

D17-2026-28

Я. Текич^{1,*}, Ю. М. Шукринов^{2,3,**}

РЕЗУЛЬТАТЫ СОТРУДНИЧЕСТВА ОИЯИ–СЕРБИЯ
В ОБЛАСТИ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ СТРУКТУР

¹ Лаборатория теоретической физики и физики конденсированных сред Института ядерных наук «Винча», Университет Белграда, Белград, 11001, Сербия

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, 141980, Россия

³ Государственный университет «Дубна», Дубна, 141980, Россия

* E-mail: jasminat@vin.bg.ac.rs

** E-mail: shukrinv@theor.jinr.ru

Текич Я., Шукринов Ю. М.

D17-2026-28

Результаты сотрудничества ОИЯИ–Сербия в области теоретических исследований джозефсоновских структур

Представлен обзор результатов, полученных в рамках сотрудничества ОИЯИ–Сербия в области теоретического исследования джозефсоновских наноструктур. В частности, наша работа включает исследования широкого спектра нелинейных динамических эффектов в различных системах связанных джозефсоновских переходов, массивах джозефсоновских переходов и структурах сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник, которые в настоящее время интенсивно исследуются в связи с потенциальными областями применения в сверхпроводниковой электронике и спинтронике.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2026

Tečić J., Shukrinov Yu. M.

D17-2026-28

Results of JINR–Serbia Cooperation in the Field of Theoretical Studies of Josephson Structures

An overview of the results obtained within the framework of the JINR–Serbia collaboration in the field of theoretical study of Josephson nanostructures is presented. In particular, our work has involved studies of a wide variety of nonlinear dynamic effects in various systems of coupled Josephson junctions, arrays of Josephson junctions, and superconductor–ferromagnet–superconductor structures, which are currently being investigated intensively due to potential applications in superconducting electronics and spintronics.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2026

ВВЕДЕНИЕ

Научное сотрудничество между ОИЯИ (Дубна) и Институтом ядерных наук «Винча» имеет долгую историю, начавшуюся в 1970-е гг. с сотрудничества ученых из Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова и отдела теоретической физики ИЯН. 20 апреля 2007 г. начался новый этап более тесного партнерства между ОИЯИ и Республикой Сербией, когда было подписано Соглашение между Объединенным институтом ядерных исследований и Министерством науки и окружающей среды Республики Сербии (рис. 1).

Дорожная карта развития была утверждена и представлена в марте 2017 г. во время мероприятий в Белграде, посвященных 10-летию участия Республики Сербии в ОИЯИ в качестве ассоциированного члена (рис. 2). Основной целью реализации Дорожной карты было создание условий для полноправного членства Сербии в ОИЯИ, а также значительное расширение участия сербских ученых в деятельности ОИЯИ. В 2025 г. государ-

The milestones of the cooperation



Protocol on stimulation of the joint work
Dubna, 26 March, 2009

- ❖ Nomination of JCC
- ❖ First contribution to JINR
- ❖ Future of TESLA project

Regular communication with Serbian embassy in Moscow started

JCC-1 23 June 2010, Dubna



A. Sissakian, D. Kamanin, M. Krmar, J. Kurjak

Visit of the JINR Directorate to Belgrade, May 2009
Yu. Oganessian gave a lecture on the discovery of superheavy elements in Serbian Academy of Sciences and Arts as its foreign member.

JCC-2 29 March 2011, Belgrade



JCC-3 22 April 2014, Belgrade



The JINR delegation visiting Mr. B. Đelić, the minister of scientific and technical development of Serbia.



At the "Vinča" Institute of Nuclear Sciences in front of the first ECR ion source of TESLA project



Рис. 1. Важные этапы сотрудничества ОИЯИ–Сербия



Рис. 2. Дни ОИЯИ в Сербии. 10 лет вместе

ственный секретарь Министерства науки, технологического развития и инноваций Республики Сербии представил заместителя директора Института ядерных наук «Винча» Марию Янкович в качестве нового координатора сотрудничества между Сербией и ОИЯИ.

Наше сотрудничество в области физических явлений в джозефсоновских структурах между группой д.ф.-м.н. Ю. М. Шукринова из ЛТФ ОИЯИ и сербскими учеными началось в августе 2016 г. во время визита доктора Я. Текич (Лаборатория теоретической физики и физики конденсированных сред ИЯН «Винча») и доктора П. Мали (кафедра физики, факультет естественных наук, Нови-Садский университет) в Лабораторию теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова. За несколько лет до этого визита работа Я. Текич по динамике в рамках модели Френкеля–Конторовой (ФК-модели) с управляемым воздействием уже привлекала внимание группы Ю. М. Шукринова, поскольку была тесно связана с их работой над джозефсоновскими переходами (ДП). ФК-модель обеспечивает хорошую теоретическую основу для описания многих явлений в системах джозефсоновских переходов, и, таким образом, ее изучение может дать важные сведения о физике систем. Поскольку группа Ю. М. Шукринова уже работала над хаотическими явлениями в ДП, а Я. Текич имела многолетний опыт работы с ФК-моделью совместно с профессорами Бамби Ху и Олегом Брауном в Гонконге, первые проекты сотрудничества были посвящены

хаосу и динамике в ФК-модели с переменным током и в джозефсоновских переходах. Эти исследования положили начало многолетнему сотрудничеству в области нелинейной физики, физики джозефсоновских переходов и в последнее время в области временных кристаллов. За прошедшие десять лет был получен ряд интересных результатов, которые описаны здесь в хронологическом порядке.

В разд. 1 представлены исследования синхронизации, хаоса и гистерезиса в ФК-модели, управляемой постоянным и переменным током, где в п. 1.1 рассмотрены ФК-модель с сильной диссипацией и одномерная система внутренних джозефсоновских переходов. Исследована роль диссипации в возникновении хаоса, и показано, что лестничная структура на примере вольт-амперной характеристики может возникать даже при отсутствии хаоса. Это описание было далее расширено в п. 1.2 до случая со слабой диссипацией, где наличие инерционных эффектов приводит к субгармонической синхронизации мод, хаосу и гистерезисному поведению.

Исследования кольцевых джозефсоновских переходов (КДП) представлены в разд. 2, где в п. 2.1 показана затухающая динамика КДП под воздействием внешнего излучения, а в п. 2.2 представлены результаты исследования резонансных явлений и синхронизации.

В разд. 3 продемонстрировано проявление хаоса вдоль резонансной ветви на примере вольт-амперной характеристики системы связанных джозефсоновских переходов, шунтированных резистивными, индуктивными и емкостными элементами цепи. Результаты проанализированы в широком интервале параметров системы.

Хаотическая динамика, возникающая из-за связи магнитного монодомена и джозефсоновского тока, продемонстрирована в разд. 4.

В разд. 5 представлен ряд уникальных эффектов, характеризующих динамику джозефсоновских переходов с ферромагнитным интерфейсом. В п. 5.1 продемонстрировано возникновение ступенек Буздина, Шапиро, а также химерных ступенек, а в п. 5.2 проанализированы уникальные свойства ступенек Буздина. В частности, представлены результаты исследования синхронизации и резонанса в джозефсоновском φ_0 -переходе при наличии внешнего электромагнитного излучения, когда учитывается не только электрическая, но и магнитная составляющая излучения.

В разд. 6 показано, что гибридные джозефсоновские переходы могут обеспечить основу для реализации одного из самых спорных явлений современной физики — временного кристалла. А именно, продемонстрировано, что модификация критического тока магнитным моментом может привести к внутреннему пространственно-временному кристаллическому порядку.

1. МОДЕЛЬ ФРЕНКЕЛЯ–КОНТОРОВОЙ: СИНХРОНИЗАЦИЯ, ХАОС И ГИСТЕРЕЗИС

Внешне управляемые системы демонстрируют очень богатую динамику как на макроскопическом, так и на микроскопическом уровнях. Одной из моделей, способных уловить сущность управляемой динамики в этих

системах, является ФК-модель под действием внешних периодических сил [1, 2, 3, 4]. Интенсивные исследования явлений синхронизации и резонанса в проводниках с волнами зарядовой или спиновой плотности, вихревых решетках и массивах джозефсоновских переходов стали основным импульсом для теоретических исследований управляемой ФК-модели. Часто называемая одной из самых простых и поддающихся анализу среди многочастичных моделей с конкурирующими взаимодействиями, стандартная ФК-модель представляет собой цепочку гармонически взаимодействующих идентичных частиц, подверженных синусоидальному потенциалу подложки [1, 2].

Ее можно описать следующим гамильтонианом [2]:

$$H = \sum_i \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{du_i}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} (u_{i+1} + u_i - a_0) + \frac{K}{(2\pi)^2} [1 - \cos(2\pi u_i)] \right\}. \quad (1)$$

В этой форме гамильтониан описывает гармоническую цепочку взаимодействующих частиц с единичной массой и положением u_i , где a_0 — равновесное расстояние межатомного потенциала с силой пиннинга K и периодичностью 1.

При приложении внешних сил постоянного и переменного тока происходит синхронизация частоты движения частиц по периодическому потенциалу с частотой внешней силы [2]. На макроскопическом уровне этот эффект характеризуется появлением ступенчатой структуры Шапиро [5] на кривой зависимости средней скорости от средней внешней движущей силы $\bar{v}(\bar{F})$. Возникающие ступени относят к гармоническим, если синхронизация возникает на целочисленных кратных частоте переменного тока, или к субгармоническим, если она возникает на нецелочисленных рациональных кратных.

1.1. Лестничная структура и отсутствие хаоса в модели Френкеля–Конторовой с сильной диссипацией при постоянном и переменном токе. Вдохновленные нашими предыдущими результатами [6, 7] и многочисленными теоретическими и экспериментальными результатами в системах с волнами зарядовой плотности и системах джозефсоновских переходов, мы начали наш первый совместный проект, который был посвящен нелинейной динамике в рамках ФК-модели с сильной диссипацией, управляемой переменным током. Эти системы представляют собой типичные примеры диссипативных физических систем, где инерция не имеет физического значения и где долговременное поведение в значительной степени не зависит от способа запуска системы.

В работе [8] мы подробно исследовали появление и порядок субгармонических ступеней Шапиро, уделяя особое внимание признакам хаоса в ФК-модели с сильной диссипацией, управляемой постоянным и переменным током. Это исследование также сопровождается сравнением одномерных систем внутренних джозефсоновских переходов, облучаемых электромагнитными волнами.

Нами была изучена лестничная структура (Devil's staircase), возникающая из-за полной синхронизации мод нехаотичной системы — диссипативной ФК-модели, управляемой постоянным и переменным током с деформируемым потенциалом подложки.

На рис. 3 представлен сравнительный анализ хаотического поведения максимального показателя Ляпунова (LE) в ФК-модели с сильной диссипацией и одномерных стеках внутренних джозефсоновских переходов при наличии внешнего излучения. Результаты наглядно демонстрируют исчезновение хаотического поведения с увеличением диссипации.

