_1 (2.19) имеет вид квадратной воронки с полюсом в начале координат. Подстановка потенциала (2.19) в ряды (2.98), (2.99) приводит к наличию бесконечного числа ненулевых слагаемых. Таким образом, уравнение (2.95) отличается от уравнения Лиувилля. Несмотря на это, решение W_G уравнения (2.95) положительно. Такое поведение связано с наличием магнитного поля. В отсутствие магнитного поля волновая функция для потенциала (2.19) отличается от гауссовского распределения (2.15) и функция Вигнера имеет отрицательные значения.

Анализ свойств функций квазиплотности вероятностей W и f_w на модельном примере (2.15), (2.16) показывает корректность вычисления средних значений по фазовому пространству (лемма 3) (2.51)–(2.67) для электромагнитной системы. Выражение для функции W (1.69) существенно проще, чем для f_w (2.4). Аналогичное утверждение справедливо и для эволюционных уравнений, которым удовлетворяют функции W и f_w .

Важным отличием функций W и f_w является разный тип распределения плотности импульса (следствие 3) (2.75)–(2.77).

Функция $f_V(\vec{r}, \vec{P}, t) = m^3 W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ для электромагнитных систем удовлетворяет уравнению (2.135). Существенным отличием от известных форм уравнения (2.135) является его сходство со вторым уравнением Власова (1.72). Этот факт позволяет расширить аппроксимацию Власова–Моэля (1.108) на системы с электромагнитным взаимодействием в виде (2.153). Первый член в аппроксимации (2.153) имеет вид (2.169) и совпадает с известной феноменологической аппроксимацией Власова (2.3), используемой в физике плазмы, астрофизике и физике твердого тела. Этот член не содержит квантовых поправок, так как имеет коэффициент $\hbar^0$. Следующие члены в аппроксимации (2.153) согласно (2.98), (2.99) содержат коэффициенты $\hbar^{2k}$ и дают квантовые поправки к внешней силе $\langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2}$ во втором уравнении Власова (2.168). Используя выражение (2.153), можно найти усредненные источники диссипаций $\langle Q_{1,2}^2 \rangle_0 = \langle \text{div}_P \langle \dot{\vec{P}} \rangle_{1,2} \rangle_0$ для уравнения эволюции (2.5), (2.6) $H^{1,2}$ -функции Больцмана. Интересным фактом является исчезновение квантовых вкладов при усреднении $\langle \dot{\vec{P}} \rangle_1$ по импульсному пространству $\vec{P}$. В результате внешняя сила содержит только классические члены (2.155). В этом случае в уравнении движения (1.127) квантовая информация остается только в виде квантового давления $\nabla_r Q$. В полученной аппроксимации (2.153) квантовое давление не связано явно с наличием магнитного поля.

Благодарности. Исследование выполнено в рамках государственного задания МГУ им. М. В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Arnold V.I.* Proof of a Theorem of A.N.Kolmogorov on the Invariance of Quasi-Periodic Motions under Small Perturbations of the Hamiltonian // *Usp. Mat. Nauk.* 1963. V. 18, No. 5. P. 13; *Russ. Math. Surv.* 1963. V. 18, No. 5. P. 9.
2. *Arnold V.I.* A Theorem of Liouville Concerning Integrable Problems of Dynamics // *Sibirsk. Mat. Zh.* 1963. V. 4, No. 2. P. 471–474.
3. *Arnold V.I.* Instability of Dynamical Systems with Several Degrees of Freedom // *Sov. Math. Dokl.* 1964. V. 5, No. 1. P. 581–585.
4. *Zhaoyu Fei.* Quantum Stochastic Thermodynamics: A Semiclassical Theory in Phase Space // *Phys. Rev. A.* 2023. V. 108. P. 062207.
5. *McDonald A., Clerk A.A.* Third Quantization of Open Quantum Systems: Dissipative Symmetries and Connections to Phase-Space and Keldysh Field-Theory Formulations // *Phys. Rev. Res.* 2023. V. 5. P. 033107.
