

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ЛАНДВЕБЕРА НА ОСНОВЕ УСЕЧЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРОВ НЕЙТРОНОВ ПО ПОКАЗАНИЯМ МНОГОШАРОВОГО СПЕКТРОМЕТРА БОННЕРА

А. В. Чижов^{1,*}, *К. А. Чижов*^{1,2,**}

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

² Государственный университет «Дубна», Дубна, Россия

Предлагается метод, основанный на усеченном сингулярном разложении (TSVD) в сочетании с итерационным алгоритмом Ландвебера для восстановления функции спектральной плотности нейтронов по показаниям многошарового спектрометра Боннера. В качестве анзаца для представления спектра нейтронов используется суперпозиция смещенных полиномов Лежандра. Метод позволяет не только повысить точность разложения, но и определить оптимальный набор замедлительных сфер спектрометра для проведения корректных измерений. Для иллюстрации метода разложения спектров нейтронов и выбора наборов замедлительных сфер спектрометра используются экспериментальные данные, полученные на установке ИРЕН (источнике резонансных нейтронов) ОИЯИ.

A method based on the truncated singular value decomposition (TSVD) combined with the Landweber iterative algorithm is proposed for unfolding the neutron spectral density function from the readings of the Bonner multi-sphere spectrometer. As an ansatz for representing the neutron spectrum, we use a superposition of shifted Legendre polynomials. The method allows us not only to increase the accuracy of unfolding but also to determine the optimal set of spectrometer moderator spheres for performing correct measurements. To illustrate our method of unfolding neutron spectra and selecting sets of spectrometer moderator spheres, we use experimental data obtained at the IREN facility (Intense REsonance Neutron Source), JINR.

PACS: 02.30.Zz

ВВЕДЕНИЕ

Многошаровой спектрометр Боннера [1] является широко используемым прибором для регистрации нейтронных полей широкого энергетического спектра за защитными экранами ядерно-физических установок.

* E-mail: chizhov@jinr.ru

** E-mail: kchizhov@jinr.ru

В спектрометре Боннера для регистрации быстрых нейтронов используются шары-замедлители различного диаметра. Поэтому функции отклика (ФО) (чувствительности) спектрометра, описывающие его способность регистрировать нейтроны определенных энергий после замедления, являются его основными характеристиками.

Поскольку ФО спектрометра Боннера, как правило, не являются линейно независимыми, задача восстановления нейтронных спектров по показаниям нескольких измерений становится некорректной, требующей для своего решения применения методов регуляризации. Для этого в предыдущих работах мы использовали регуляризацию Тихонова (см., например, [2]). В данной работе применяется альтернативный метод, основанный на итерационном алгоритме Ландвебера [3], который был разработан для решения плохо обусловленных задач. Однако алгоритм Ландвебера во время итераций может становиться неустойчивым. Поэтому предлагается дополнить алгоритм методом усеченного сингулярного разложения, что делает итерационную процедуру более сходящейся.

ИЗМЕРЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРОМЕТРА БОННЕРА

С математической точки зрения результаты измерений описываются системой интегральных уравнений Фредгольма первого рода:

$$\int_{E_{\min}}^{E_{\max}} K_j(E) \varphi(E) dE = Q_j, \quad j = 1, \dots, M, \quad (1)$$

где Q_j — число отсчетов спектрометра (в единицу времени) для j -го шара; $K_j(E)$ — его ФО, а M — количество шаров, использованных для измерений. Пределы интегрирования $E_{\min}$ и $E_{\max}$ определяются характерными энергиями регистрируемых нейтронов.

Для решения системы интегральных уравнений (1) используем анзац для представления спектра нейтронов $\varphi(E)E$ в виде суперпозиции смещенных полиномов Лежандра по новой переменной, называемой лентаргией $u(E) = \lg(E/E_{\min})$ [2, 4],

$$\Phi(u) \equiv \varphi(u)E(u) = \sum_{i=1}^N C_i P_{i-1}(2u/l_E - 1), \quad (2)$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра порядка n . В результате приходим к системе N линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов C_i , которую можно представить в следующем матричном виде:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}, \quad (3)$$

где элементы матрицы $\mathbf{A}_{M \times N}$ определяются как

$$A_{ji} = \ln 10 \int_0^{l_E} K_j(u) P_{i-1}(2u/l_E - 1) du, \quad (4)$$

и матричные столбцы: $\mathbf{C}^T = (C_1, \dots, C_N)$, $\mathbf{Q}^T = (Q_1, \dots, Q_M)$, индекс T обозначает транспонирование.

МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРА НА ОСНОВЕ УСЕЧЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ИТЕРАТИВНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

Поскольку матрица $\mathbf{A}$ оказывается плохо обусловленной, это делает невозможным решение системы уравнений (3) методом прямого обращения. Для численного решения этой системы используем итерационный алгоритм Ландвебера. Чтобы повысить сходимость итерационной процедуры, в левой части уравнения (3) предлагаем вместо матрицы $\mathbf{A}$ использовать ее усеченное сингулярное разложение, имеющее заведомо меньшее число обусловленности. Кроме того, анализ в рамках усеченного сингулярного разложения позволяет получить приближенный спектр нейтронов, который удобно использовать в качестве нулевого приближения в итеративном алгоритме.

Для этого рассмотрим сингулярное разложение матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T, \quad (5)$$

где $\mathbf{U}_{M \times M}$, $\mathbf{V}_{N \times N}$ — ортогональные матрицы, называемые левым и правым сингулярными векторами, и в матрице $\mathbf{\Sigma}_{M \times N}$, имеющей всего M ненулевых элементов $\Sigma_{ii} = \sigma_i (i = 1, \dots, M)$, являющихся сингулярными числами матрицы $\mathbf{A}$ и удовлетворяющих условию $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_M > 0$, мы оставим только первые R сингулярных чисел, отбросив $(M - R)$ наименьших. В результате получаем усеченную квадратно-диагональную матрицу $\mathbf{\Sigma}_R = \text{diag} \{ \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_R \}$ размером $R \times R$. Таким образом, матрица, построенная по типу (5) из произведения $\mathbf{\Sigma}_R$ с усеченными матрицами $\mathbf{U}_R$ размером $M \times R$ и $\mathbf{V}_R$ размером $N \times R$, т. е.

$$\mathbf{A}_R = \mathbf{U}_R \mathbf{\Sigma}_R \mathbf{V}_R^T, \quad (6)$$

будет усеченным сингулярным разложением матрицы $\mathbf{A}$. Тогда вариант уравнений (3) с усеченным сингулярным разложением будет иметь вид

$$\mathbf{A}_R^T \mathbf{A}_R \mathbf{C}_R = \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \quad (7)$$

для N новых коэффициентов $\mathbf{C}_R$.

В качестве критерия выбора параметра усечения R определим обеспечение положительной определенности спектра нейтронов:

$$\Phi_R(u) = \sum_{i=1}^N C_{R,i} P_{i-1} (2u/l_E - 1) \geq 0, \quad (8)$$

где коэффициенты $\mathbf{C}_R$ находятся из уравнений (7) с использованием псевдообратной матрицы $\mathbf{A}_R^T \mathbf{A}_R$ по формуле

$$\mathbf{C}_R = \mathbf{V}_R (\Sigma_R^{-1})^2 \mathbf{U}_R^T \mathbf{A}^T \mathbf{Q}. \quad (9)$$

Тогда коэффициенты (9) можно рассматривать как нулевое приближение в алгоритме Ландвебера для решения системы уравнений (7), в котором используются следующие итерационные соотношения:

$$\mathbf{C}_R^{(k+1)} = (\mathbf{I} - \tau \mathbf{A}_R^T \mathbf{A}_R \mathbf{C}_R^{(k)}) + \tau \mathbf{A}^T \mathbf{Q}, \quad (10)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица и фактор релаксации $0 < \tau < 2/\sigma_1^2$. А критерием выбора числа итераций K является требование приближения невязки к относительной погрешности измерений δ :

$$\|\mathbf{A}_R \mathbf{C}_R^{(K)} - \mathbf{Q}\|^2 \leq \delta^2 \|\mathbf{Q}\|^2, \quad (11)$$

при условии, что спектр

$$\Phi_R^K(u) = \sum_{i=1}^N C_{R,i}^{(K)} P_{i-1} (2u/l_E - 1) \quad (12)$$

по-прежнему положительно определен.

Стоит отметить, что параметр усечения определяет эффективный ранг матрицы $\mathbf{A}$ и может быть связан с реальным числом шаров-замедлителей спектрометра, необходимых для надежной регистрации спектров нейтронов. В соответствии с этим из процесса измерений можно исключить замедлители, ФО которых имеют схожую форму, что позволит более оперативно оценивать радиационную обстановку. Задача выбора оптимального набора детекторов на основе весовых коэффициентов в регуляризации Тихонова ранее рассматривалась в работе [5].

РЕЗУЛЬТАТЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СПЕКТРА НА ИРЕН

Предлагаемый метод восстановления спектров нейтронов был протестирован на примере данных, полученных при измерениях спектрометром Боннера в коридоре напротив входа в машинный зал установки ИРЕН, как это было сделано в работе [4]. Восстановление было выполнено в диапазоне значений энергии от $E_{\min} = 10^{-8}$ МэВ до $E_{\max} = 65$ МэВ с использованием в уравнении (2) $N = 15$ полиномов