Важно отметить, что изучаемая здесь ФК-модель имеет множество степеней свободы, как и система джозефсоновских переходов. Таким образом, отсутствие хаоса в ФК-модели с сильной диссипацией нельзя объяснить уменьшением эффективной размерности системы. Хотя хаос не был обнаружен, иерархическое упорядочение ступенек Шапиро стало возможным благодаря использованию ранее предложенной формулы непрерывной дро-

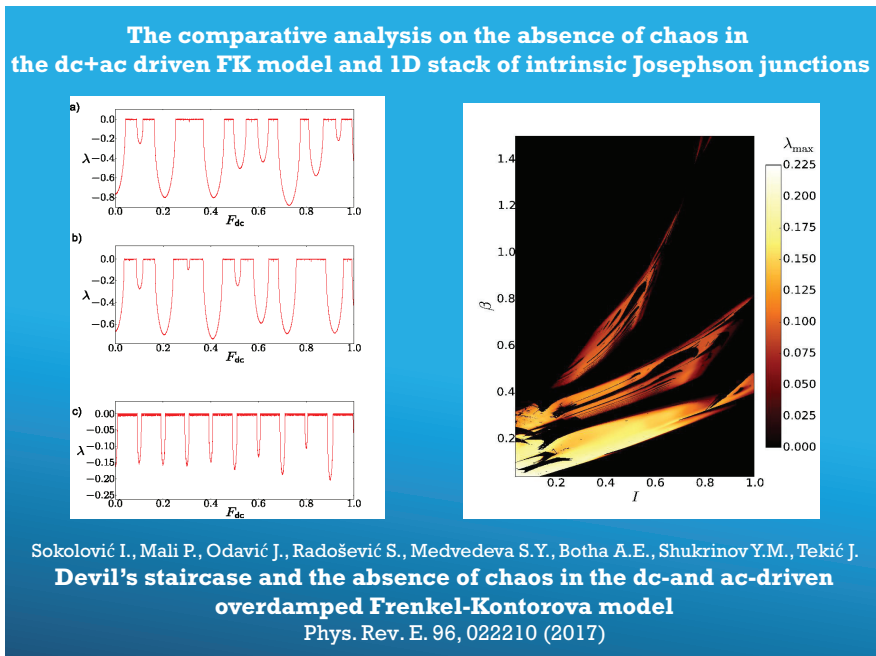


Рис. 3. Слева: демонстрация отсутствия хаоса в модели ФК с сильной диссипацией, управляемой постоянным и переменным током, и соответствующим одномерным стеком внутренних джозефсоновских переходов. Максимальный показатель Ляпунова как функция амплитуды переменного тока при $K = 4$, $\nu_0 = 0,2$, $\omega = 12$ и при $F_{ac} = 1,5, 1,8$ и 10 ($a-c$ соответственно). Справа: максимальный показатель Ляпунова как функция тока смещения I и параметра затухания β для стека из семи переходов. Адаптировано из работы [8]

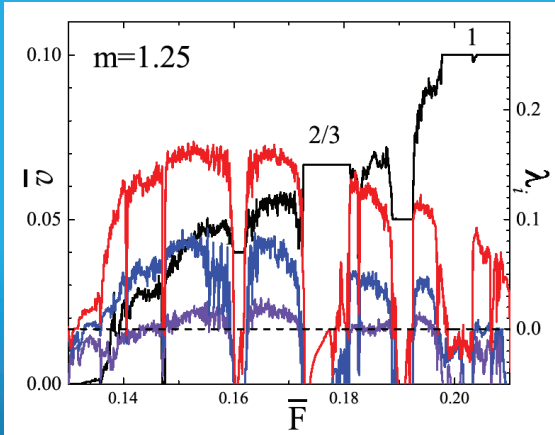
би. Отсутствие хаоса можно объяснить сильной диссипацией и правилом Миддлтона о непрохождении, т. е. в одномерной цепочке частицы должны сохранять свой порядок, или, другими словами, они не могут перепрыгивать друг через друга во время движения. Сравнительный анализ одномерного стека джозефсоновских переходов подтвердил исчезновение хаоса с увеличением диссипации. В результате этого сравнения были также выявлены другие общие динамические особенности.

1.2. Инерционные эффекты в модели Френкеля–Конторовой с затуханием при постоянном и переменном токе: субгармонические ступеньки, хаос и гистерезис. Мы продолжили исследования инерционных эффектов в динамике ФК-модели, управляемой постоянным и переменным током [9]. В частности, исследовалось, как масса частиц влияет на субгармонические ступеньки, хаос и гистерезис.

Механизм, в конечном итоге приводящий к хаосу, — это взаимодействие между различными резонансами, вызванное нелинейной связью и перекрытием резонансных областей, когда связь превышает определенное критическое значение. Тем не менее универсальность фрактальной размерности и универсальность этого сценария были поставлены под сомнение многими авторами. В нашей предыдущей работе [8] мы показали, что модель ФК с сильной диссипацией представляет собой один из примеров, где эта универсальность нарушается. ФК-модель с сильной диссипацией, управляемая постоянным и переменным током, обладает интересным свойством: несмотря на полную нехаотичность, она демонстрирует структуру «лестницы дьявола», возникающую из-за полной синхронизации мод с фрактальной размерностью, которая изменяется в зависимости от параметров системы. Отсутствие хаоса объясняется диссипативным характером системы и правилом Миддлтона о невозможности прохождения сигнала, которое применяется к системам с сильной диссипацией с выпуклым межэтомным взаимодействием и согласно которому порядок частиц должен сохраняться в динамике.

Здесь мы демонстрируем [9], что по мере того, как модель ФК становится слабодиссипируемой, начинают возникать новые явления, такие как появление новых субгармонических ступеней, хаос и гистерезис, изначально отсутствовавшие в режиме с сильной диссипацией. По мере увеличения массы и перехода системы из сильно в слабо демпфированный предел одним из непосредственных эффектов стало появление ряда субгармонических ступеней в зависимости средней скорости от средней движущей силы в соизмеримых структурах. При определенных значениях параметров субгармонические ступени разделялись хаотическими окнами, в то время как вся структура сохраняла масштабирование, аналогичное исходной ступенчатой зависимости. На рис.4 представлены показатели Ляпунова для области между нулевой и первой гармоникой, где наличие более одного положительного показателя Ляпунова явно указывает на присутствие гиперхаоса.

The emergence of chaos



Tečić J., Botha A.E., Mali P. and Shukrinov Y.M.,

Inertial effects in the dc+ac driven underdamped Frenkel-Kontorova model:

Subharmonic steps, chaos, and hysteresis

Phys. Rev. E. 99, 022206 (2019)

Рис. 4. Демонстрация хаоса в модели ФК со слабой диссипацией с постоянным и переменным током. Представлены показатели Ляпунова λ_i как функции средней движущей силы \overline{F} и соответствующая функция отклика $\overline{v}(\overline{F})$ в области между нулем и первым гармоническим шагом при $m = 1,25$. Различные цвета λ_i соответствуют различным показателям Ляпунова. Адаптировано из работы [9]

Масса частиц также определяла их чувствительность к силам, управляющим их динамикой. В зависимости от массы они демонстрируют три типа динамики: от динамической синхронизации мод с хаотическими окнами до типичного отклика постоянного тока и, по сути, отклика свободной частицы. Наш анализ динамики как в направлении восходящей, так и нисходящей силы показал, что система демонстрирует не только гистерезис, но и большие ступени Шапиро в направлении нисходящей силы даже в случаях, когда динамическая синхронизация мод в направлении восходящей силы не наблюдалась [9].

В пределе с сильной диссипацией наблюдалась ступенчатая структура, возникающая из-за полной синхронизации мод нехаотической системы. При включении инерционного члена, в отличие от случая с сильной диссипацией, увеличение массы приводило к появлению целой серии субгармонических ступеней в лестничной структуре средней скорости как функции средней движущей силы. При определенных значениях параметров субгармонические ступени разделялись хаотическими окнами, в то время как вся структура сохраняла масштаб, аналогичный исходной лестнице.

Наши результаты были представлены на 13-й Международной конференции по хаотическому моделированию и симуляции [10], где мы показали развитие хаотической динамики в ФК-модели, управляемой постоянным и переменным током.

2. ФИЗИКА И ПРИМЕНЕНИЕ КОЛЬЦЕВЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

При создании новых логических элементов особенно важны длинные джозефсоновские переходы, описываемые непрерывным уравнением синус-Гордона (SG), и параллельные массивы джозефсоновских переходов, описываемые их дискретным аналогом, т.е. ФК-моделью [1, 2, 11]. Они важны для развития различных областей — от генерации и детектирования электромагнитного излучения в низком терагерцовом диапазоне, квантовых информационных технологий [12, 13, 14, 15], сверхпроводящих метаматериалов [16] до таких отдаленных областей, как биология [17]. Идея о том, что флюксон ведет себя как частицеподобная солитонная волна, которой можно манипулировать и управлять, послужила мотивацией для создания логической схемы с использованием джозефсоновского флюксона в качестве элементарных битов информации [12, 13].

При создании новых логических элементов особое значение имеют длинные JJ-элементы [11], описываемые непрерывным уравнением синус-Гордона (SG), и параллельные массивы JJ-элементов, описываемые их дискретным аналогом, т.е. моделью ФК [1, 2, 11]. Однако в длинных JJ движение флюксона сильно зависит от геометрии и границ переходов, что делает изучение динамики флюксона очень сложной задачей. Эти проблемы привели к созданию кольцевых джозефсоновских переходов [18] как идеальных систем для изучения динамики флюксона, которые обеспечивают невозмущенное и регулируемое движение флюксона [19, 20, 21].

Здесь мы представляем результаты нашего исследования кольцевых джозефсоновских переходов. В п.2.1 мы демонстрируем, что в кольцевой решетке слабозатухающих джозефсоновских переходов при внешнем излучении не только количество, но и тип вращающихся возбуждений (флюксонов или антифлюксонов) определяют способность системы синхронизироваться с внешним излучением. В п.2.2 резонансные явления при отсутствии внешнего излучения были проанализированы в широком диапазоне токов и напряжений для различного количества и типов возбуждений, присутствующих в системе.

2.1. Кольцевые джозефсоновские переходы, управляемые переменным током: недостающие ступени Шапиро. Одно из наиболее интересных свойств систем на основе джозефсоновских переходов — это их способность демонстрировать различные синхронизационные и резонансные явления. При отсутствии внешнего излучения на вольт-амперной характеристике появляются так называемые ступеньки нулевого поля (ZFS) [22] — из-за резонансного движения в системе флюксонов и антифлюксонов. Если же, с другой стороны, прикладывается внешнее из-

лучение, вольт-амперная характеристика демонстрирует хорошо известные ступеньки Шапиро [5] — в результате синхронизации джозефсоновских осцилляций с внешней частотой. Хотя ступени Шапиро в настоящее время являются одним из наиболее известных проявлений частотной синхронизации, большинство работ [20, 21, 24] по кольцевым джозефсоновским переходам (КДП) были сосредоточены на явлениях резонанса при отсутствии внешнего излучения.