6. *Sahbani M., Das S., Green J.R.* Phase-Space Contraction Rate for Classical Mixed States // *Phys. Rev. E.* 2025. V. 111. P. 054130.
7. *Khromov D.A., Kryvoruchko M.S., Pesin D.A.* Geometric Phase for Nonlinear Oscillators from Perturbative Renormalization Group // *Phys. Rev. E.* 2023. V. 108. P. 044215.
8. *Poincare H.* Sur les Proprietes des Fonctions Denies par les Equations aux Differences Partielles. Theses presentees a la Faculte des Sciences de Paris,

1879. Reprinted in: Oeuvres de Henri Poincare. Tome I. Gauthier-Villars, 1928. P. IL-CXXII.
9. *Poincare H.* Memoire sur les Courbes Definies par une Equation Differentielle // J. Math. Pures Appl. 1881. V. 7. P. 375–422; J. Math. Pures Appl. 1882. V. 8. P. 251–296.
10. *Poincare H.* Sur les Residus des Integrales Doubles // Acta Math. 1887. V. 1, No. 1. P. 321–380.
11. *Poincare H.* Sur le Probleme des Trois Corps et les Equations de la Dynamique // Acta Math. 1890. V. 13, No. 1. P. 1–270.
12. *Ostrogradskii M. V.* // M&M. AC. St.-Petersbourg, 1850. V. 6. P. 385.
13. *Grhcia X., Pans J.M., Romdn-Roy N.* Higher-Order Lagrangian Systems: Geometric Structures, Dynamics and Constraints // J. Math. Phys. 1991. V. 32, No. 10.
14. *Grosse-Knetter C.* Effective Lagrangians with Higher Derivatives and Equations of Motion // Phys. Rev. D. 1994. V. 49, No. 12. P. 6709.
15. *Utiyama R., De Witt B. S.* // J. Math. Phys. 1962. V. 3. P. 608.
16. *Stelle K. S.* // Phys. Rev. D. 1977. V. 16. P. 953.
17. *Fradkin E. S., Tseytlin A. A.* // Nucl. Phys. B. 1982. V. 201. P. 469.
18. *Boulware D. G., Deser S.* // Phys. Rev. Lett. 1985. V. 55. P. 2656.
19. *Zwiebach B.* // Phys. Lett. B. 1965. V. 156. P. 315.
20. *Boulware D. G.* Quantum Theory of Gravity / Ed. S. Christensen. Bristol: Adam Hilger, 1984. P. 267.
21. *Nesterenko V. V., Nguyen Suan Han* // Intern. J. Mod. Phys. A. 1988. V. 3. P. 2315.
22. *Battle C., Gomis J., Pons J.M., Roman N.* // Lett. Math. Phys. 1987. V. 13. P. 17.
23. *Faddeev L. D., Slavnov A. A.* Gauge Fields. Introduction to Quantum Theory. New York, 1960. 236 p.
24. *Ikeda T., Takahashi K., Kobayashi T.* Consistency of Higher-Derivative Couplings to Matter Fields in Scalar-Tensor Gravity // Phys. Rev. D. 2023. V. 108. P. 044006.
25. *Naruko A., Saito R., Tanahashi N., Yamauchi D.* Ostrogradsky Mode in Scalar–Tensor Theories with Higher-Order Derivative Couplings to Matter // Progr. Theor. Exp. Phys. 2023. V. 2023, Iss. 5. P. 053E02.
26. *Babichev E., Comelli D., Takahashi K.* Generalization of Conformal-Disformal Transformations of the Metric Involving Higher Derivatives // Phys. Rev. D. 2024. V. 110. P. 064063.
27. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. New York: Wiley, 1962. 656 p.