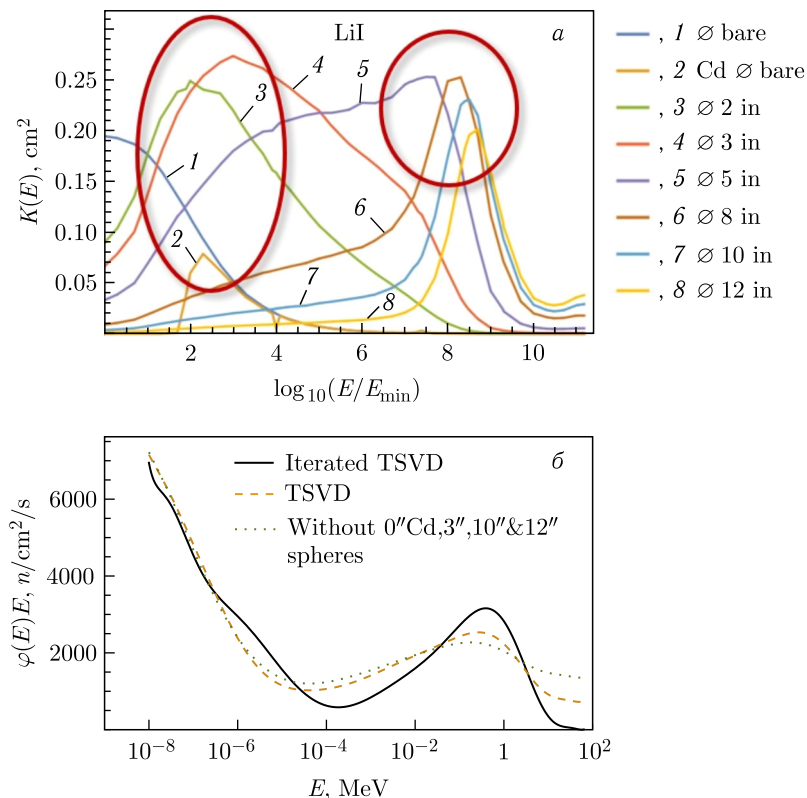


Рис. 1. ФО детектора $\text{LiI}(\text{Eu})$ для различных вариантов замедлителей [6] (а) и спектры, восстановленные методами усеченного сингулярного разложения (штриховая линия), итераций (сплошная линия) и сокращенного набора шаров-замедлителей (пунктирная линия) (б)

Лежандра. Для выполнения критерия (8) мы выбрали параметр усечения $R = 4$, уменьшив тем самым эффективный ранг матрицы $\mathbf{A}$ вдвое. Это можно объяснить тем, что, как показано овалами на рис. 1, а, некоторые ФО выглядят довольно похожими. Поэтому не кажется странным, что, проводя измерения с ограниченным (половинным) набором замедлителей, мы в принципе получили удовлетворительное восстановление спектра (с относительной погрешностью $\delta_D = 0,049$, т. е. 4,9%), позволяющее делать адекватные оценки радиационной обстановки.

Используя коэффициенты (9) с $R = 4$ в качестве нулевого приближения, мы установили, что $K = 1150$ итераций обеспечивают неотрицательность спектра (12), достигая при этом относительной погрешности $\delta = 0,029$ (2,9%), что ниже, чем в других методах (см. [4]). Это свидетельствует об эффективности предлагаемого метода восстановления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для восстановления спектров нейтронов по показаниям многошарового спектрометра Боннера предложен метод, основанный на усеченном сингулярном разложении (TSVD) в сочетании с итерационным алгоритмом Ландвебера. На примере измерений на ИРЕН показано, что метод обеспечивает повышенную точность восстановления, а также определяет оптимальный набор шаров-замедлителей спектрометра для проведения корректных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bramblett R. L., Ewing R. I., Bonner T. W.* A New Type of Neutron Spectrometer // Nucl. Instr. Meth. 1960. V. 9, No. 1. P. 1–12.
2. *Chizhov K., Beskrovnaya L., Chizhov A.* Neutron Spectra Unfolding from Bonner Spectrometer Readings by the Regularization Method Using the Legendre Polynomials // Phys. Part. Nucl. 2024. V. 55, No. 3. P. 532–534.
3. *Landweber L.* An Iteration Formula for Fredholm Integral Equations of the First Kind // Amer. J. Math. 1951. V. 73, No. 3. P. 615–624.
4. *Chizhov K., Beskrovnaya L., Chizhov A.* Neutron Spectrum Unfolding Method Based on Shifted Legendre Polynomials, Its Application to the IREN Facility // Phys. Part. Nucl. Lett. 2025. V. 22, No. 2. P. 337–340.
5. *Chizhov A., Chizhov K.* Optimization Approach to Neutron Spectra Unfolding with Bonner Multi-Sphere Spectrometer // J. Math. Model. 2024. V. 8, No. 3. P. 89–90.
6. *Мартинкович Й., Тимошенко Г. Н.* Расчет функций чувствительности многошарового спектрометра нейтронов в области энергий до 20 МэВ. Препринт ОИЯИ Р16-2005-105. Дубна, 2005.