В нашем исследовании [23] мы изучили затухающую динамику кольцевого массива джозефсоновских переходов под воздействием внешнего излучения. В отличие от предыдущих исследований кольцевых джозефсоновских переходов, которые в основном были сосредоточены на случае одного захваченного флюксона в небольшом диапазоне токов и напряжений [24, 21], мы исследовали ступени Шапиро в различных случаях циркулирующих возбуждений (флюксонов и антифлюксонов) в широком

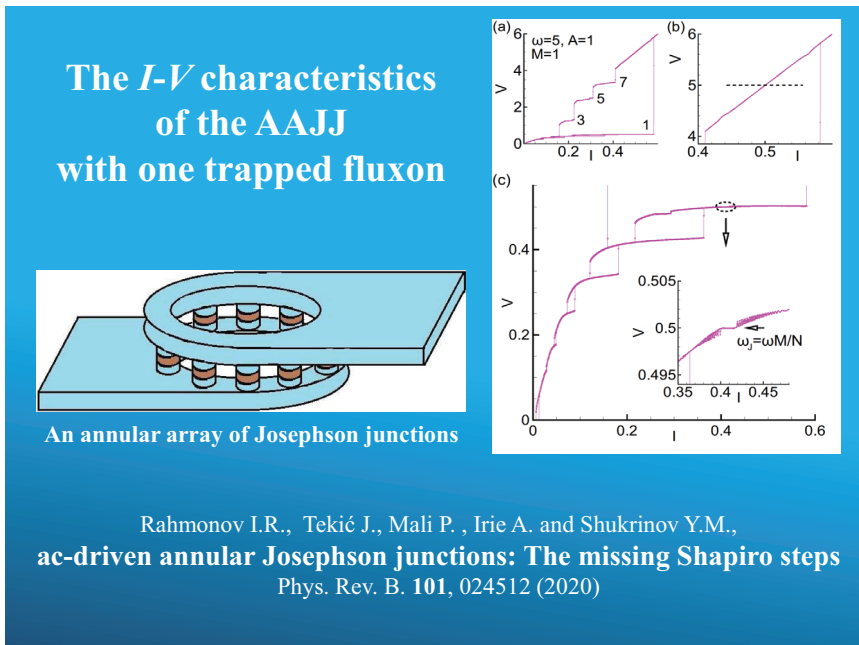


Рис. 5. Демонстрация отсутствия ступенек Шапиро на вольт-амперной характеристике кольцевого массива джозефсоновских переходов с одним захваченным флюксоном. *a)* Вольт-амперная характеристика кольцевого массива джозефсоновских переходов с амплитудой и частотой внешнего излучения $A = 1$ и $\omega = 5$ соответственно. Числа 1, 3, 5 и 7 указывают общее число флюксонов и антифлюксонов. *b)* Отсутствие ступеньки Шапиро на вольт-амперной характеристике. Пунктирной линией отмечено место, где должна быть ступенька. *c)* График высокого разрешения ступеньки $n = 1$, на котором видна ступенька Шапиро, показанная на вставке. Адаптировано из работы [23]

диапазоне токов и напряжений, чтобы получить полную картину динамического поведения. Удивительно, но наши результаты показали, что способность системы синхронизироваться с внешним излучением зависит не только от количества флюксонов, но и от типа возбуждений.

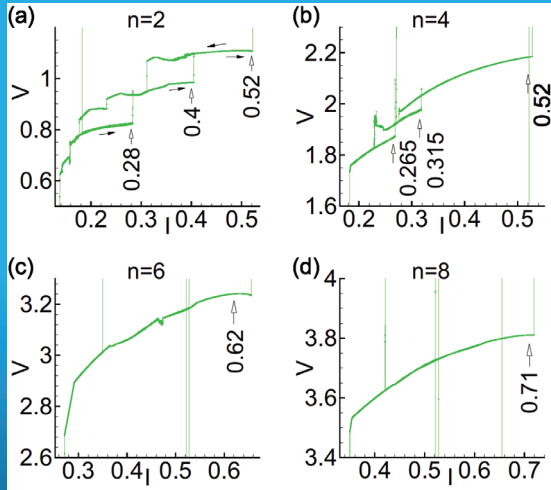
На рис. 5 показана вольт-амперная характеристика кольцевого массива ДП с одним захваченным флюксонем ($M = 1$). Поскольку помимо одного захваченного флюксона дополнительные возбуждения появляются только в виде пар флюксон–антифлюксон, система демонстрирует ступеньки нулевого поля для $n = 1, 3, 5$ и 7 . В этом случае для приложенной частоты внешнего излучения $\omega = 5$ на вольт-амперной характеристике мы ожидали бы увидеть ступеньку Шапиро при $V = 5$, а также другие субгармонические ступеньки. Однако, как видно на рис. 5, *a*, ступенька Шапиро отсутствует. Ступеньки Шапиро наблюдались на вольт-амперной характеристике только в системе с захваченными флюксонами или в системе с парами флюксон–антифлюксон (рис. 5, *a*). Если захваченные флюксоны циркулируют одновременно с парами флюксон–антифлюксон, ступеньки Шапиро отсутствуют независимо от амплитуды или частоты приложенного внешнего излучения.

2.2. Резонансные явления в кольцевой решетке слабодемпфированных джозефсоновских переходов. Резонансные явления в системах на основе джозефсоновских переходов уже много лет являются активной темой исследований в науке и технике. С фундаментальной точки зрения джозефсоновские переходы представляют собой отличные устройства для изучения нелинейной динамики дискретных систем, поскольку они являются экспериментальной реализацией ФК-модели (дискретная модель синус-Гордона) [1, 2, 11].

В работе [25] мы исследовали возникновение резонансных явлений в кольцевой системе слабозатухающих джозефсоновских переходов. Если в системе не было захваченных флюксонов, динамика определялась движением пар флюксон–антифлюксон. Если же, с другой стороны, присутствовали захваченные флюксоны, то помимо их движения система могла также демонстрировать одновременное движение захваченных флюксонов и пар флюксон–антифлюксон. Связь между вращающимися возбуждениями (флюксонами и антифлюксонами) и джозефсоновской частотой приводила к появлению ступенек нулевого поля на вольт-амперной характеристике, число которых определялось количеством переходов и общим числом возбуждений, присутствующих в системе. Полученные результаты показали, что ветвление ступеней нулевого поля, обусловленное резонансом между вращающимися возбуждениями и колебаниями плазмы в их хвостах, возникало только на нижних ступенях и полностью исчезало на верхних, как показано на рис. 6.

Сравнительный анализ систем без захваченных флюксонов и систем с ними показал корреляцию между их вольт-амперными характеристиками. Более детальные расчеты выявили некоторые особенности ступеней нулевого поля, такие как дополнительная ветвь, обусловленная резонансом

The branching of zero-field steps



Shukrinov Y.M. *et al.*,

Josephson structures with phase shift

The XXIX Symposium "Nanophysics and Nanoelectronics", Nizhny Novgorod 2025

Рис. 6. Ветвление ступенек нулевого поля в кольцевой системе джозефсоновских переходов. Графики высокого разрешения для ступенек нулевого поля при $n = 2, 4, 6$ и 8 (соответственно $a-d$). a) Вольт-амперная характеристика кольцевой системы джозефсоновских переходов при $M = 1$ в области ступени $n = 1$ для однофлюксонного состояния. b) Зависимость напряжения от времени на верхней ветви однофлюксонной ступеньки нулевого поля для значения тока, отмеченного стрелкой. Адаптировано из работы [25]

между пульсирующим флюксоном и джозефсоновской частотой. Исследование систем с одинаковым числом, но разными типами возбуждений показало дополнительно, что их динамика определяется не только числом, но и типом возбуждений, т.е. системы с одинаковым числом, но разными типами возбуждений имели разные вольт-амперные характеристики.

Результаты этих исследований также были представлены на XXII и XXIV Международных симпозиумах «Нанопизика и наноэлектроника» в Нижнем Новгороде в 2018 [26] и 2020 гг. [27].

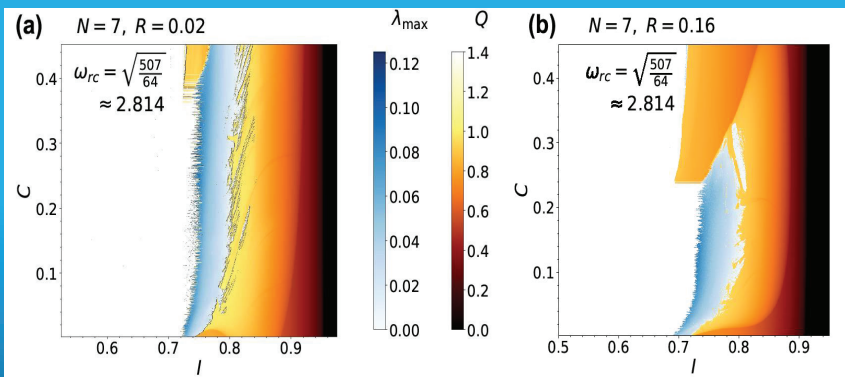
3. ХАОС В СИСТЕМЕ ВНУТРЕННИХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДОВ

Интерес к хаосу в ДП возник в начале 1980-х гг. с работы Хубермана и др. [28], в которой экспериментально наблюдаемое «явление нарастания шума» связано с детерминированным хаосом, наблюдаемым в численных моделях одиночного джозефсоновского перехода с ВЧ-смещением. Хотя

хаос в одиночных ДП изучен достаточно хорошо, хаос и его управление в системах связанных джозефсоновских переходов (JJ) остаются активной областью исследований. Стандарт напряжения [29], хаос и управление хаосом в ДП стали важной темой исследований в настоящее время.

В последнее время было предложено несколько различных форм управления хаосом не только с целью подавления хаоса, но и для установления более надежной синхронизации переходов. Они могут быть либо в хаотическом состоянии для приложений, связанных с синхронизацией хаоса, либо в регулярном состоянии, где переходы могут использоваться для обнаружения слабых электромагнитных сигналов в присутствии шума или для расшифровки определенных типов шумовых компонент в зашумленном сигнале [30]. Синхронизированные джозефсоновские переходы в высокотемпературных сверхпроводниках являются перспективными кандидатами на роль достаточно легких и компактных генераторов терагерцовых волн.

The effect of rc -frequency on chaotic behavior



Botha A. E., Shukrinov Yu. M., and Tekić J.

Chaos along the rc -branch of RLC-shunted intrinsic Josephson junctions
Chaos Soliton Frac. **156**, 111865 (2022)

Рис. 7. Хаос на резонансной ветви RLC -шунтированных внутренних джозефсоновских переходов. Представлены цветové изображения максимального показателя Ляпунова и максимальной плотности заряда Q вдоль rc -ветви как функции емкости C и уменьшающегося постоянного тока смещения I при $R = 0,02$ (a) и $R = 0,16$ (b). Синяя цветовая шкала для λ_{\max} наложена на плотность заряда, при этом все значения $\lambda_{\max} < 0,01$ оказываются отображенными прозрачно. I изменяется одновременно с C , чтобы частота $\omega_{rc} = 2,814$ оставалась постоянной. Адаптировано из работы [30]

В то время как излучение от одного джозефсоновского перехода чрезвычайно слабое, системы синхронизированных джозефсоновских переходов обладают мощностью излучения, достаточной для их применения на практике.

В нашей работе [30] мы исследовали появление хаоса на резонансной ветви шунтированной системы внутренних джозефсоновских переходов в высокотемпературном сверхпроводнике. Детальный анализ вольт-амперных характеристик, плотности электрического заряда и полного спектра показателей Ляпунова был проведен для двух различных случаев: когда параметры шунтирования изменялись таким образом, чтобы поддерживать фиксированное значение частоты резонансного контура, и когда изменения параметров шунтирования приводили к различным частотам.