28. *Hsiang Jen-Tsung, Hu Bei-Lok.* Non-Markovian Abraham–Lorentz–Dirac Equation: Radiation Reaction without Pathology // Phys. Rev. D. 2022. V. 106. P. 125018.
29. *Cai Yangyang, Gralla S.E., Paschalidis V.* Dynamics of Ultrarelativistic Charged Particles with Strong Radiation Reaction. I. Aristotelian Equilibrium State // Phys. Rev. D. 2023. V. 108. P. 063018.
30. *Santos J. S. et al.* Radiation Reaction in Weakly Magnetized Black Holes // Phys. Rev. D. 2024. V. 109. P. L4032.
31. *Khodabakhshi H.* Cosmology with Higher-Derivative Gravities // Ibid. V. 110. P. L061504.

32. Qi Y., Yang W., Wang Y., Han T., Wu Y. *et al.* $F(R)$ Gravity Dark Energy Model of an Interaction between Dark Radiation and Dark Matter // *Eur. Phys. J. C.* 2024. V. 84. P. 415.
33. Vlasov A. A. *Statistical Distribution Functions*. M.: Nauka, 1966. 355 p.
34. Vlasov A. A. *Many-Particle Theory and Its Application to Plasma*. New York: Gordon and Breach, 1961. 414 p.
35. Wigner E. P. On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // *Phys. Rev.* 1932. V. 40. P. 749–759.
36. Weyl H. *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*. New York: Dover, 1931. 448 p.
37. Stratonovich R. L. On the Statistical Interpretation of Quantum Theory // *Sov. Phys. JETP*. 1957. V. 5, No. 5. P. 1206–1216.
38. Serimaa O. T., Javanainen J., Varró S. // *Phys. Rev. A.* 1986. V. 33. P. 2913.
39. Javanainen J., Varro S., Serimaa O. T. Gauge-Independent Wigner Function. II. Inclusion of Radiation Reaction // *Phys. Rev. A.* 1987. V. 35, No. 7. P. 2791–2805.
40. Nedjalkov M., Weinhub J., Ballicchia M., Selberherr S., Dimov I., Ferry D. K. Wigner Equation for General Electromagnetic Fields: The Weyl–Stratonovich Transform // *Phys. Rev. B.* 2019. V. 99. P. 014423.
41. Nedjalkov M., Ballicchia M., Kosik R. Gauge-Invariant Semidiscrete Wigner Theory // *Phys. Rev. A.* 2022. V. 106. P. 052213.
42. Smithey D. T., Beck M., Raymer M. G., Faridani A. Measurement of the Wigner Distribution and the Density Matrix of a Light Mode Using Optical Homodyne Tomography: Application to Squeezed States and the Vacuum // *Phys. Rev. Lett.* 1993. V. 70. P. 1244–1247.
43. Casado A., Guerra S., Plácido J. Wigner Representation for Experiments on Quantum Cryptography Using Two-Photon Polarization Entanglement Produced in Parametric Down-Conversion // *J. Phys. B.* 2008. V. 41. No. 045501.
44. Bartlett M. S. Negative Probability // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1945. V. 41. P. 71–73.
45. Feynman R. P. Negative Probability // *Quantum Implications: Essays in Honour of David Bohm* / Eds. F. D. Peat, B. Hiley. London: Routledge & Kegan Paul Ltd, 1987. P. 235–248.
46. Scully M. O., Walther H., Schleich W. P. Feynman's Approach to Negative Probability in Quantum Mechanics // *Phys. Rev. A.* 1994. V. 49. P. 1562–1566.
47. Siyouri F., El Baz M., Hassouni Y. The Negativity of Wigner Function as a Measure of Quantum Correlations // *Quant. Inform. Processing.* 2016. V. 15. P. 4237–4252.
48. Bennett Ch. H. *et al.* Experimental Quantum Cryptography // *J. Cryptol.* 1992. No. 5(1). P. 3–28.
49. Bennett C. H., Brassard G. Quantum Cryptography: Public Key Distribution and Coin Tossing // *Proc. IEEE Intern. Conf. on Computers, Systems and Signal Processing*. New York, 1984. V. 175. P. 8.