Цветные изображения максимального показателя Ляпунова и максимальной плотности заряда вдоль резонансной ветви в зависимости от емкости и уменьшения постоянного тока смещения представлены на рис. 7. На основе рассчитанных электрических характеристик сверхпроводящих слоев и различных показателей хаоса, таких как показатели Ляпунова и сечения Пуанкаре, найдены области вольт-амперных характеристик с преобладанием хаоса, которые определяются частотой резонансного контура.

Исследование метрической энтропии и максимальной размерности Каплана-Йорка показывает, что размеры хаотических аттракторов, связанных с хаосом, не достигают плато, как в случае систем с сильным затуханием, а неограниченно возрастают с увеличением числа джозефсоновских переходов, демонстрируя многомерный хаос. Полученные результаты указывают на возможность управления хаосом в исследуемых системах.

4. ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА, ВОЗНИКАЮЩАЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МАГНИТНОГО МОНОДОМЕНА И ДЖОЗЕФСОНОВСКОГО ТОКА

Возможность электрического управления магнитными свойствами барьера посредством джозефсоновского тока и его аналога, т. е. магнитного управления джозефсоновским током, в последнее время привлекла большое внимание [31–38].

Обычный (сверхпроводник–изолятор–сверхпроводник) джозефсоновский переход не может проявлять хаос при отсутствии внешнего переменного сигнала, тогда как в джозефсоновском переходе сверхпроводник–ферромагнетик–сверхпроводник (СФС), известном как φ_0 -переход, магнитный слой эффективно обеспечивает две дополнительные степени свободы, которые могут способствовать хаотической динамике в результирующей четырехмерной автономной системе. Результаты работы [39] показывают, что благодаря сохранению величины магнитного момента два из вычисленных полных спектральных показателей Ляпунова всегда равны нулю.

Двумерные диаграммы бифуркации, аналогичные традиционным диаграммам изофиков, отображают различные периодичности и свойства синхронизации перехода в диапазонах параметров, доступных экспериментально. Было показано, что по мере уменьшения тока смещения I возникновение хаоса происходит до перехода в сверхпроводящее состояние.

На рис. 8, *a* и *b* иллюстрируется возникновение хаоса в джозефсоновском φ_0 -переходе с увеличением отношения джозефсоновской энергии к магнитной энергии G . Здесь можно увидеть полный спектр показателей Ляпунова, причем два из них тривиально равны нулю для любого I . На рис. 8, *c* показаны области хаоса, обозначенные положительными значениями максимального показателя Ляпунова как функции G и убывающего dc -напряжения. Рис. 8, *d* демонстрирует периодичность и синхронизацию в джозефсоновском φ_0 -переходе.

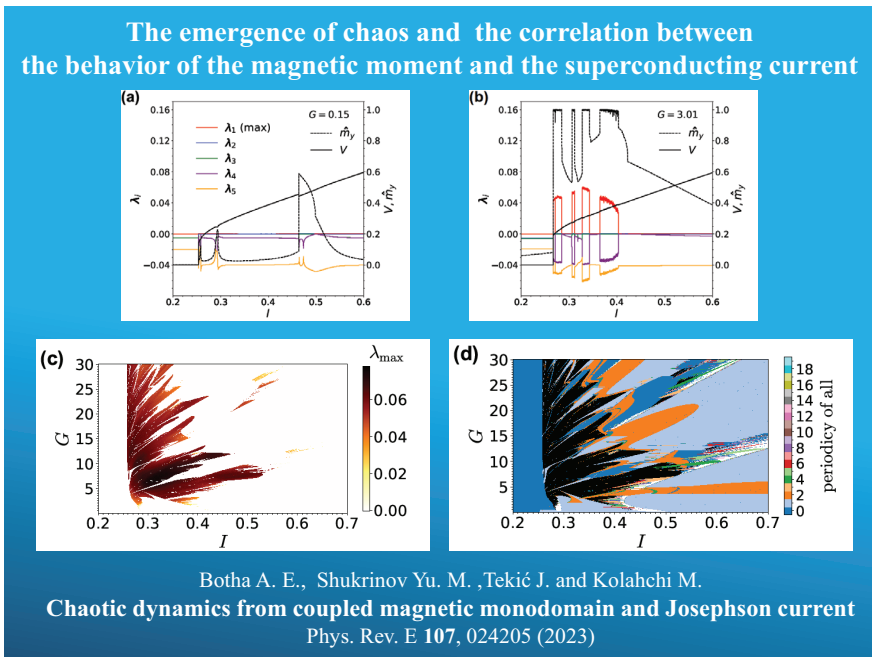


Рис. 8. Хаос, периодичность и синхронизация между магнитным моментом и сверхпроводящим током в джозефсоновском φ_0 -переходе. *a, b*) Возникновение хаоса в джозефсоновском φ_0 -переходе. Здесь V — усредненное по времени напряжение на переходе, а \hat{m}_y — максимальное значение y -компоненты намагниченности. λ_i — показатели Ляпунова. *c*) Хаотические области как функции отношения джозефсоновской энергии к магнитной энергии G . *d*) Демонстрация периодичности и синхронизации в джозефсоновском φ_0 -переходе. Здесь области, отмеченные синим цветом, соответствующим нулю, указывают на области, где не все переменные состояния имеют одинаковую периодичность, т. е. не полностью синхронизованы.

Адаптировано из работы [39]

Для понимания этого поведения мы построили диаграммы рекуррентности на основе временных рядов динамических переменных в хаотической области. Диаграмма рекуррентности (ДР) — это усовершенствованный метод нелинейного анализа данных, используемый для визуализации того, как часто и насколько близко траектория динамической системы возвращается в область фазового пространства [40]. В простейшей форме это визуализация квадратной матрицы, в которой индексы столбцов и строк соответствуют определенной паре равномерно расположенных моментов времени из траектории системы. На рис. 9 представлены ДР координаты магнитной системы и координаты перехода.

Наша работа по хаотическому поведению джозефсоновского φ_0 -перехода была представлена на двух международных конференциях. В 2023 г. исследование нелинейности, синхронизации и хаоса в аномальных ДП было представлено на международной конференции в Нижнем Новгороде [41]. Работа «Хаос в джозефсоновском φ_0 -переходе» была представлена на 14-й Международной конференции по хаотическому моделированию и симуляции в 2023 г. [42].

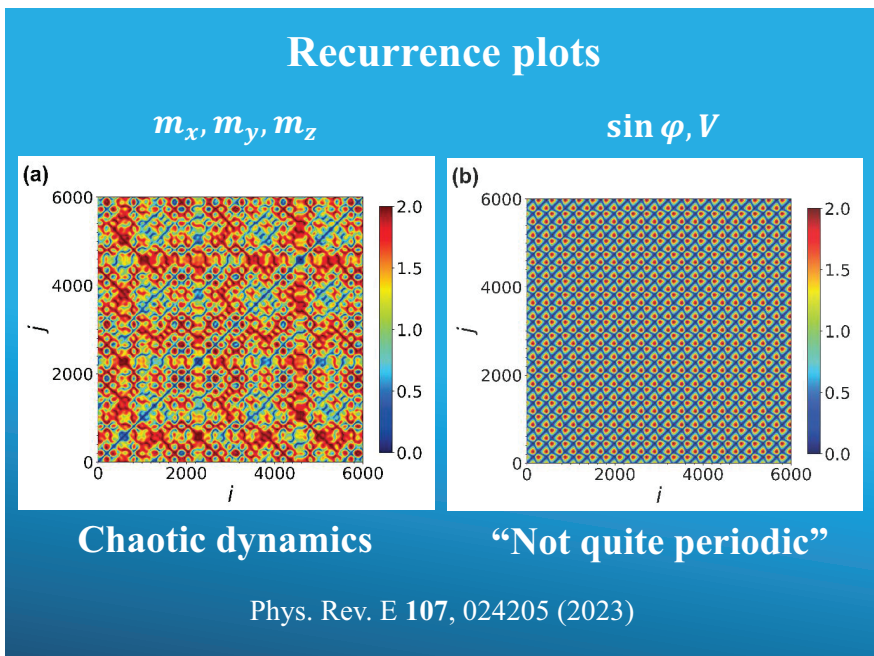


Рис. 9. Демонстрация хаотической динамики магнитного монодомена и более регулярной структуры для координат перехода с использованием метода ДР. Рекуррентные диаграммы для координат магнитной системы (m_x, m_y, m_z) (a), координат соединения ($\sin \varphi, V$) (b). Адаптировано из работы [39]

5. РЕЗОНАНС И СИНХРОНИЗАЦИЯ В АНОМАЛЬНЫХ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

Существование и взаимное влияние сверхпроводимости и магнетизма долгое время является одной из самых актуальных проблем физики конденсированных сред [31, 32]. Возможность сосуществования сверхпроводимости и магнетизма в гибридных джозефсоновских структурах открывает перспективы для расширения технологических применений сверхпроводников и сверхпроводящих наноструктур в условиях стремительного развития спинтроники и сверхпроводящих логических устройств [43–46]. В настоящее время интенсивная работа сосредоточена на выявлении комбинаций материалов и структур типа сверхпроводник–ферромагнетик (СФ), которые улучшают функциональность и производительность устройств [47–50].

Одним из особых типов аномальных джозефсоновских переходов, демонстрирующих транспортные свойства с научным и технологическим потенциалом, является джозефсоновский φ_0 -переход. Он относится к особому классу аномальных джозефсоновских переходов с нецентросимметричным ферромагнитным слоем и нарушенной симметрией обращения времени. Эти свойства приводят к возникновению дополнительного фазового сдвига φ_0 , пропорционального магнитному моменту [36, 51], и изменению соотношения ток–фаза $I = I_c \sin(\varphi - \varphi_0)$, где I_c — критический ток, а φ — разность фаз сверхпроводника.

При изучении систем джозефсоновских переходов, возбуждаемых внешним излучением, влияние магнитной компоненты излучения обычно игнорируется и описание эффекта сводится к добавлению периодического сигнала к току смещения. Однако в джозефсоновском φ_0 -переходе микроволновое магнитное поле генерирует дополнительную магнитную прецессию с микроволновой частотой, что приводит к ряду необычных эффектов.

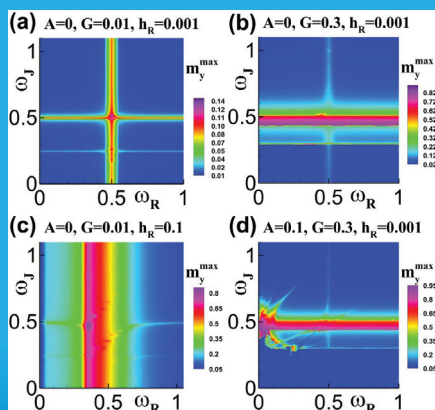
Интересный аспект этой проблемы проявился в физике аномального джозефсоновского перехода, где реализуется прямая связь между джозефсоновской фазой и намагниченностью. Это приводит к ферромагнитному резонансу Буздина с уникальными свойствами, различным стабильным магнитным траекториям и проявлению нелинейных свойств осциллятора Даффинга. Интересные перспективы открываются в области сверхпроводниковой спинтроники, в частности на основе переворота магнитного момента сверхпроводящим током, на проявлении свойств маятника Капицы. Внешнее излучение приводит к появлению дополнительных синхронизаций в системе (ступеньки Буздина и химеры), свойства которых зависят от периодического сигнала и динамики джозефсоновского перехода.

На IX Международной научной конференции «Современные проблемы физики» (Душанбе, 2024 г.) [52] нами был представлен обзор основных результатов исследования гибридных СФС джозефсоновских наноструктур и структур с наномангнитом. Были рассмотрены динамика намагниченности в области ферромагнитного резонанса, проявление бифуркаций и гистерезиса.

The combination of the Buzdin and Kittel ferromagnetic resonance

Shukrynov Yu. M., Rahmonov I. R.,
Kulikov K. V., Nashaat M., Kovalenko E. S.,
Abdelmoneim S. A., Janalizadeh A.,
Kolachi M. R., Botha A. E., and Tekić J.

Some Aspects of the Physics of Anomalous Josephson Structures



S. U. UMAROV PHYSICAL-TECHNICAL INSTITUTE
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF TAJIKISTAN

IX International Scientific Conference
"MODERN PROBLEMS OF PHYSICS"

Dushanbe, October 10-11, 2024

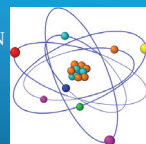


Рис. 10. Конкуренция киттелевского и буздиновского резонансов при $r = 0,2$ и различных параметрах модели: а) при изменении ω_J и ω_F соответственно; б) доминирование буздиновского резонанса при $G = 0,3$; в) доминирование резонанса Киттеля при $h_R = 0,1$; д) влияние обеих компонент электромагнитной волны. Адаптировано из работы [52]

зиса в области синхронизации магнитной прецессии, а также применение в области сверхпроводниковой электроники и спинтроники.

Помимо ферромагнитного резонанса и синхронизации, существует дополнительный эффект, который может оказывать микроволновое магнитное поле на систему. Его прямое воздействие на магнитный момент ферромагнитного слоя приводит к ферромагнитному резонансу Киттеля. Представленное на рис. 10 сочетание ферромагнитных резонансов Буздина и Киттеля в φ_0 -переходе с различными типами синхронизации, четко выраженное в динамике и вольт-амперной характеристике, делает физику этой системы очень интересной и открывает ряд новых применений.

Наши результаты в этой области были представлены в 2024 г. на XXVIII Международном симпозиуме «Нанозифика и нанозлектроника» в Нижнем Новгороде [53], а также на XXXIX Международном совещании по физике низких температур «FNT-2024» в Черногловке [54].

5.1. Буздиновские, Шапиро и химерные ступеньки в джозефсоновских φ_0 -переходах. Здесь представлены результаты нашей совместной работы по исследованию влияния микроволнового излучения на дина-

мику джозефсоновского φ_0 -перехода и его вольт-амперную характеристику. Продемонстрированы уникальные эффекты в динамике джозефсоновского φ_0 -перехода под воздействием внешнего излучения. Впервые была учтена не только электрическая, но и магнитная составляющая внешнего излучения. Это приводит к двум различным механизмам синхронизации джозефсоновских осцилляций и прецессии намагниченности ферромагнитного слоя.

Вследствие связи сверхпроводимости и магнетизма в этой системе прецессия магнитного момента ферромагнитного слоя, вызванная магнитной компонентой внешнего излучения, может синхронизировать джозефсоновские осцилляции, что приводит к появлению особого типа ступеней на вольт-амперной характеристике, отличных от хорошо известных ступенек Шапиро. Эти ступеньки были названы нами «ступеньками Буздина» в случае, когда система приводится в движение только магнитной компонентой, и «химерными» в случае, когда присутствуют как магнитная, так и электрическая компоненты. На рис. 11 представлены среднее напряжение, максимальное значение магнитной компоненты и сверхпроводящий ток как функции тока смещения при его уменьшении.

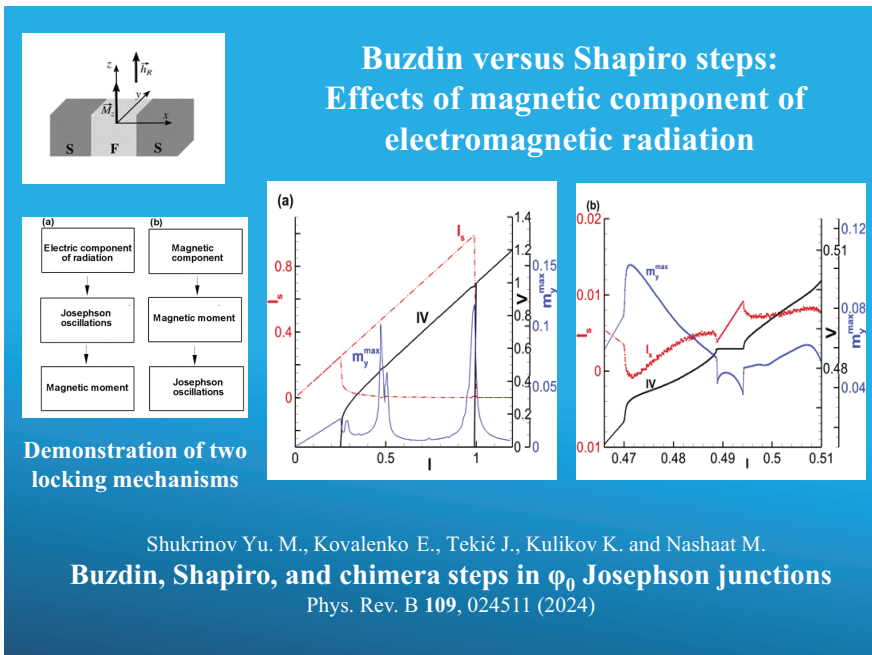
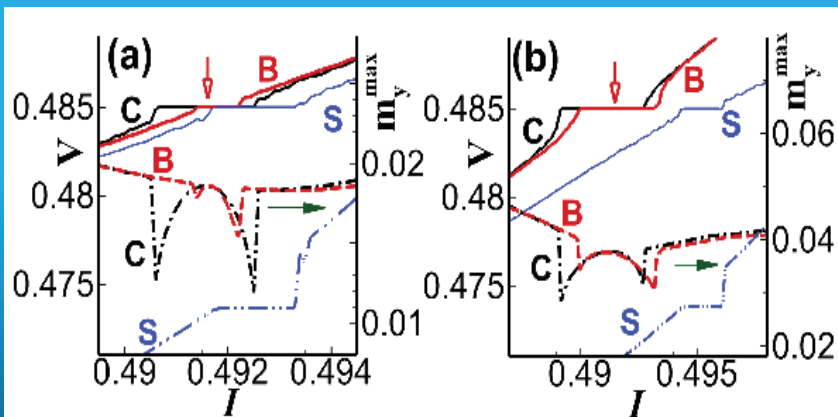


Рис. 11. Проявление ступеньки Буздина в φ_0 -переходе. *a)* Среднее напряжение V , максимальное значение магнитной компоненты m_y^{\max} и сверхпроводящий ток I_s как функции тока смещения I при его уменьшении. *b)* Увеличенное изображение ступеньки Буздина. Адаптировано из [55]

The effects of both radiation components: Buzdin, Shapiro and Chimera steps



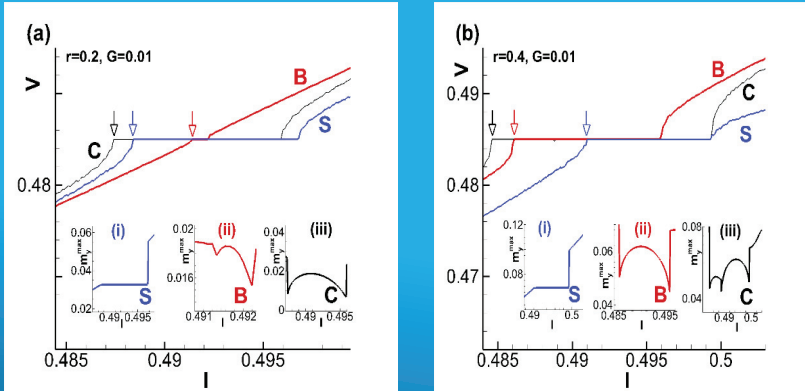
Phys. Rev. B 109, 024511 (2024)

Рис. 12. Демонстрация буздиновской, Шапиро и химерной ступенек в джозефсоновских φ_0 -переходах. *a*) Части вольт-амперных характеристик со ступеньками Буздина (B), Шапиро (S) и химерными (C) при значении параметра спин-орбитальной связи $r = 0,2$. *b*) То же самое при $r = 0,4$. Адаптировано из [55]

Эффекты обеих компонент излучения демонстрируются на рис. 12. В отличие от ступенек Шапиро, где магнитный момент остается постоянным вдоль ступеньки, здесь он изменяется, несмотря на то, что система синхронизирована. Спин-орбитальная связь вносит существенный вклад в амплитуду, т.е. в размер этих ступенек. Сильные изменения амплитуды наблюдаются на частотах, близких к ферромагнитному резонансу. Сочетание ферромагнитных резонансов Буздина и Киттеля с различными типами синхронизации, ярко выраженными в динамике и вольт-амперной характеристике, делает физику этой системы очень интересной и открывает ряд новых применений.

В 2025 г. мы представили нашу совместную работу по физическим явлениям в джозефсоновских структурах с фазовым сдвигом на XXIX Симпозиуме «Нанозифика и нанозлектроника» в Нижнем Новгороде [56]. В частности, обсуждалось резонансное управление намагненностью в шунтированном φ_0 -переходе и демонстрировалась возможность эффективного влияния на резонансные свойства джозефсоновского перехода путем изменения параметров шунтирования, величины намагненности и управления ее динамикой.

The interplay of the electric and magnetic components of the external electromagnetic radiation on the constant voltage step



Shukrinov Yu. M., *et al.*

Josephson structures with phase shift

The XXIX Symposium “Nanophysics and Nanoelectronics”, Nizhny Novgorod 2025

Рис. 13. Влияние обеих составляющих внешнего излучения на вольт-амперные характеристики φ_0 -перехода. *a*) Ступенька Шапиро (синяя кривая с амплитудой внешнего излучения $A = 0,05$), ступенька Буздина (красная кривая с амплитудой магнитной составляющей $h_R = 1$) и химерная ступенька (черная кривая с $A = 0,05$, $h_R = 1$) при $r = 0,2$. *b*) То же, что и в *a*, но с $r = 0,4$ и $h_R = 1,7$. Адаптировано из работы [56]

Проявление взаимодействия электрической и магнитной компонент внешнего электромагнитного излучения на ступеньке в φ_0 -переходе представлено на рис. 13.

Наблюдаются три различные ступеньки: первая — ступенька Шапиро (синяя кривая). Электрическая составляющая излучения синхронизирует джозефсоновские осцилляции, которые, в свою очередь, синхронизируют прецессию магнитного момента ферромагнитного барьера из-за спин-орбитальной связи. Вторая — ступенька Буздина возникает, если учитывать только магнитную составляющую излучения. Здесь соответствующая намагниченность m_y^{\max} демонстрирует пузырчатую структуру вдоль ступеньки (см. вставку ii). Третья ступень возникает в результате взаимодействия магнитной составляющей излучения с магнитным моментом, который, в свою очередь, синхронизирует джозефсоновские осцилляции. Совместное воздействие обеих составляющих приводит к появлению уникальной ступеньки, известной как химера (черная кривая). Подобно ступеньке Буздина, соответствующая компонента намагниченности m_y^{\max} демонстрирует

пузырчатую структуру (см. вставку iii). Интересные случаи возникают при изменении параметра спин-орбитальной связи и амплитуды магнитной компоненты излучения (см. рис. 13, *b*).