50. O'Brien J. L., Furusawa A., Vuckovic J. Photonic Quantum Technologies // *Nature Photonics.* 2009. No. 3. P. 687–695.
51. Yuen H. P., Chan V. W. S. Noise in Homodyne and Heterodyne Detection // *Opt. Lett.* 1983. V. 8, No. 3. P. 177–179.
52. Abbas G. L., Chan V. W. S., Yee T. K. A Dual-Detector Optical Heterodyne Receiver for Local Oscillator Noise Suppression // *J. Lightwave Technol.* 1985. V. 3, No. 5. P. 1110–1122.

53. *Lvovsky A.I., Raymer M.G.* Continuous-Variable Optical Quantum-State Tomography // *Rev. Mod. Phys.* 2009. V. 81, No. 1. P. 299.
54. *D'Ariano G.M., Paris M.G.A., Sacchi M.F.* Quantum Tomography. arXiv:quant-ph/0302028.
55. *Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P.* Classical-Like Description of Quantum Dynamics by Means of Symplectic Tomography // *Found. Phys.* 1997. V. 27, No. 6. P. 801–824.
56. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G.* The Properties of the First Equation of the Vlasov Chain of Equations // *J. Stat. Mech.* 2015. V. 2015. P. P05019.
57. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Klimenko M.V.* Construction of Schrödinger, Pauli and Dirac Equations from Vlasov Equation in Case of Lorenz Gauge // *Eur. Phys. J. Plus.* 2025. V. 140, No. 622. P. 1–23.
58. *Moyal E.* Quantum Mechanics as a Statistical Theory // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1949. V. 45. P. 99–124.
59. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V.* Wigner Function of a Quantum System with Polynomial Potential // *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* 2020. V. 2020. P. 053105.
60. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V., Afonin P.V.* Is the Moyal Equation for the Wigner Function a Quantum Analogue of the Liouville Equation? // *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* 2023. V. 2023. P. 093102.
61. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V.* Explicit Form for the Kernel Operator Matrix Elements in Eigenfunction Basis of Harmonic Oscillator // *J. Stat. Mech.: Theory Exp.* 2020. V. 2020. P. 023109.
62. *Hudson R.L.* When Is the Wigner Quasi-Probability Density Non-Negative? // *Rep. Math. Phys.* 1974. V. 6, No. 2. P. 240–252.
63. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V.* The Wigner Function Negative Value Domains and Energy Function Poles of the Harmonic Oscillator // *J. Comput. Electronics.* 2021. V. 20, Iss. 6. P. 2148–2158.
64. *Перепелкин Е. Е., Садовников Б. И., Иноземцева Н. Г., Бурлаков Е. В., Полякова Р. В.* Эффективный численный алгоритм построения функции Вигнера квантовой системы с полиномиальным потенциалом в фазовом пространстве // *ЭЧАЯ.* 2021. Т. 52, № 3. С. 784–856.
65. *Bartlett M. S.* Negative Probability // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1945. V. 41. P. 71–73.
66. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Burlakov E.V.* Extended Wigner Function for the Harmonic Oscillator in the Phase Space // *Results Phys.* 2020. V. 19. P. 103546.
67. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory. V. 3. Pergamon Press Ltd., 1962. 632 p.
68. *von Helmholtz H.* Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen // *J. Reine Angew. Math.* 1858. V. 55. P. 25–55.
69. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Korepanova A.A.* Dispersion Chain of Quantum Mechanics Equations // *J. Phys. A.* 2023. V. 56, No. 14. P. 1455202(42).
70. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G.* Riemann Surface and Quantization // *Ann. Phys.* 2017. V. 376. P. 194–217.
71. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G.* PSI-Model of Micro- and Macro Systems // *Ann. Phys.* 2017. V. 383. P. 511–544.