5.2. Аномальные джозефсоновские переходы: специфические особенности ступенек Буздина. Для лучшего понимания новой формы синхронизации, связанной с магнитной компонентой электромагнитного излучения, мы сосредоточили дополнительно наши исследования только на ступеньках Буздина [57], где продемонстрировали отличительные свойства этих ступенек, их уникальное происхождение и механизмы синхронизации.

Ширина ступеньки Буздина осциллирует с амплитудой магнитной компоненты. Мы провели аналитическое исследование, которое подтверждает численные результаты и показывает, что ширина ступеньки Буздина представляет собой произведение двух функций Бесселя. Сравнение численных и аналитических результатов для различных значений спин-орбитальной связи r и затухания Гильберта α представлено на рис. 14, *a* и *b*

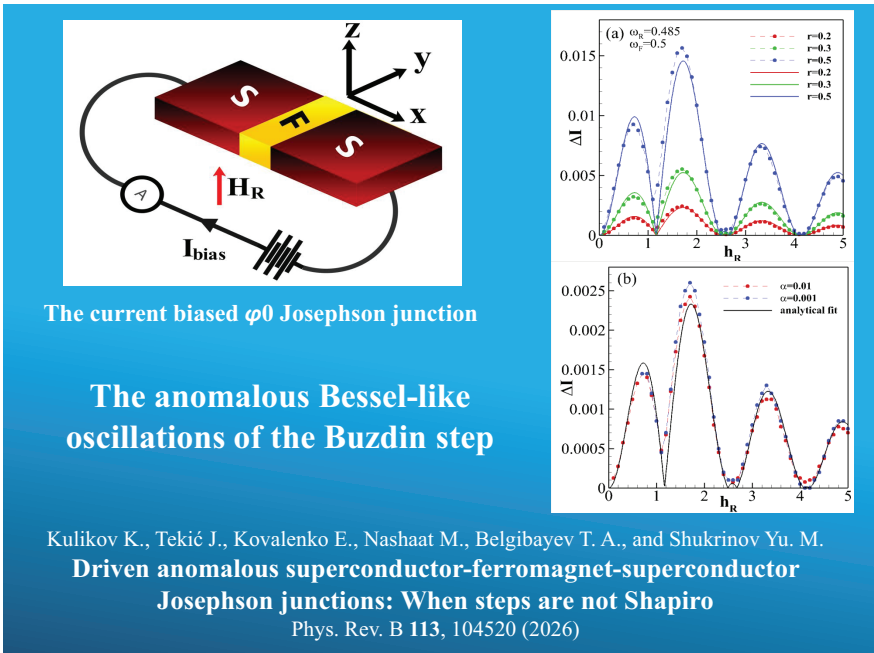
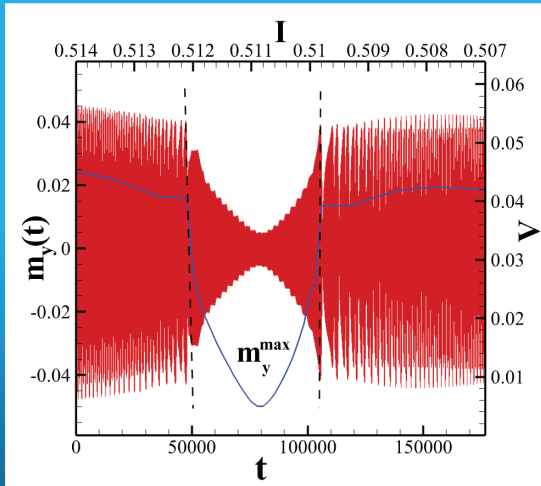


Рис. 14. Демонстрация уникальных свойств ступенек Буздина. Сравнение численных и аналитических результатов для размера ступеньки Буздина ΔI как функции амплитуды магнитной компоненты h_R при $\omega_J = \omega_R \approx \omega_F$ для различных значений r и $\alpha = 0,01$ (a) и различных значений α и $r = 0,2$ (b). Пунктирные и сплошные линии соответствуют численным и аналитическим результатам соответственно.

Адаптировано из [57]

Destructive interference: An abrupt drop in the amplitude of the magnetization precession



Phys. Rev. B 113, 104520 (2026)

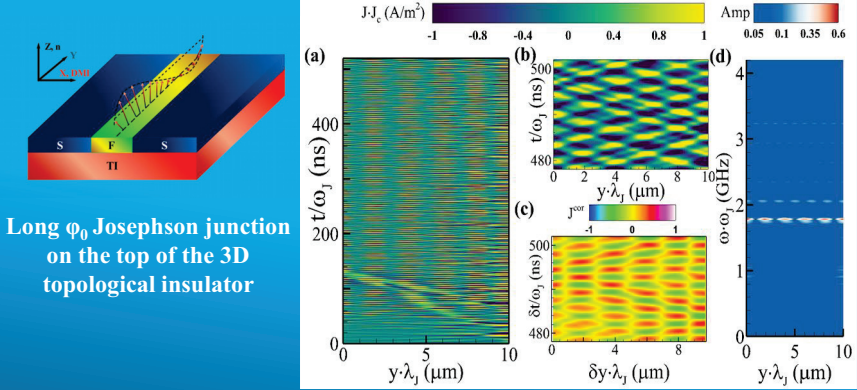
Рис. 15. Демонстрация резкого изменения амплитуды магнитной прецессии. Временная зависимость m_y -компоненты (красная линия) вместе с m_y^{\max} как функция тока смещения I (синяя линия) при $G = 0,01$, $\alpha = 0,01$, $r = 0,2$, $\omega_F = 0,5$, $h_R = 1$, $\omega_R = 0,505$. Адаптировано из [57]

соответственно. Исследование эффектов, одновременно проявляющихся в магнитной подсистеме, выявляет наличие деструктивной интерференции и переориентации намагниченности, сопровождающих возникновение ступенек Буздина. На рис. 15 показано соответствие между областью провала в зависимости $m_y^{\max}(I)$ и областью значительного уменьшения амплитуды колебаний m_y . Это интересное явление может стать предметом детальных исследований в будущем. Результаты данного исследования также были представлены в 2025 г. на международном совещании «Сверхпроводящие и магнитные гибридные структуры» (ОИЯИ, Дубна) [58].

6. ВНУТРЕННИЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ КРИСТАЛЛИЧЕСКИЙ ПОРЯДОК В ГИБРИДНОМ ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ ПЕРЕХОДЕ

С момента первого исследования пространственно-временных кристаллов Фрэнком Вильчеком [59, 60] они вызывают большой интерес в научном сообществе. После первоначальных споров об их существовании [61, 62] теперь они рассматриваются как неравновесная фаза материи, которая

Breaking of the continuous time translational symmetry, and the emergence of space-time crystalline order in the inplane current



Nashaat M., Tekić J., and Shukrinov Yu. M.

Intrinsic space-time crystalline order in a hybrid Josephson junction

Phys. Rev. B 112, 184507 (2025)

Рис. 16. Возникновение пространственно-временного порядка вдоль джозефсоновского φ_0 -перехода, расположенного на топологическом изоляторе. *a*) Пространственно-временная зависимость тока в плоскости $J(y, t)$ в СФС джозефсоновском переходе на топологическом изоляторе при $c_{ex} = 0,05$, $D_1 = 1,1$ и $D_2 = 0,8$. *b*) Увеличенное изображение части *a*, демонстрирующей картину пространственно-временного кристалла. *c*) Соответствующая пространственно-временная усредненная функция корреляции ток–ток $J^{cor}(\delta y, \delta t)$. *d*) Преобразование Фурье для $J(y, t)$, показанное на *a*. Расчеты были проведены при следующих параметрах: $\Omega_F = 1$, $\alpha_g = 0,05$, $k_{an} = 0,5$, $r = 0,9$, $G = 0,1$, $\beta = 0,00024$, $\tilde{d} = 0,3$, $\Gamma = 0,0762$ и $J_{noise} = 10^{-4}$. Адаптировано из [55]

может функционировать во временном измерении подобно стандартным кристаллам в пространстве. Определяющей характеристикой этих систем является нарушение дискретной или непрерывной временной трансляционной симметрии, что приводит к самоподдерживающемуся и устойчивому периодическому порядку во времени.

В работе [63] мы демонстрируем возникновение внутреннего пространственно-временного кристаллического порядка в длинном СФС джозефсоновском φ_0 -переходе на топологическом изоляторе без какой-либо внешней периодической модуляции. Наличие обменного взаимодействия и взаимодействия Дзялошинского–Мории в ферромагнитном слое с нарушенной инверсионной симметрией внутренне модулирует критический ток за счет связи между магнитным моментом и джозефсоновской фазой. Это нарушает симметрию временного сдвига, что приводит к появлению простран-

ственно-временной кристаллической структуры. Наблюдается пространственно-временная зависимость тока в плоскости, который колеблется с частотой, почти вдвое превышающей частоту ферромагнитного резонанса (рис. 16).

В пределе, когда критический ток не модулируется внутренне, при применении внешней параметрической модуляции система демонстрирует типичный классический дискретный пространственно-временной кристаллический порядок, где осцилляции критического тока происходят с частотой, равной половине частоты модуляции. Учитывая все еще не решенную проблему экспериментального подтверждения, мы демонстрируем, что недавно разработанное магнитометрическое устройство, визуализирующее поток сверхтока в наномасштабе, может быть использовано для экспериментального обнаружения пространственно-временных кристаллических структур в гибридных ДП.

Наши результаты по временным кристаллам в гибридных ДП были представлены на нескольких конференциях: в 2025 г. на международном семинаре «Сверхпроводящие и магнитные гибридные структуры» (ОИЯИ, Дубна, Россия) [64] и на конференции «Временные кристаллы» в Четраро (Италия) [65], в 2026 г. на южноафриканско-немецком семинаре «WE-Негаeus: нелинейная динамика и аномальный транспорт в Кейптауне» (Южная Африка) [66].

7. ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

27 марта 2025 г. в Объединенном институте ядерных исследований состоялась встреча государственного секретаря Министерства науки, технологического развития и инноваций Сербии Мирослава Траяновича с дирекцией ОИЯИ. Делегация Сербской Республики была также представлена старшим советником Министерства Светланой Богданович и заместителем директора Института ядерных наук «Винча» Марией Янкович. Со стороны ОИЯИ во встрече принимали участие директор Института Григорий Трубников, вице-директор Лъчезар Костов, главный инженер Института Борис Гикал, директор Учебно-научного центра ОИЯИ Дмитрий Каманин и руководитель Департамента международного сотрудничества Отилия-Ана Куликов (рис. 17). Стороны обсудили перспективы сотрудничества ОИЯИ–Сербия и наметили следующие шаги по реализации совместных инициатив и проектов.

В течение последних 10 лет наша совместная работа была направлена на решение фундаментальных проблем сверхпроводниковой электроники и спинтроники, в частности, на разработку принципиально новых методов управления намагниченностью в аномальных джозефсоновских структурах. Был предсказан ряд новых эффектов, имеющих важное практическое применение, таких как проявление свойств маятника Капицы в аномальном джозефсоновском переходе и косвенный захват магнитной прецессии джозефсоновскими осцилляциями под воздействием внешнего периодического сигнала.



On March 27, 2025, a meeting between Miroslav Trajanović, State Secretary of the Ministry of Science, Technological Development, and Innovation of Serbia, and the JINR Directorate took place at the Joint Institute for Nuclear Research. The parties discussed prospects for JINR-Serbia cooperation and outlined next steps for implementing joint initiatives and projects.

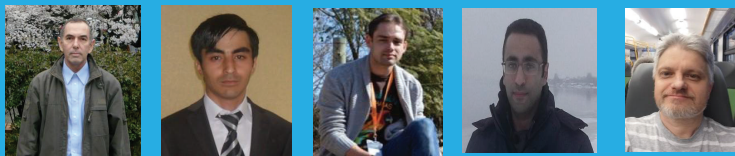
Рис. 17. ОИЯИ принял делегацию Министерства науки Сербии

Нами проведены исследования синхронизации, хаоса и гистерезиса в ФК-модели, управляемой постоянным и переменным током, а также одномерной системы внутренних джозефсоновских переходов. Исследована роль диссипации в возникновении хаоса, и показано, что лестничная структура на вольт-амперной характеристике может возникнуть даже при отсутствии хаоса. Исследование сильной диссипации в ФК-модели было далее расширено на случай со слабой диссипацией, где, как нами показано, наличие инерционных эффектов приводит к субгармонической синхронизации мод, хаосу и гистерезисному поведению.

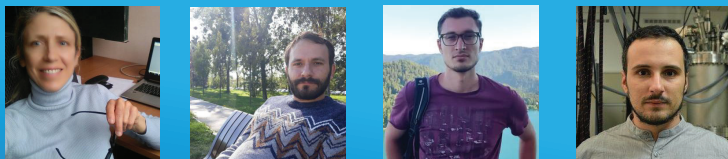
Были проведены обширные исследования кольцевых джозефсоновских переходов, в которых обнаружена затухающая динамика под воздействием внешнего излучения. Результаты исследования резонансных явлений и синхронизации в кольцевых джозефсоновских переходах были представлены на различных международных конференциях.

Нами было продемонстрировано возникновение хаоса вдоль резонансной ветви на вольт-амперной характеристике системы связанных джозефсоновских переходов, шунтированных резистивными, индуктивными и емкостными элементами цепи, отражающее сложную динамику высокотемпературных сверхпроводников, а также указывающее на возможность управления этой динамикой. Продемонстрированная хаотическая динамика, возникающая из-за связи магнитного монодомена и джозефсоновского

Scientists from Russia



Scientists from Serbia



Scientists from other countries that participated in the projects



Рис. 18. Ученые ЛТФ ОИЯИ: Ю. М. Шукринов, И. Р. Рахмонов, К. Куликов, М. Нашат, Е. Ковааленко. Ученые из Сербии: Я. Текич, П. Мали, Й. Одавич и И. Соколович. Ученые других стран, принимавшие участие в совместных публикациях: А. Е. Бота, М. Р. Колахчи и Т. А. Бельгибаев

тока, открывает ряд новых направлений в исследовании и приложениях джозефсоновских структур с магнитными барьерами.

Продемонстрирован ряд уникальных эффектов, характеризующих динамику джозефсоновских переходов с ферромагнитным интерфейсом. А именно, возникновение на вольт-амперной характеристике ступеньки Буздина, ступенек Шаapiro, а также химерных ступенек. Проанализированы уникальные свойства ступенек Буздина, в частности, было найдено, что зависимость ее ширины от амплитуды излучения определяется произведением бесселевских функций.

Были обнаружены уникальные синхронизационные и резонансные явления в джозефсоновском φ_0 -переходе при наличии внешнего электромагнитного излучения, когда учитывалась не только электрическая, но и его магнитная составляющая.

Было продемонстрировано, что гибридные джозефсоновские переходы могут обеспечить основу для реализации одного из самых спорных явлений современной физики — временного кристалла. А именно, показано, что модификация критического тока магнитным моментом может привести к внутреннему пространственно-временному кристаллическому порядку.

Следует отметить, что в 2023 г. группа ученых (см. рис. 18) из Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова под руководством Ю. М. Шукринова была удостоена Первой премии ОИЯИ в 2022 г. за серию теоретических работ, посвященных изучению физических явлений в аномальных джозефсоновских структурах.

Сотрудничество ОИЯИ–Сербия развивалось параллельно с сотрудничеством ОИЯИ–ЮАР, в котором определяющий вклад внесен проф. А. Е. Бота, UNISA. Ряд задач по исследованию свойств джозефсоновских наноструктур решался совместно, их результаты отражены в препринте D17-2024-16 и опубликованы в работе [67].

Исследования в области сверхпроводниковой электроники и спинтроники в последние годы стремительно расширяются. Среди наиболее привлекательных направлений исследований являются физические явления в гибридных джозефсоновских структурах с магнитными барьерами. В частности, возможность управления магнитной прецессией в ферромагнитном слое с помощью сверхпроводящего тока, проходящего через структуру, а также магнитного воздействия на сверхпроводящий ток открывает широкие перспективы для различных применений.

Благодарности. Мы благодарим наших коллег И. Рахронова, К. Куликова, М. Нашаата и Т. Бельгибаева за их активное содействие нашему сотрудничеству.

Мы хотели бы поблагодарить Дмитрия Казакова — директора ЛТФ ОИЯИ, Владимира Осипова — руководителя отдела теории конденсированных сред в ЛТФ ОИЯИ, Дмитрия Каманина — директора университетского центра в ОИЯИ, Отилия-Ана Куликов — руководителя международного отдела ОИЯИ и Марию Янкович — представителя Сербии в ОИЯИ, заместителя директора Института ядерных наук Винча за организацию и поддержку нашего сотрудничества, а также за поддержку наших совместных проектов и взаимных визитов.

Я. Текич выражает благодарность Министерству образования, науки и технологического развития Республики Сербии за поддержку (грант № 451-03-33/2026-03/200017) (Институт ядерных наук «Винча», Белградский университет). Ю. М. Шукринов выражает благодарность Российскому научному фонду за поддержку (проект № 22-71-10022). Авторы выражают благодарность за поддержку проектов в рамках Соглашения о сотрудничестве между ОИЯИ (Дубна, Российская Федерация) и Республикой Сербией (P12).

Мы благодарим административный персонал ОИЯИ и Института ядерных наук «Винча» за подготовку необходимых документов для реализации нашего сотрудничества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Braun O. M., Kivshar Y. S. The Frenkel–Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications. Springer, 2004. V. 18.

2. *Tekić J., Mali P.* The ac Driven Frenkel–Kontorova Model. Institut za Nuklearne Nauke VINČA, 2016.
3. *Floría L. M., Falo F.* Shapiro Steps in the Steady-State Dynamics of Incommensurate Structures // *Phys. Rev. Lett.* 1992. V. 68, No. 18. P. 2713.
4. *Falo F., Floría L., Martínez P., Mazo J.* Unlocking Mechanism in the AC Dynamics of the Frenkel–Kontorova Model // *Phys. Rev. B.* 1993. V. 48, No. 10. P. 7434.
5. *Shapiro S.* Josephson Currents in Superconducting Tunneling: The Effect of Microwaves and Other Observations // *Phys. Rev. Lett.* 1963. V. 11, No. 2. P. 80.
6. *Shukrinov Y. M., Medvedeva S. Y., Botha A., Kolahchi M., Irie A.* Devil's Staircases and Continued Fractions in Josephson Junctions // *Phys. Rev. B.* 2013. V. 88, No. 21. P. 214515.
7. *Shukrinov Yu. M., Botha A. E., Medvedeva S. Yu., Kolahchi M. R., Irie A.* Structured Chaos in a Devil's Staircase of the Josephson Junction // *Chaos.* 2014. V. 24, No. 3. P. 033115.
8. *Sokolović I., Mali P., Odavić J., Radošević S., Medvedeva S. Y., Botha A. E., Shukrinov Y. M., Tekić J.* Devil's Staircase and the Absence of Chaos in the dc- and ac-Driven Overdamped Frenkel–Kontorova Model // *Phys. Rev. E.* 2017. V. 96, No. 2. P. 022210.
9. *Tekić J., Botha A. E., Mali P., Shukrinov Yu. M.* Inertial Effects in the dc + ac Driven Underdamped Frenkel–Kontorova Model: Subharmonic Steps, Chaos, and Hysteresis // *Phys. Rev. E.* 2019. V. 99. P. 022206.
10. *Tekić J., Botha A., Mali P., Shukrinov Yu. M.* The AC Driven Frenkel–Kontorova Model: From Shapiro Steps to Chaos // 13th Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. Springer, 2021. P. 943–951.
11. *Mazo J. J., Ustinov A. V.* The Sine-Gordon Equation in Josephson-Junction Arrays // *The Sine-Gordon Model and Its Applications: From Pendula and Josephson Junctions to Gravity and High-Energy Physics.* Springer, 2014. P. 155–175.
12. *Clarke J.* Vortices and Hearts // *Nature.* 2003. V. 425, No. 6954. P. 133–136.
13. *Fedorov K. G., Shcherbakova A. V., Wolf M. J., Beckmann D., Ustinov A. V.* Fluxon Readout of a Superconducting Qubit // *Phys. Rev. Lett.* 2014. V. 112, No. 16. P. 160502.
14. *Wallraff A., Lukashenko A., Lisenfeld J., Kemp A., Fistul M., Koval Y., Ustinov A.* Quantum Dynamics of a Single Vortex // *Nature.* 2003. V. 425, No. 6954. P. 155–158.
15. *Likharev K. K., Semenov V. K.* RSFQ Logic/Memory Family: A New Josephson-Junction Technology for Sub-Terahertz-Clock-Frequency Digital Systems // *IEEE Trans. Appl. Supercond.* 1991. V. 1. P. 3.
16. *Kiselev E., Averkín A., Fistul M., Koshelets V., Ustinov A.* Two-Tone Spectroscopy of a SQUID Metamaterial in the Nonlinear Regime // *Phys. Rev. Res.* 2019. V. 1, No. 3. P. 033096.
17. *Crotty P., Schult D., Segall K.* Josephson Junction Simulation of Neurons // *Phys. Rev. E.* 2010. V. 82, No. 1. P. 011914.
18. *Davidson A., Dueholm B., Kryger B., Pedersen N. F.* Experimental Investigation of Trapped Sine-Gordon Solitons // *Phys. Rev. Lett.* 1985. V. 55, No. 19. P. 2059.
19. *Pfeiffer J., Kemmler M., Koelle D., Kleiner R., Goldobin E., Weides M., Feofanov A. K., Lisenfeld J., Ustinov A. V.* Static and Dynamic Properties of $0, \pi$,