72. *Bohm D., Hiley B.J., Kaloyerou P.N.* An Ontological Basis for the Quantum Theory // *Phys. Rep.* 1987. P. 144. P. 321–375.
73. *Bohm D., Hiley B.J.* The Undivided Universe: An Ontological Interpretation of Quantum Theory. London: Routledge, 1993. 397 p.
74. *Soto F., Claverie P.* When Is the Wigner Function of Multidimensional Systems Nonnegative? // *J. Math. Phys.* 1983. V. 24. P. 97–100.
75. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.* Exact Time-Dependent Solution of the Schrödinger Equation, Its Generalization to the Phase Space and Relation to the Gibbs Distribution // *Phys. Scr.* 2022. V. 98. P. 015221.
76. *Chen Z., Zhang X.* Global Existence to the Vlasov–Poisson System and Propagation of Moments without Assumption of Finite Kinetic Energy // *Commun. Math. Phys.* 2016. V. 343. P. 851–879.
77. *Shiroto T., Ohnishi N., Sentoku Y.* Quadratic Conservative Scheme for Relativistic Vlasov–Maxwell System // *J. Comput. Phys.* 2019. V. 379. P. 32–50.
78. *Maruca B.A., Kasper J.C., Gary S.P.* Instability-Driven Limits on Helium Temperature Anisotropy in the Solar Wind: Observations and Linear Vlasov Analysis // *Astrophys. J.* 2012. V. 748. P. 137.
79. *Brizard A.J.* Nonlinear Gyrokinetic Vlasov Equation for Toroidally Rotating Axisymmetric Tokamaks // *Phys. Plasmas.* 1995. V. 2. P. 459–471.
80. *Lin H., Liu C.P.* Vlasov–Maxwell System with Physical Reasonableness Constraints // *Plasma Res. Express.* 2019. V. 1. P. 025005.
81. *Kunze M., Rendall A.D.* Simplified Models of Electromagnetic and Gravitational Radiation Damping // *Class. Quant. Grav.* 2001. V. 18. P. 3573–3587.
82. *Kunze M., Rendall A.D.* The Vlasov–Poisson System with Radiation Damping // *Ann. Henri Poincaré.* 2001. V. 2. P. 857–886.
83. *Perepelkin E.E., Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G., Aleksandrov I.I.* Dispersion Chain of Vlasov Equations // *J. Stat. Mech.* 2022. V. 2022. P. 013205.
84. *Bialynicki-Birula I. et al.* Phase-Space Structure of the Dirac Vacuum // *Phys. Rev. D.* 1991. V. 44, No. 6. P. 1825.
85. *Zamanian J. et al.* Scalar Quantum Kinetic Theory for Spin-1/2 Particles: Mean-Field Theory // *New J. Phys.* 2010. V. 12, No. 4. P. 043019.
86. *Ekman R. et al.* Exchange Corrections in a Low-Temperature Plasma // *Phys. Rev. E.* 2015. V. 92, No. 1. P. 013104.
87. *Manfredi G., Hervieux P.A., Hurst J.* Phase-Space Modeling of Solid-State Plasmas: A Journey from Classical to Quantum // *Rev. Mod. Plasma Phys.* 2019. V. 3, No. 1. P. 13.
88. *Brodin G., Zamanian J.* Quantum Kinetic Theory of Plasmas // *Rev. Mod. Plasma Phys.* 2022. V. 6, No. 1. P. 4.
89. *Brodin G., Marklund M., Zamanian J., Ericsson Å., Mana P.L.* // *Phys. Rev. Lett.* 2008. V. 101. P. 245002.
90. *Cowley S.C., Kulsrud R.M., Valeo E.* // *Phys. Fluids.* 1986. V. 29. P. 430.
91. *Mendonca J.T., Tsintsadze N.L.* Analog of the Wigner–Moyal Equation for the Electromagnetic Field // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62, No. 3. P. 4276–4282.