- and $0-\pi$ Ferromagnetic Josephson Tunnel Junctions // Phys. Rev. B. 2008. V. 77. P. 214506.
20. *Ustinov A., Doderer T., Huebener R., Pedersen N., Mayer B., Oboznov V.* Dynamics of Sine-Gordon Solitons in the Annular Josephson Junction // Phys. Rev. Lett. 1992. V. 69, No. 12. P. 1815.
 21. *Ustinov A., Cirillo M., Malomed B.* Fluxon Dynamics in One-Dimensional Josephson-Junction Arrays // Phys. Rev. B. 1993. V. 47, No. 13. P. 8357.
 22. *Fulton T., Dynes R.* Single Vortex Propagation in Josephson Tunnel Junctions // Solid State Commun. 1973. V. 12, No. 1. P. 57–61.
 23. *Rahmonov I.R., Tekić J., Mali P., Irie A., Shukrinov Y.M.* ac-Driven Annular Josephson Junctions: The Missing Shapiro Steps // Phys. Rev. B. 2020. V. 101, No. 2. P. 024512.
 24. *Pfeiffer J., Abdumalikov A., Jr., Schuster M., Ustinov A.* Resonances between Fluxons and Plasma Waves in Underdamped Josephson Transmission Lines of Stripline Geometry // Phys. Rev. B. 2008. V. 77, No. 2. P. 024511.
 25. *Rahmonov I.R., Tekić J., Mali P., Irie A., Placenik A., Shukrinov Y.M.* Resonance Phenomena in an Annular Array of Underdamped Josephson Junctions // Phys. Rev. B. 2020. V. 101, No. 17. P. 174515.
 26. *Rahmonov I.R., Shukrinov Y.M., Rodin K.M., Tekić J., Mali P.* Resonance Properties of a Ring System of Parallel Josephson Junctions // Proc. of the XXII Intern. Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State Univ., 2018. P. 104–105.
 27. *Rahmonov I.R., Shukrinov Yu.M., Tekić J., Placenik A., Mali P.* Resonance Properties and Shapiro Steps of a Ring System of Parallel Josephson Junctions // Proc. of the XXIV Intern. Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State Univ., 2020. P. 105–106.
 28. *Huberman B., Crutchfield J., Packard N.* Noise Phenomena in Josephson Junctions // Appl. Phys. Lett. 1980. V. 37, No. 8. P. 750–752.
 29. *Kautz R.L.* On a Proposed Josephson-Effect Voltage Standard at Zero Current Bias // Ibid. V. 36, No. 5. P. 386–388.
 30. *Botha A.E., Shukrinov Yu.M., Tekić J.* Chaos along the rc-Branch of RLC-Shunted Intrinsic Josephson Junctions // Chaos, Solitons & Fractals. 2022. V. 156. P. 111865.
 31. *Shukrinov Yu.M.* Anomalous Josephson Effect // Phys. Usp. 2022. V. 65. P. 317–354.
 32. *Linder J., Halterman K.* Superconducting Spintronics with Magnetic Domain Walls // Phys. Rev. B. 2014. V. 90. P. 104502.
 33. *Shukrinov Yu.M., Rahmonov I.R., Sengupta K., Buzdin A.* Magnetization Reversal by Superconducting Current in Josephson φ_0 Junctions // Appl. Phys. Lett. 2017. V. 110, No. 18. P. 182407.
 34. *Shukrinov Yu.M., Mazanik A., Rahmonov I.R., Botha A.E., Buzdin A.* Re-Orientation of the Easy Axis in φ_0 -Junction // EPL (Europhysics Letters). 2018. V. 122, No. 3. P. 37001.
 35. *Buzdin A.I.* Proximity Effects in Superconductor-Ferromagnet Heterostructures // Rev. Mod. Phys. 2005. V. 77. P. 935–976.
 36. *Buzdin A.* Direct Coupling between Magnetism and Superconducting Current in the Josephson φ_0 Junction // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 101. P. 107005.

37. Golubov A. A., Kupriyanov M. Yu., Il'ichev E. The Current-Phase Relation in Josephson Junctions // *Rev. Mod. Phys.* 2004. V. 76. P. 411–469.
38. Bergeret F. S., Volkov A. F., Efetov K. B. Odd Triplet Superconductivity and Related Phenomena in Superconductor-Ferromagnet Structures // *Rev. Mod. Phys.* 2005. V. 77. P. 1321–1373.
39. Botha A. E., Shukrinov Yu. M., Tekić J., Kolahchi M. R. Chaotic Dynamics from Coupled Magnetic Monodomain and Josephson Current // *Phys. Rev. E.* 2023. V. 107. P. 024205.
40. Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J. Recurrence Plots for the Analysis of Complex Systems // *Phys. Rep.* 2007. V. 438, No. 5–6. P. 237–329.
41. Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Abdelmoneim S. A., Nashaat M., Janalizadeh A., Kolahchi M. R., Tekić J., Botha A. E. Nonlinearity, Locking, and Chaos in Anomalous Josephson Junctions // *Proc. of the XXVII Intern. Symp. "Nanophysics and Nanoelectronics"*. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State Univ., 2023.
42. Tekić J., Botha A. E., Kolahchi M. R., Shukrinov Yu. M. Chaos in the φ_0 SFS Josephson Junction // 14th Chaotic Modeling and Simulation Intern. Conf. Springer, 2023. P. 651–662.
43. Linder J., Robinson J. W. A. Superconducting Spintronics // *Nature Phys.* 2015. V. 11, No. 4. P. 307–315.
44. Eschrig M. Spin-Polarized Supercurrents for Spintronics // *Phys. Today.* 2011. V. 64, No. 1. P. 43–49.
45. Golubov A. A., Kupriyanov M. Y. Controlling Magnetism // *Nat. Mater.* 2017. V. 16, No. 2. P. 156–157.
46. Mel'nikov A., Mironov S. V., Samokhvalov A. V., Buzdin A. I. Superconducting Spintronics: State-of-the-Art and Prospects // *Usp. Fiz. Nauk.* 2022. V. 192. P. 1339–1384.
47. Tuero P., González-Ruano C., Žutić I., Lu Y., Tiusan C., Aliev F. G. Superconducting Spintronics with Electron Symmetry Filtering and Interfacial Spin–Orbit Coupling // *J. Phys. D: Appl. Phys.* 2026. V. 59, No. 13. P. 3003.
48. Cai R., Žutić I., Han W. Superconductor/Ferromagnet Heterostructures: A Platform for Superconducting Spintronics and Quantum Computation // *Adv. Quant. Technol.* 2023. V. 6, No. 1. P. 2200080.
49. Ryazanov V. V., Bol'ginov V. V., Sobanin D. S., Vernik I. V., Tolpygo S. K., Kadin A. M., Mukhanov O. A. Magnetic Josephson Junction Technology for Digital and Memory Applications // *Phys. Procedia.* 2012. V. 36. P. 35–41.
50. Guarcello C., Bergeret F. S. Cryogenic Memory Element Based on an Anomalous Josephson Junction // *Phys. Rev. Appl.* 2020. V. 13, No. 3. P. 034012.
51. Korschelle F., Buzdin A. Magnetic Moment Manipulation by a Josephson Current // *Phys. Rev. Lett.* 2009. V. 102. P. 017001.
52. Shukrinov Yu. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Nashaat M., Kovalenko E. S., Abdelmoneim S. A., Janalizadeh A., Kolahchi M. R., Botha A. E., Tekić J. Some Aspects of the Physics of Anomalous Josephson Structures // *Proc. of the IX Intern. Sci. Conf. "Modern Problems of Physics"*. Donish Publ. House, 2024. P. 22–28.
53. Shukrinov Yu. M., Kovalenko E. S., Tekić J., Kulikov K. V., Nashaat M. Prospects for Research of the SFS Josephson φ_0 Junction // *Proc. of the XXVIII Intern.*

- Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”, Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State Univ., 2024. P. 162–163.
54. *Shukrinov Yu. M., Kovalenko E. S., Kulikov K. V., Tekić J., Nashaat M.* Effects of Mutual Influence of Superconductivity and Magnetism in Anomalous Josephson Junctions // Conf. on Low Temperature Physics: Collection of Abstr. of the Intern. Conf. FNT. Chernogolovka, 2024. P. 33.
 55. *Shukrinov Y. M., Kovalenko E., Tekić J., Kulikov K., Nashaat M.* Buzdin, Shapiro, and Chimera Steps in Josephson φ_0 Junctions // Phys. Rev. B. 2024. V. 109, No. 2. P. 024511.
 56. *Shukrinov Y. M., Rahmonov I. R., Kulikov K. V., Abdelmoneim S. A., Nashaat M., Janalizadeh A., Kolahchi M. R., Botha A. E., Tekić J., Kibardina O.* Josephson Structures with Phase Shift // Proc. of the XXIX Intern. Symp. “Nanophysics and Nanoelectronics”. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod State Univ., 2025.
 57. *Kulikov K., Tekić J., Kovalenko E., Nashaat M., Belgibayev T., Shukrinov Y. M.* Driven Anomalous Superconductor-Ferromagnet-Superconductor Josephson Junctions: When Steps are Not Shapiro // Phys. Rev. B. 2026. V. 113, No. 10. P. 104520.
 58. Locking Phenomena in Josephson Junction Conventional vs Hybrid / K. Kulikov, J. Tekić, E. Kovalenko, M. Nashaat, T. A. Belgibayev, Yu. M. Shukrinov. Paper presented at the 2nd Intern. Workshop “Superconducting and Magnetic Hybrid Structures”, JINR, Dubna, Russia, July, 2025.
 59. *Wilczek F.* Quantum Time Crystals // Phys. Rev. Lett. 2012. V. 109, No. 16. P. 160401.
 60. *Shapere A., Wilczek F.* Classical Time Crystals // Ibid. P. 160402.
 61. *Watanabe H., Oshikawa M.* Absence of Quantum Time Crystals // Phys. Rev. Lett. 2015. V. 114, No. 25. P. 251603.
 62. *Bruno P.* Impossibility of Spontaneously Rotating Time Crystals: A No-Go Theorem // Phys. Rev. Lett. 2013. V. 111, No. 7. P. 070402.
 63. *Nashaat M., Tekić J., Shukrinov Y. M.* Intrinsic Space-Time Crystalline Order in a Hybrid Josephson Junction // Phys. Rev. B. 2025. V. 112, No. 18. P. 184507.
 64. *Tekić J., Nashaat M., Shukrinov Y. M.* Self-Generated Time Crystals in Superconductor-Ferromagnet Heterostructures. Paper presented at the 2nd Intern. Workshop “Superconducting and Magnetic Hybrid Structures”, JINR, Dubna, Russia, July, 2025.
 65. *Tekić J., Nashaat M., Shukrinov Y. M.* Intrinsic Space-Time Crystalline Order in a Hybrid Josephson Junction. Paper presented at the Time Crystals Conference, Cetraro, Italy, July, 2025.
 66. *Tekić J., Nashaat M., Shukrinov Y. M.* Intrinsic Space-Time Crystalline Order in a Hybrid Josephson Junction. Paper presented at the South African–German WE-Heraeus Seminar “Nonlinear Dynamics and Anomalous Transport in Low Dimension”, Cape Town, South Africa, February, 2026.
 67. *Shukrinov Yu. M., Botha A. E.* JINR–UNISA Results of Collaboration on Theoretical Study of Josephson Nanostructures // Phys. Part. Nucl. 2024. V. 55, No. 5. P. 1352–1379.

Получено 18 мая 2026 г.

Редактор *А. И. Семенова*

Подписано в печать 00.00.2026.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 0,00. Уч.-изд. л. 0,00. Тираж 000 экз. Заказ № 000.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru
publish.jinr.ru